UNIVERSITE MOHAMMED V
Faculté des Sciences - Rabat

Année universitaire 2020-2021
MODULE M 5 (Semestre S1)
Filière **SMIA**

THERMODYNAMIQUE (TD 1)

Différentielle, fonction à plusieurs variables : dérivées partielles, différentielle totale exacte

EXERCICE 1 :

Ecrire la différentielle de la fonction : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

EXERCICE 2 :

Soit la fonction à deux variables : $f(x,y) = x^5 + 3xy^4 + 2y^2 + 1$

1/ Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

2/ En déduire l'expression de la différentielle df.

3/ Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

EXERCICE 3 :

En thermodynamique, on rencontre des équations différentielles de type: $\delta F = A(x,y).dx + B(x,y).dy$ où $A(x,y)$ et $B(x,y)$ sont deux fonctions à deux variables x et y indépendantes. (δF représente une variation infinitésimale de la fonction F(x,y)). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que δF soit une différentielle totale exacte. Dans ce cas, F sera alors une propriété du système et on notera sa différentielle dF.

1/ Montrer que la forme $\delta F = y.dx + x.dy$ correspond à une différentielle totale
exacte.

2/ Déterminer alors la fonction F(x,y).

3/ Calculer $\int_{(0,0)}^{(1,1)} dF$ suivant les trois chemins suivants :

i/ (x = 0 puis y = 1) ; ii/ (y = 0 puis x = 1) ; iii/ y = x . Conclure.

EXERCICE 4 :

On considère la fonction : $P\,(V\,,T\,) \;=\; \dfrac{RT}{V\text{ - }b} \;-\; \dfrac{a}{V^2}$ (a, b et R sont des constantes)

Calculer les dérivées partielles de P et en déduire sa différentielle. Vérifier que cette différentielle est totale exacte.

EXERCICE 5 :

1/ Donner les expressions différentielles des relations suivantes :

$PV = cste$; $PV - RT = cste$ (R est une constante)

2/ Déterminer la relation en P et V en considérant l'écriture différentielle suivante :

$V\,dP + \gamma\; P\; dV \;=\; 0$ (γ est une constante)

EXERCICE 6 : (Fonction implicite)

Dans certaines conditions, $f\,(x, y, z) = 0$ permet de définir x comme fonction de y, z ; ou y comme fonction de x, z ; ou z comme fonction de x, y.

1/ Montrer les deux relations suivantes :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_z} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \quad (2)$$

2/ En déduire que : $\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$ (3)

3/ Application : $f\,(P, V, T) \;=\; PV - RT = 0$ (R est une constante)

- - - - ----- -- -- - -- -- ---- -- -- -- -- -- -- -- - --

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

- - - - ---- ----- -- -- - -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- -- --

EXERCICE 1 :

Soit la forme différentielle suivante : $\delta F = (x - y)\, dx + (x + y)\, dy$. S'agit-il d'une différentielle totale exacte ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 2 :

On considère la relation : $f(P, V, T) = P - \frac{RT}{V-b} + \frac{a}{V^2} = 0$ (a, b et R sont des constantes). Calculer $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$.