Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat, Maroc

Algèbre 2, 2015-2016
Filière : SMIA

Série n°1

Exercice 1 *On muni* $\mathbb{R}$ *de loi de composition interne* $*$ *définie par :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1)$.

1. *Montrer que* $\mathbb{R}$ *muni de la loi* $*$ *admet un élément neutre que l'on déterminera.*
2. *Montrer que la loi* $*$ *est commutative.*
3. *Montrer que la loi* $*$ *n'est pas associative.*
4. *Déterminer l'ensemble* S *des éléments symétrisables dans* $(\mathbb{R}, *)$. *Et montrer qu'en particulier tout élément* $a \in \mathbb{R}$ *avec* $|a| > 1$ *admet deux symétriques.*

Exercice 2 *On considère l'ensemble* E *des matrices carrées à coefficients réels de la forme*

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$$

tel que $x \in \mathbb{R}^*$ *et* $y \in \mathbb{R}$, *muni du produit des matrices.*

1. *Montrer que* E *est une partie stable pour le produit des matrices carrées à coefficients réels.*
2. *Déterminer tous les éléments neutres à droite de* E.
3. *Montrer que* E *n'admet pas d'élément neutre à gauche.*
4. *Soit* e *un élément neutre à droite. Montrer que tout élément de* E *possède un inverse à gauche pour cet élément neutre, i.e.* $\forall\, g \in E$, $\exists\, h \in E$, $hg = e$.

Exercice 3 *On Pose* $H = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\backslash\{\overline{0}\}$, *où* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, *et on considère le monoïde* $(H, \times)$.

1. *Déterminer les éléments inversibles de* $(H, \times)$.
2. *En déduire que* n *est premier si et seulement si tout élément de* H *est inversible.*

3. *Montrer qu'un élément de $(H, \times)$ est régulier si et seulement s'il est inversible.*

Exercice 4 *Soit $(G, *)$ un monoïde fini.*

1. *Soit $g \in G$. On considère l'application $d_g : G \to G$ définie par $d_g(x) = g * x$ pour tout $x \in G$.*
   Montrer que d_g est bijective si et seulement si g est symétrisable.
2. *On suppose que tout élément de G est régulier. Montrer que tout élément de G est symétrisable.*
3. *Montrer qu'on obtient le même résultat de la question précédente si on suppose que $(G, *)$ est seulement un magma associatif fini.*
4. *Donner un exemple d'un monoïde dont tout élément est régulier mais pas tout élément est symétrisable.*

Exercice 5 *Soit G un magma associatif vérifiant les deux assertions suivantes :*

1. *$\exists\, e \in G, \forall\, x \in G, x\, e = x$ (autrement dit, G possède un élément neutre à droite e).*
2. *$\forall\, x \in G, \exists\, x' \in G, x\, x' = e$ (autrement dit, x admet possède un inverse à droite x').*

Montrer que G est un groupe.

Exercice 6 (Facultatif) *On considère $GL_2(\mathbb{R})$ le groupe linéaire réel de degré 2. Rappelons que la transposée d'une matrice M, notée par M^t, est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de M.*

1. *Montrer que pour tous $M, N \in GL_2(\mathbb{R})$, $(MN)^t = N^t M^t$. En déduire que $(M^{-1})^t = (M^t)^{-1}$ pour tout $M \in GL_2(\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que l'ensemble $E = \{M \in GL_2(\mathbb{R});\ M^t = M\}$ n'est pas un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.*
3. *Montrer que l'ensemble $F = \{M \in GL_2(\mathbb{R});\ (M^t)^{-1} = M\}$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.*

Exercice 7 *On munit $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ de la loi de composition interne $\star$ définie par $(a, e) \star (b, f) = (ab, af + e)$ pour tout $((a, e), (b, f)) \in E^2$.*

1. *Montrer que $(E, \star)$ est un groupe non commutatif.*

2. *Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$. Montrer que $H \times \mathbb{R}$ est un sous-groupe de E.*

Exercice 8 *Montrer que l'ensemble $\{1 + 2m/1 + 2n | n, m \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}^*$.*

Exercice 9 *Soient n et m deux entiers naturels. Déterminer l'ntersection $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$.*

Exercice 10 *Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G abélien. Supposons que la loi de G est notée additivement. L'ensemble $H+K := \{h+k | h \in H, k \in K\}$ est appelé la somme des sous-groupes H et K.*

1. *Montrer que $H + K$ est un sous-groupe de G.*
2. *Déterminer l'ntersection $n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}$ où n et m sont deux entiers naturels.*

Exercice 11
1. *Justifier que $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}, \times)$.*
2. *En déterminer l'image et le noyau.*

Exercice 12 *On considère le groupe produit $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On définit les deux applications $f : G \to \mathbb{Z}$ et $g : G \to G$ par $f(n, m) = 3n + 2m$ et $g(n, m) = (2n - m, 3n - m)$.*

1. *Déterminer l'image et le noyau de f.*
2. *Montrer que g est un automorphisme.*

Exercice 13 (Facultatif) *Soit G un groupe d'élément neutre e.*

1. *Montrer que si G est d'ordre pair, alors il existe un élément $x \in G$ tel que $x^2 = e$.*
2. *On suppose que, pour tout $x \in G$, $x^2 = e$.*
   (a) *Montrer que G est commutatif.*
   (b) *Soient H un sous-groupe de G et $g \in G \backslash H$.*
   On pose $gH = \{gh / h \in H\}$.
      i. *Montrer que $H \cup gH$ est un sous-groupe de G.*
      ii. *Montrer que $card(gH) = |H|$.*
      iii. *En déduire $|H \cup gH| = 2|H|$.*

(c) *On pose* $H =< a >$ *pour un élément* $a \in G$. *On considère* $g \in G \backslash H$. *Déterminer* $|H \cup gH|$.

(d) *Montrer que l'ordre de* G *est une puissance de* 2.

3. *Soit* $n \geq 2$ *un entier positif. On considère le groupe produit* H^n, *où* H *est le groupe additif* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Montrer que le groupe* H^n *vérifie bien la condition de la dernière question.*

Exercice 14 (Facultatif) *Soit* G *un groupe. Pour tout* $g \in G$, *on considère l'application*

$$\begin{array}{rccc} I_g : & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$

1. *Montrer que* I_g *est un automorphisme de* G *pour tout* $g \in G$.
2. *On considère l'application*

$$\begin{array}{rccc} I : & G & \longrightarrow & Aut(G) \\ & g & \longmapsto & I_g \end{array}$$

(a) *Montrer que* I *est un homomorphisme de groupes.*

(b) *Montrer que* $Ker(I) = \{g \in G | \forall x \in G,\ gx = xg\}$.

Exercice 15 (Facultatif) 1. *Soient* H *et* K *deux groupes et* f *un homomorphisme de* H *dans* K.
Montrer que pour tout $a \in H$, $f(< a >) =< f(a) >$.

2. *On considère l'application surjectif* $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *(où* $n \in \mathbb{N}^*$*) définie par* $\pi(k) = \overline{k}$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$.

(a) *Montrer que* π *est un homomorphisme de groupes additifs et en déterminer le noyau.*

(b) *Montrer que l'image réciproque par* π *de tout sous-groupe de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est de la forme* $m\mathbb{Z}$ *où* $m \in \mathbb{N}$ *divise* n.

(c) *Déduire l'ensemble des sous-groupes de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.