

Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc

::: Module Mathématiques I : Algèbre :::

Filière :

Sciences de Matière Physique (SMP)
et
Sciences de Matière Chimie(SMC)

Chapitre V: Calcul Matriciel

Par

Prof: Jilali Mikram
Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation
<http://www.fsr.ac.ma/ANO/>
Email : mikram@fsr.ac.ma

Année : 2005-2006

TABLE DES MATIERES

1	Eléments du calcul matriciel	3
1.1	Quelques définitions et opérations	3
1.2	Le produit matriciel	4
1.2.1	Matrice identité	5
1.3	Règles du calcul matriciel	6
1.4	Ecriture matricielle des systèmes d'équations linéaires	7
1.5	L'inversion des matrices	8
1.5.1	Matrices 2×2	9
1.6	Les matrices élémentaires	11
1.7	Calcul de l'inverse d'une matrice	14
1.7.1	Calcul de l'inverse d'une matrice par les matrices élémentaires	14
1.7.2	Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode de Gauss	16
1.8	Matrices triangulaires	17
1.9	La transposition	19
1.10	Matrices symétriques	20
1.11	Matrices antisymétriques	20

1 Eléments du calcul matriciel

1.1 Quelques définitions et opérations

Définition 1.1 (Matrice). Une matrice (réelle) A est un tableau rectangulaire de nombres (réels). Elle est dite de taille $n \times m$ si le tableau possède n lignes et m colonnes. Les nombres du tableau sont appelés les éléments de A . L'élément situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté a_{ij} . La matrice A est également notée

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

ou plus simplement

$$A = (a_{ij})$$

si le nombre de lignes et de colonnes est connu par ailleurs.

Exemple 2.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3 avec, par exemple, $a_{11} = 1$ et $a_{23} = 7$.

Si $n = m$, la matrice est dite carrée.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrice carrée $n \times n$

Dans le cas d'une matrice carrée, les éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sont appelés les éléments diagonaux.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même taille et que les éléments correspondants sont égaux.

Définition 1.2 (Somme de deux matrices). On peut définir la somme de deux matrices si elles sont de même taille. Soient A et B deux matrices de taille $n \times m$. On définit leur somme $C = A + B$, de taille $n \times m$ par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

En d'autres termes, on somme composante par composante.

Exemple 2.4.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice (de taille $n \times m$) dont tous les éléments sont des zéros est appelée la matrice nulle et notée 0_{nm} ou plus simplement 0 . C'est l'élément neutre pour l'addition, c'est-à-dire que $A + 0 = A$.

Définition 1.3 (Produit d'une matrice par un scalaire). Le produit d'une matrice A par un scalaire k est formé en multipliant chaque élément de A par k . Il est noté kA .

Exemple 2.6. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k = -3.$$

Alors

$$kA = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(-1)A$ est notée $-A$ et la différence $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

Exemple 2.7.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$
$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2 Le produit matriciel

Le produit AB de deux matrices A et B est défini seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B :

Définition 1.4 (Produit de deux matrices). Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times m$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $m \times r$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times r$ dont les éléments c_{ij} sont définis par

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_r \\ b_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mr} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & c_{nr} \end{pmatrix}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2m}b_{m1}$$

Exemple 2.9.

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}_{1 \times 3} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = (8 - 6 - 3)_{1 \times 1} = (-1)$$

2.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3 \times 1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{1 \times 4} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

1.2.1 Matrice identité

Définition 1.5 *La matrice carrée $n \times n$*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

s'appelle la matrice identité. Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0.

Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 dans l'arithmétique des scalaires. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes, si A une matrice $m \times n$ Alors

$$I_m A = A \text{ et } A I_n = A.$$

1.3 Règles du calcul matriciel

Sous l'hypothèse que les tailles des matrices soient compatibles avec les opérations indiquées, on a les règles suivantes :

- (a) Commutativité de la somme : $A + B = B + A$.
- (b) Associativité de la somme : $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- (c) Associativité du produit : $A(BC) = (AB)C$.
- (d) Distributivité du produit par rapport à la somme : $A(B+C) = AB+AC$,
 $(B + C)A = BA + CA$
- (e) $A + 0 = A$
- (f) $AI = IA = A$
- (g) $A.0 = 0.A = 0$

ATTENTION! Le produit des matrices n'est pas nécessairement commutatif. On peut avoir $AB \neq BA$.

Exemple 2.11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ATTENTION : Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A, B \neq 0$ et $AB = 0$.

Exemple 2.12.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui précède implique, par distributivité que l'on peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

Exemple 2.13.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$
$$AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$$

1.4 Écriture matricielle des systèmes d'équations linéaires

Le système linéaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_b$$

On appelle A la matrice des coefficients du système. Le vecteur x est une solution du système si et seulement si

$$Ax = b.$$

Théorème 1.1 *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

Démonstration : Soit $Ax = b$ la représentation matricielle du système. On est nécessairement dans l'un des cas ci-dessous :

- (a) le système est incompatible (aucune solution) ;
- (b) le système a une seule solution ;
- (c) le système a plusieurs solutions.

Pour démontrer le théorème , il suffit alors de montrer que dans le cas (c) il y a une infinité de solutions.

Soient x_1 et x_2 des solutions distinctes du système. Alors $Ax_1 = B$ et $Ax_2 = B$. Donc $Ax_1 - Ax_2 = 0$ et $A(x_1 - x_2) = 0$. Posons

$$x_0 = x_1 - x_2.$$

On a $x_0 \neq 0$, car $x_1 \neq x_2$ et l'expression

$$x_1 + kx_0$$

est une solution du système pour tout nombre réel k . En effet, $A(x_1 + kx_0) = Ax_1 + kAx_0 = B + 0$.

Quelques cas particuliers

Dans le cas particulier où $n = m = 2$ (2 équations à 2 inconnues) le système linéaire correspond à l'intersection de deux droites dans le plan. Nous avons vu, dans la partie 1, que trois cas pouvaient se présenter : les droites sont soit parallèles, soit sécantes, soit confondues et ces trois cas correspondent aux trois cas du théorème ci-dessus.

Si le système est homogène, les deux droites passent par le point $(0, 0)$ et ne peuvent donc être parallèles. Le cas sans solution est donc exclu. Dans le cas où l'on a 2 équations ($m = 2$) à 3 inconnues ($n = 3$), ceci correspond à l'intersection de deux plans dans l'espace. Trois cas se présentent alors :

- les plans sont parallèles et il n'y a alors aucune solution au système ;
- les plans sont confondus et il y a une infinité de solutions au système ;
- les plans se coupent en une droite et il y a une infinité de solutions ;

Du point de vue du nombre de solutions, nous constatons qu'il n'y a que deux possibilités, à savoir aucune solution ou une infinité de solutions. Mais les deux derniers cas ci-dessus sont néanmoins très différents géométriquement et il semblerait que dans le second cas (plans confondus), l'infinité de solutions soit plus grande que dans le troisième cas.

1.5 L'inversion des matrices

Définition 1.6 (Matrice inverse). Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que $AB = I$ et $BA = I$, on dit que A est inversible et on appelle B un inverse de A .

Exemple 2.16. La matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

est inversible et un de ses inverses est

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

En effet, on a

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.17. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible. En effet, soit

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

une matrice quelconque. Alors le produit

$$AB = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

ne peut jamais être égal à la matrice identité.

Théorème 1.2 Si B et C sont des inverses de A , alors $B = C$.

Démonstration : Comme B est l'inverse de A , on a

$$BA = I$$

et donc

$$BAC = IC = C.$$

La multiplication étant associative, ceci revient à

$$B(AC) = C.$$

Mais par hypothèse $AC = I$ et donc $B = C$.

