THERMODYNAMIQUE (TD 4)

Travail - Quantité de chaleur - Premier principe
Première et deuxième lois de Joule

EXERCICE 1 :

Déterminer l'expression du travail W échangé par une masse m de gaz parfait subissant une transformation réversible d'un état 1 (P_1,V_1,T_1) à un état 2 (P_2,V_2,T_2) dans les cas suivants : i/ la transformation est isobare, ii/ la transformation est isochore, iii/ la transformation est isotherme, iv/ la transformation est adiabatique.

(On rappelle que le travail élémentaire échangé par le gaz s'écrit : $\delta W = - P_{ext} \cdot dV$ où P_{ext} est la pression extérieure)

EXERCICE 2 :

Déterminer le travail W échangé par une mole d'un gaz régi par l'équation de Van der Waals, au cours d'une transformation isotherme réversible dans laquelle le volume passe de V_1 à V_2.

EXERCICE 3 :

Une masse m de gaz échange, au cours d'une transformation élémentaire réversible une quantité de chaleur δQ qui peut s'écrire de trois façons différentes, suivant le choix des variables indépendantes (T,V) ; (T, P) et (P,V) :

$$\left|\begin{array}{l} \delta Q = m\, c_v\, dT + \ell\, dV \\ \delta Q = m\, c_p\, dT + h\, dP \\ \delta Q = \lambda\, dP + \mu\, dV \end{array}\right.$$

1/ Exprimer les coefficients calorimétriques ℓ , h , μ et λ en fonction de la masse m, des chaleurs massiques c_v et c_p du gaz et des dérivées partielles de la température par rapport au volume et par rapport à la pression.

2/ Calculer ces coefficients dans le cas d'un gaz parfait en fonction de P et V et le rapport $\gamma = c_p / c_v$ supposé constant . (On donne : $M c_p - M c_v = R$).

3/ En déduire la relation entre P et V, au cours d'une transformation adiabatique réversible du gaz parfait. Donner les autres relations, entre P et T et entre T et V.

EXERCICE 4 :

Un récipient fermé par un piston mobile renferme initialement 0,5 mole d'un gaz supposé parfait dans les conditions (P_1 , V_1 , T_1). On opère une compression adiabatique de façon réversible qui amène le gaz dans les conditions (P_2 , V_2 , T_2).

Données : P_1 = 1 atm ; V_1 = 10 L ; $V_2 = V_1 / 3$; $\gamma = c_P/c_v = 1{,}4$; R = 8,32 J . mol^{-1}. K^{-1}.

Déterminer la pression finale P_2 , le travail reçu par le gaz, la variation d'énergie interne, la variation de la température et la variation d'enthalpie du gaz.

EXERCICE 5 :

On considère un gaz supposé parfait que l'on peut faire passer réversiblement de l'état initial A (P_A ; V_A) à l'état final C (P_C ; V_C) par deux chemins différents :

- chemin (I) : transformation adiabatique AC
- chemin (II) : formé par une transformation isochore AB suivie d'une isobare BC.

Données : $P_A = 10^5$ Pa ; $V_A = 1$ L ; $P_C = 3P_A$; $\gamma = c_p / c_v = 1{,}4$

1/ Représenter les deux chemins (I) et (II) dans le diagramme de Clapeyron P=P(V).
2/ Déterminer le volume V_C . 0,46L
3/ Calculer les travaux et les quantités de chaleur échangés par le gaz avec le milieu extérieur suivant le chemin (I) et suivant le chemin (II). Conclure.
4/ Déterminer la variation de l'énergie interne du gaz suivant les deux chemins. Conclure.

