UNIVERSITE MOHAMMED V
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
RABAT

PRECIS DU COURS DE THERMODYNAMIQUE 1

FILIERE : SMIA et EIR

Professeur : Omar MOUNKACHI

Rappels et compléments de mathématiques

I) Fonction d'une seule variable

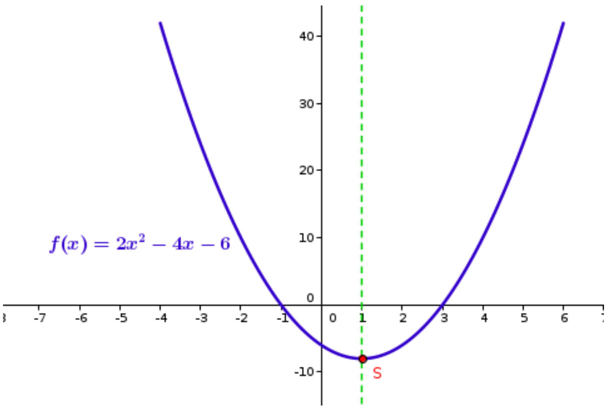
La variable y est dite fonction de la variable x si la donnée de la valeur de x fixe la valeur (éventuellement les valeurs) de y : $y = f(x)$

Où f(x) symbolise une expression mathématique où intervient x.

Exemples de fonctions :

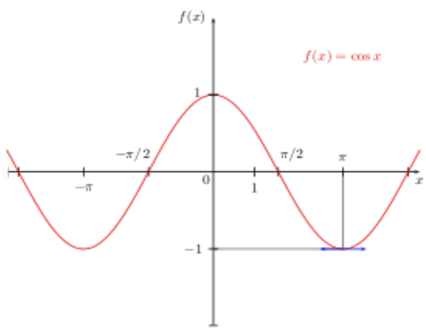
Fonctions polynômes:

$f(x)= a0+a_1X^1+a_2X^2+a_3X^3+\ldots\ldots+a_nX^n$



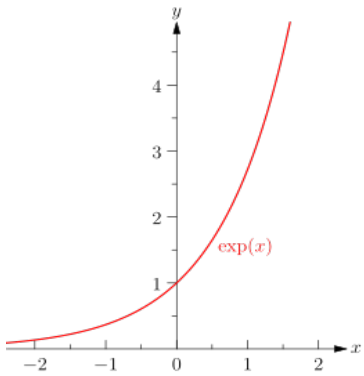
Fonctions trigonométriques :

$y = \cos(x)$; $y = \sin(x)$; $y = tg(x)$



Fonction exponentielle :

$y = e^x$ ou $y = \exp(x)$



$y = \mathrm{e}^{x_1}.e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$, $e^0 = 1$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

Fonction logarithme :

$y = \log_e(x) = Log(x) = Ln(x)$, si $x = e^y$

$Ln(x_1) + Ln(x_2) = Ln(x_1 x_2)$,

$Ln(1) = 0$

Le symbole $\frac{d}{dx}$ désigne « l'opération dérivée » par rapport à x : $y' = f'(x) = \frac{d}{dx} y$.

Les dérivées et les différentielles d'ordre supérieur s'écrivent:

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

et $d^2y = f''(x)\ d^2x$

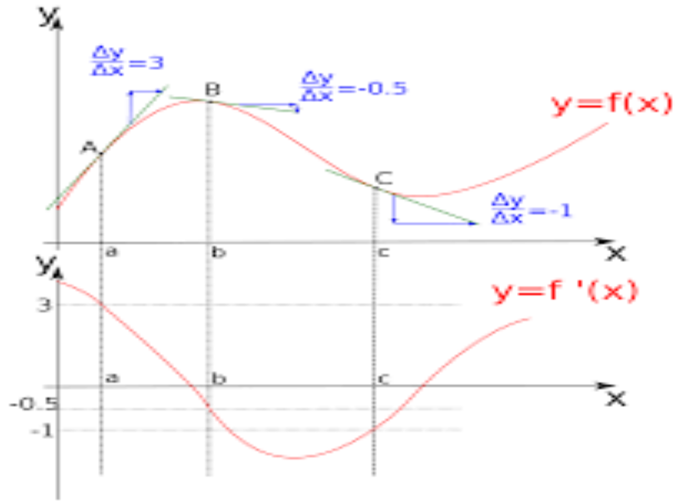
.

.