Si A est une matrice inversible, son inverse est noté A^{-1} . On a donc

$$AA^{-1} = I \text{ et } A^{-1}A = I.$$

1.5.1 Matrices 2×2

Considérons les matrices 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

On vérifie que

$$AB = BA = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible si $ad - bc \neq 0$, et on a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Puissances d'une matrice Soit A une matrice $n \times n$. On définit

$$A^m = \underbrace{AA \dots A}_{m \text{ facteurs}}$$

Si A est inversible, on définit

$$A^{-m} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{m \text{ facteurs}}$$

Théorème 1.3 Soit A une matrice inversible. Alors

- (a) A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$;
- (b) A^m est inversible et

$$\begin{aligned} (A^m)^{-1} &= \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{m \text{ facteurs}} \\ &= (A^{-1})^m = A^{-m} \end{aligned}$$

- (c) kA est inversible si $k \neq 0$ et $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

Théorème 1.4 Soient A et B deux matrices $n \times n$ inversibles. Alors

- (a) AB est inversible et
- (b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Démonstration : On montre que

$$\begin{aligned} (B^{-1}A^{-1})(AB) &= \\ (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= I \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} B^{-1}A^{-1}AB &= B^{-1}IB = B^{-1}B = I \\ ABB^{-1}A^{-1} &= AIA^{-1} = AA^{-1} = I \end{aligned}$$

De façon analogue, on montre que si A_1, \dots, A_m sont inversibles, alors

$$(A_1 A_2 \dots A_m)^{-1} = A_m^{-1} A_{m-1}^{-1} \dots A_1^{-1}.$$

Exemple 2.21.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} & A^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} -9 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & B^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \\ AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -7 \\ -39 & -17 \end{pmatrix} \\ B^{-1}A^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -7 \\ -39 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a alors bien

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \begin{pmatrix} -16 & -7 \\ -39 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & -7 \\ -39 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.6 Les matrices élémentaires

Définition 1.7 (Matrice élémentaire). On dit qu'une matrice E est élémentaire si elle peut être obtenue par une seule opération élémentaire sur les lignes de la matrice identité (voir 1.1.1 (*) pour la définition des opérations élémentaires). Il existe donc trois types de matrices élémentaires correspondant aux trois opérations élémentaires. (1) La matrice $E_i(c)$ est la matrice élémentaire obtenue en multipliant par c la $i^{\text{ème}}$ ligne de I_n .

Exemple 2.23.

$$E_i(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) La matrice E_{ij} est la matrice élémentaire obtenue en permutant les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de I_n .

Exemple 2.24.

$$E_{24} = E_{42} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) La matrice $E_{ij}(c)$ est la matrice élémentaire obtenue en ajoutant c fois la $j^{\text{ème}}$ ligne de I_n à la $i^{\text{ème}}$ ligne.

Exemple 2.25.

$$E_{21}(-5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 1.5 . *Si la matrice élémentaire E est le résultat d'une opération élémentaire effectuée sur I_m , alors pour toute matrice A de taille $m \times n$ le produit matriciel EA est égal à la matrice obtenue en effectuant la même opération élémentaire sur A .*

Exemples :

(1)

$$E_1(2).A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

(2)

$$E_{23}.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

(3)

$$E_{21}(9).A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 9a_{11} + a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

Les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles. Ceci entraîne l'inversibilité des matrices élémentaires.

Théorème 1.6 *Toute matrice élémentaire est inversible. En particulier, on a :*

$$\begin{aligned} [E_{ij}(c)]^{-1} &= E_{ij}(-c) \\ E_{ij}^{-1} &= E_{ij} \\ [E_i(c)]^{-1} &= [E_i(\frac{1}{c})] \end{aligned}$$

Exemple 2.28. On a

$$E_{21}(-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{21}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.8 On dit que deux matrices sont équivalentes par lignes si l'une peut être obtenue de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.