$\Delta U_I = 95 J$
$\Delta U_{II} = 95 J$

$Q_I = 0$
$Q_{II} = -567 J$

W_I
W_{II}
$W_I \neq W_{II}$

EXERCICE 6 :

On considère de l'hélium (supposé comme un gaz parfait) dans l'état initial A (V_A ; P_A ; T_A). On fait subir à ce gaz les transformations réversibles suivantes :

- une détente adiabatique amenant le gaz de l'état A à l'état B (V_B ; P_B ; T_B),
- un réchauffement isochore de l'état B à l'état C (V_C ; P_C ; T_C),
- une compression isotherme, ramenant le gaz de l'état C à l'état initial A.

Données : $V_A = 10$ L ; $P_A = 1$atm ; $T_A = 300$ K ; $V_B = 2\,V_A$; $R = 8{,}32$ J. mol^{-1} . K^{-1} ;

$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{5}{3}$ (rapport des chaleurs massiques du gaz)

1/ Donner l'allure du cycle ABCA dans le diagramme de Clapeyron P = P(V). Dans quel sens est décrit le cycle ?
2/ Déterminer les valeurs du volume, de la pression et de la température correspondant aux états B et C.
3/ Calculer les travaux et les quantités de chaleur échangés par le gaz durant chaque transformation du cycle. On montrera pour la transformation BC que : $Q_{BC} = -W_{AB}$
4/ Déterminer la variation de l'énergie interne pour chaque transformation du cycle.
5/ Vérifier le premier principe de la thermodynamique pour le cycle.

EXERCICE 7 :

Une masse m d'un gaz parfait décrit un cycle ABCA constitué des trois transformations réversibles suivantes :

- une compression adiabatique de l'état A (V_A ; P_A ; T_A) à l'état B (V_B ; P_B ; T_B),
- un réchauffement isobare de l'état B à l'état C (V_C ; P_C ; T_C),
- un refroidissement isochore, ramenant le gaz de l'état C à l'état initial A.

Données : $P_A = 1$ atm ; $V_A = 1$ litre ; $T_A = 10$ °C ; $P_B = 2\,P_A$
$M = 18$ g . mol^{-1} (masse molaire du gaz) ; $R = 8{,}32$ J. mol^{-1}. K^{-1}
$\gamma = c_P/c_V = 1{,}4$ (rapport des chaleurs massiques du gaz)

1/ Tracer le cycle ABCA dans le diagramme de Clapeyron P = P(V). Dans quel sens est décrit le cycle ?
2/ Calculer la masse m du gaz, le volume V_B , la température T_B et la température T_C.
3/ Calculer les quantités de chaleur Q_{AB} , Q_{BC} et Q_{CA} échangées par le gaz au cours des trois transformations du cycle.
4/ Calculer les travaux W_{AB} , W_{BC} et W_{CA} échangés par le gaz au cours des trois transformations du cycle.
5/ Vérifier le premier principe de la thermodynamique pour le cycle.

Exercice 1 :

$$\delta W = -P_{ext}\, dV$$

Transf. rév : $P_{ext} = P_{gaz} = P$

$$\Rightarrow W = \int -P \, dV$$

i/ $W_{isobare} = -P \,.\, (V_2 - V_1)$

avec $P = P_1 = P_2$

ii/ $W_{isochore} = 0 \Leftarrow$ Volume constant

iii/ Transf. isotherme : $T = T_1 = T_2$

$$PV = P_1 V_1 = P_2 V_2 = cste = A = nRT = \frac{m}{M} RT$$

$$\Rightarrow P = \frac{A}{V} \Rightarrow W_{isotherme} = \int_{V_1}^{V_2} -\frac{A}{V} dV$$

$$\Rightarrow W_{isotherme} = -\frac{mR}{M} T \,.\, \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

iv/ Transf. adiabatique :

$$PV^\gamma = P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma = cste = A$$

$$\Rightarrow P = \frac{A}{V^\gamma} \Rightarrow W_{adiabatique} = \int_{V_1}^{V_2} -\frac{A}{V^\gamma} dV$$

$$= -A \,.\, \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]_{V_1}^{V_2} = A \left[\frac{V^{1-\gamma}}{\gamma - 1}\right]_{V_1}^{V_2}$$

$$= \frac{P_2 V_2^\gamma V_2^{1-\gamma} - P_1 V_1^\gamma V_1^{1-\gamma}}{\gamma - 1} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1}$$

$$= \frac{mR}{M} \,.\, \frac{1}{\gamma - 1}(T_2 - T$$

xercice 2 : $\delta W = -P_{ext} \cdot dV$

$P_{ext} = P$ (transf. réversible)