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{et} \quad d^n y = f^{(n)}(x)\ d^{(n)}x$$

I.1 Dérivée d'une fonction

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Exemples :

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

$\cos(x) \rightarrow -\sin(x)$

$\sin(x) \rightarrow \cos(x)$

$tg(x) \rightarrow 1 + tg^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$u(x).v(x) \rightarrow u'(x).v(x) + v'(x).u(x)$

$e^x \rightarrow e^x$

$Ln(x) \rightarrow \frac{1}{x}$

I.2 Différentielle d'une fonction

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x) \underset{\Delta x \to 0}{\rightarrow} 0$$

$$\Delta y = f'(x).\Delta x + \Delta x.\varepsilon(\Delta x)$$

Au premier ordre:

$\Delta y = f^{'}(x).\Delta x + \ldots$

Si $\Delta x \to 0$ on a $\Delta \to d$

La différentielle de la fonction y est notée dy

$dy = f^{'}(x).dx$ et la dérivée s'écrira : $f^{'}(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Cas d'une fonction de fonction : y=f(t) et t=g(x)

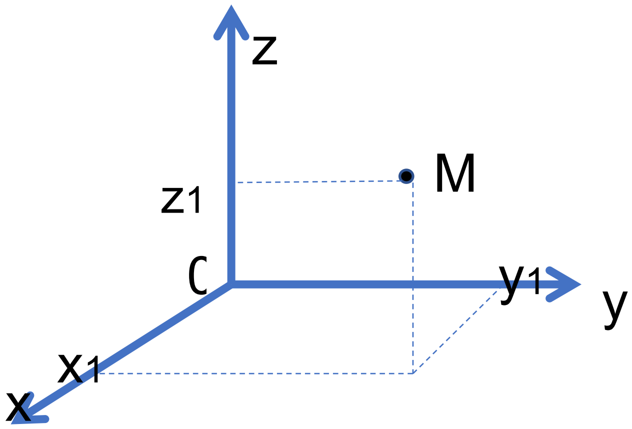
$y = f(g(x))$, $y^{'} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = f^{'}g^{'}$, $dy = f^{'}g^{'}dx$

II. Fonction de plusieurs variables

0n peut étendre la notion de fonction, au cas où la connaissance des valeurs de plusieurs variables est nécessaire au calcul d’un nombre qui sera dit fonction de ces variables

Exemples: Fonction du point : f(M)

Un point de l’espace M est repéré par ses coordonnées cartésiennes x, y et z : f(M)=f(x,y,z)



$f(M)=f(x_1,y_1,z_1)$

II.1Dérivées partielles

Si on considère une fonction à plusieurs variables la dérivée partielle de cette fonction est la dérivée par rapport à une seule variable donnée, les autres variables sont considérée constantes

Prenons le cas d’une fonction à 2 variables f(x,y)

$$f_x^{'}(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$f_y^{'}(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

II.2 différentielle d’une fonction à plusieurs variables

Soit une fonction à 2 variables f(x,y) qui subit l’accroissement totale Δf(x,y)

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

$$\Delta f=\Delta y.f_y^{'}(x_0,y_0)+\Delta y.\varepsilon(\Delta y)+\Delta x.f_x^{'}(x_0,y_0)+\Delta x.\varepsilon(\Delta x)$$

Si Δx et Δy tendent vers 0 on a e(Δx) et e(Δy) tendent vers 0 et Δ tend vers d

Et on aura $$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

Dans le cas d’une fonction à trois variables on a

$$df(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{yz} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{xz} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{xy} dz$$

II.3 Fonction d'état

On appelle **fonction d'état** une fonction des variables d'état. Par exemple la fonction d'état A dépend des variables d'état X , Y et Z.

Elle doit satisfiable certaines propriétés mathématiques dont la principale est que sa différentielle est totale exacte càd elle vérifie la relation suivante :

$$dA(X,Y,Z) = \left(\frac{\partial A}{\partial X}\right)_{Y,Z} dX + \left(\frac{\partial A}{\partial Y}\right)_{Z,X} dY + \left(\frac{\partial A}{\partial Z}\right)_{X,Y} dZ$$

$\left(\frac{\partial A}{\partial Y}\right)_{Z,X}$ représente la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable Y, les autres variable symbolisées par X et Z restant constantes

Une fonction est dite fonction d'état s'elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final ou bien si sa différentielle est une différentielle totale exacte.

Une fonction d'état ne dépend pas du chemin suivi pour aller de l'état initial à l'état final.

Dans le cas de deux variables :

df(x,y) est totale exacte si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Dans le cas de trois variables :

df(x,y) est totale exacte si :

1°) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_z$

2°) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)_y = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right)_y$

3°) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)_x = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)_x$

Si on a

$df(x,y) = A(x,y)dx + B(x,y)dy$

df(x,y) est diff tot exacte si

$$\left(\frac{\partial A(x,y)}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}\right)_y$$