Théorème 1.7 Pour toute matrice A de taille $n \times n$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (a) A est inversible.
- (b) Le système $AX = B$ a une et une seule solution pour toute matrice B de taille $n \times 1$. Cette solution est donnée par $X = A^{-1}B$.
- (c) $AX = 0$ n'a que la solution triviale $X = 0$.
- (d) A est équivalente par lignes à I_n .
- (e) A est un produit de matrices élémentaires.

Démonstration : (a) \Rightarrow (b) Si A est inversible, on a les équivalences suivantes :

$$AX = B. \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

ce qui prouve (b).

$$(b) \Rightarrow (c)$$

C'est évident car (c) est un cas particulier de (b) avec $B = 0$.

(c) \Rightarrow (d) Par hypothèse, le système $AX = 0$ est équivalent au système

$$\begin{cases} X_1 & = & 0 \\ & X_2 & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ & & X_n & = & 0 \end{cases}$$

La matrice associée à ce dernier système est la matrice identité. La matrice A est donc équivalente par lignes à I_n et ceci prouve le point (d).

(d) \Rightarrow (e) On sait, par hypothèse, qu'une succession d'opérations élémentaires sur A conduit à la matrice I_n . Par le théorème 2.26, ceci signifie qu'il existe des matrices élémentaires E_1, \dots, E_r telles que

$$E_r \cdot E_{r-1} \dots E_1 \cdot A = I_n.$$

Comme une matrice élémentaire est inversible, ceci implique que

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_r^{-1}.$$

Mais l'inverse d'une matrice élémentaire est encore une matrice élémentaire et l'on a le résultat cherché.

(e) \Rightarrow (a) Ceci découle du fait que toute matrice élémentaire est inversible et que le produit de matrices inversibles est encore inversible.

1.7 Calcul de l'inverse d'une matrice

Le théorème précédent donne deux méthodes pour déterminer l'inverse d'une matrice inversible.

1.7.1 Calcul de l'inverse d'une matrice par les matrices élémentaires

La méthode consiste à faire les opérations élémentaires mettant la matrice A sous la forme échelonnée réduite, qui est I_n . On fait ensuite les mêmes opérations élémentaires sur la matrice I_n . On aboutit alors à A^{-1} . En pratique, on fait les deux opérations en même temps selon la procédure suivante: Former la matrice $(A : I)$ et effectuer sur cette matrice augmentée les opérations élémentaires mettant A sous la forme échelonnée réduite. On obtient alors la matrice $(I : A^{-1})$.

Exemple 2.31. Calculons l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$l_2 := l_2 - 4l_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$l_3 := l_3 + l_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & : & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & : & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$l_2 := -\frac{1}{8}l_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & : & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & : & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$l_3 := l_3 - 4l_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & : & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & : & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

$$l_3 := 2l_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & : & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$l_2 := l_2 - \frac{5}{8}l_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & : & -2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$l_1 := l_1 - 2l_2 - l_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & : & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & : & -2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1.7.2 Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode de Gauss

En utilisant le (b) du théorème précédent, le calcul de l'inverse de A revient à rechercher pour un triplet (a, b, c) donné, un triplet (x, y, z) , avec

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

En effet, on aura ainsi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

et la calcul de (x, y, z) explicitera les coefficients de A^{-1}

Exemple calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice augmentée associée au système est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 2 & 1 & 3 & b \\ 0 & -1 & 1 & c \end{array} \right)$$

ce qui se fait par la méthode de Gauss en écrivant successivement

$$l_2 := l_2 - 2l_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 5 & -2a + b \\ 0 & -1 & 1 & c \end{array} \right)$$

$$l_3 := l_3 + l_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 5 & -2a + b \\ 0 & 0 & 6 & -2a + b + c \end{array} \right)$$

$$l_3 := \frac{1}{6}l_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 5 & -2a + b \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{6}c \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
l_1 &:= L_1 + l_3 \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & : & \frac{2}{3}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{6}c \\ 0 & 1 & 5 & : & -\frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b - \frac{5}{6}c \\ 0 & 0 & 1 & : & -\frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{6}c \end{pmatrix} \\
l_2 &:= L_2 - 5l_3
\end{aligned}$$