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

$$\Rightarrow W = -\int_{V_1}^{V_2} \left\{ \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right\} dV$$

$$= -RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V-b} + a \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2}$$

$$= -RT \ln\left(\frac{V_2 - b}{V_1 - b}\right) - a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)$$

Exercice 3 :

c_v et c_p sont des chaleurs massiques (en $J.kg^{-1}.K^{-1}$)

1/
$$\begin{cases} \delta Q = m c_v \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP \right\} + \ell\, dV \\ \delta Q = m c_p \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP \right\} + h\, dV \\ \delta Q = \lambda\, dP + \mu\, dV \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)\ \delta Q = \left\{ m c_v \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P + \ell \right\} dV + m c_v \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP \\ (2)\ \delta Q = m c_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + \left\{ m c_p \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V + h \right\} dP \\ (3)\ \delta Q = \lambda\, dP + \mu\, dV \end{cases}$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \begin{cases} \ell = m.(c_p - c_v).\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \\ h = -m(c_p - c_v)\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \end{cases}$$

$$(1) = (3) \Rightarrow \lambda = m c_v \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$$

$$(2) = (3) \Rightarrow \mu = m c_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$$

2/ Gaz parfait : $T = \frac{PV}{nR}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \frac{P}{nR} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right) = \frac{V}{nR}$$

On a la relation de Robert-Mayer :

$$c_p - c_v = \frac{R}{M}$$

On pose : $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$ (rapport des chaleurs massiques),

$$\Rightarrow \begin{cases} c_v = \frac{1}{\gamma-1} \cdot \frac{R}{M} \\ c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{R}{M} \end{cases}$$

D'où : Pour le gaz parfait,

$$\begin{cases} \ell = m \cdot \frac{R}{M} \cdot \frac{P}{nR} = P \\ h = -m \cdot \frac{R}{M} \cdot \frac{V}{nR} = -V \\ \lambda = m \cdot \frac{1}{\gamma-1} \cdot \frac{R}{M} \cdot \frac{V}{nR} = \frac{V}{\gamma-1} \\ \mu = m \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{R}{M} \cdot \frac{P}{nR} = \frac{\gamma}{\gamma-1} P \end{cases}$$

3/ Transformation adiabatique réversible du gaz parfait : $\delta Q = \lambda \, dP + \mu \, dV$

$$\Rightarrow \frac{V}{\gamma-1} dP + \frac{\gamma}{\gamma-1} P \, dV = 0 \Rightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} =$$

$$\Rightarrow \ln(PV^\gamma) = cste \Rightarrow PV^\gamma = c$$

$$\begin{cases} PV^\gamma = cste \\ P = \frac{nRT}{V} \end{cases} \Rightarrow T \cdot V^{\gamma-1} = cste$$

$$\begin{cases} PV^\gamma = cste \\ V = \frac{nRT}{P} \end{cases} \Rightarrow T^\gamma \cdot P^{1-\gamma} = cste$$

Exercice 4 : $n = 0{,}5$ mole (gaz parfait)

$$(P_1, V_1, T_1) \xrightarrow[\text{adiab, rév}]{\text{compression}} (P_2, V_2, T_2)$$

- $P_2 V_2^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma} \Rightarrow P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = 10^5 \cdot (3)^{1,4}$
  $\simeq 4{,}66 \cdot 10^5\ Pa$

- $W = \dfrac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1} \simeq 1383\,J$