On en déduit donc A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

1.8 Matrices triangulaires

Définition 1.9 Soit A une matrice de taille $n \times n$. On dit que A est triangulaire inférieure si ses éléments au dessus de la diagonale sont nuls, autrement dit si

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire inférieure a donc la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On dit que A est triangulaire supérieure si ses éléments en dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit si

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 2.33. Matrices triangulaires inférieures

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.34. Matrices triangulaires supérieures :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition 1.10 Une matrice qui est triangulaire inférieure et triangulaire supérieure est dite diagonale.

Exemple 2.36. Exemples de matrices diagonales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Théorème 1.8 Une matrice A de taille $n \times n$, triangulaire, est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.

Démonstration : Supposons que A est triangulaire supérieure. Si les éléments de la diagonale sont tous non nuls, alors, en multipliant chaque ligne i par l'inverse de l'élément diagonal a_{ii} , on obtient la forme échelonnée de A . Elle ne contient que des 1 sur la diagonale. De ce fait, la forme échelonnée réduite de A sera la matrice identité. Le théorème 2.30 permet de conclure que A est inversible. Inversement, supposons qu'au moins l'un des éléments diagonaux soit nul et notons m le premier élément nul de la diagonale. En multipliant les lignes 1 à $m-1$ par l'inverse de leur élément diagonal, on obtient une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & & \cdots & * \\ 0 & \ddots & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{ll} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \vdots & * \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

où $l = m + 1$.

Il est alors clair que la colonne m de la forme échelonnée ne contiendra pas de 1 directeur. La forme échelonnée réduite de A ne peut donc pas être I_n et par le théorème 2.30, A n'est pas inversible. Dans le cas d'une matrice triangulaire inférieure, on utilise la transposition qui fait l'objet de la section suivante et on obtient une matrice triangulaire supérieure. On applique alors la démonstration ci-dessus.

1.9 La transposition

Soit A la matrice de taille $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Définition 1.11 On appelle matrice transposée de A , la matrice A^T de taille $n \times m$ définie par

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, la $i^{\text{ème}}$ colonne de A^T est la $i^{\text{ème}}$ ligne de A , ou encore

$$a_{ij}^T = a_{ji}$$

Exemple 2.39.

$$\begin{aligned} (1 \quad -2 \quad 5)^T &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ (4)^T &= (4) \end{aligned}$$

Théorème 1.9 L'opération de transposition obéit aux règles suivantes :

- (a) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- (b) $(kA)^T = kA^T$
- (c) $(AB)^T = B^T A^T$
- (d) $(A^T)^T = A$.
- (e) Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et on a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ qui sera notée A^{-T} .

1.10 Matrices symétriques

Définition 1.12 Une matrice A de taille $n \times n$ est dite symétrique si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si

$$A = A^T$$

ou encore si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.

Exemple 2.42. Les matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad I_n, \quad \text{et } 0_{n,n}$$

sont symétriques.

Théorème 1.10 Pour une matrice B quelconque, les matrices BB^T et $B^T B$ sont symétriques.

Démonstration : Par le théorème 2.40, on a

$$(BB^T)^T = (B^T)^T B^T = BB^T$$

$$(B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B$$

1.11 Matrices antisymétriques

Définition 1.13 Une matrice A de taille $n \times n$ est dite antisymétrique si

$$A^T = -A$$

c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.

Exemple 2.45.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls.

Théorème 1.11 Toute matrice A de taille $n \times n$ est la somme d'une matrice symétrique B et d'une matrice antisymétrique C .

Démonstration : Soit $A = (a_{ij})$. Posons

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \text{ et } c_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}.$$

Alors $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, $b_{ij} = b_{ji}$ et $c_{ij} = -c_{ji}$. Ceci montre que

$$B^T = B, \quad C^T = -C, \quad \text{et } A = B + C$$