- $\Delta U = W + Q$ (1er principe)
  $Q = 0 \Rightarrow \Delta U = W = 1383\,J$

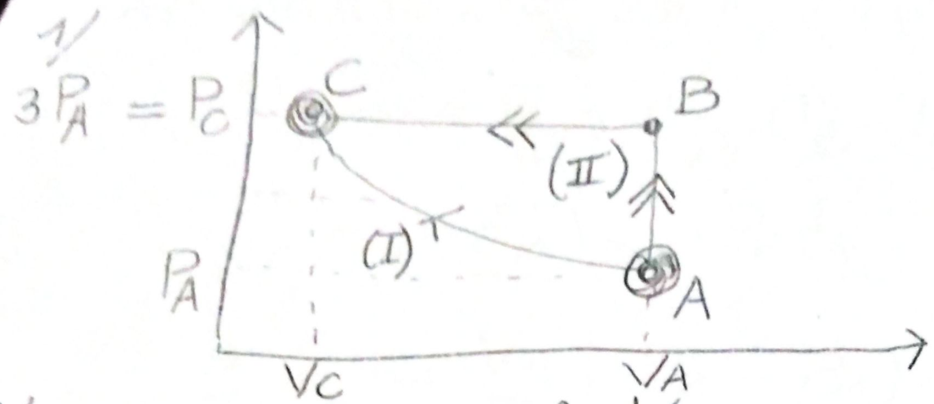
- 1ère loi de Joule : $\Delta U = m\, c_v\, \Delta T$
  $= m \cdot \dfrac{R}{M} \cdot \dfrac{1}{\gamma - 1} \Delta T$
  $= \dfrac{nR}{\gamma - 1} \Delta T$

$\Rightarrow \Delta T = \dfrac{(\gamma - 1)\,\Delta U}{nR} \Rightarrow \Delta T = T_2 - T_1$
$\simeq 133\,K$

- 2ème loi de Joule : $\Delta H = m\, c_p \cdot \Delta T$
  $= m \cdot \dfrac{R}{M} \cdot \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \Delta T$
  $= nR \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} \Delta T$
  $\simeq 1936\,J$

xercice 5 :

1/



2/ Chemin (I) adiabatique :

$$P_C V_C^{\gamma} = P_A V_A^{\gamma} \quad \text{avec } P_C = 3P_A$$

$$\Rightarrow V_C = V_A \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \simeq 0,46\,L$$

3/ • $$W_I = \frac{P_C V_C - P_A V_A}{\gamma - 1} = 95\,J$$

$$W_{II} = W_{AB} + W_{BC}$$

$$= 0 - 3P_A (V_C - V_A)$$

$$= 162\,J$$

$$W_I \neq W_{II}$$

• $Q_I = 0$ (chemin (I) adiabatique)

$$Q_{II} = Q_{AB} + Q_{BC}$$

AB isochore : $Q_{AB} = m\, c_V\, (T_B - T_A)$

$$= m \frac{R}{M} \cdot \frac{1}{\gamma - 1} (T_B - T_A)$$

$$= \frac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma - 1}$$

$$= \frac{V_A (P_B - P_A)}{\gamma - 1}$$

$$= 500 \text{ J}$$

BC isobare : $Q_{BC} = m\, c_p\, (T_C - T_B)$

$$= m \cdot \frac{R}{M} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_C - T_B)$$

$$= \frac{P_C V_C - P_B V_B}{\gamma - 1} \cdot \gamma$$

$$= \frac{P_C (V_C - V_A)}{\gamma - 1} \cdot \gamma$$

$$= -567 \text{ J}$$

$$\Rightarrow Q_{II} = Q_{AB} + Q_{BC} = -67 \text{ J}$$

$$Q_I \neq Q_{II}$$

4/ $(\Delta U)_I = Q_I + W_I = W_I = 95\,J$

$(\Delta U)_{II} = Q_{II} + W_{II}$

$= -67 + 162\,J$

$= 95\,J$

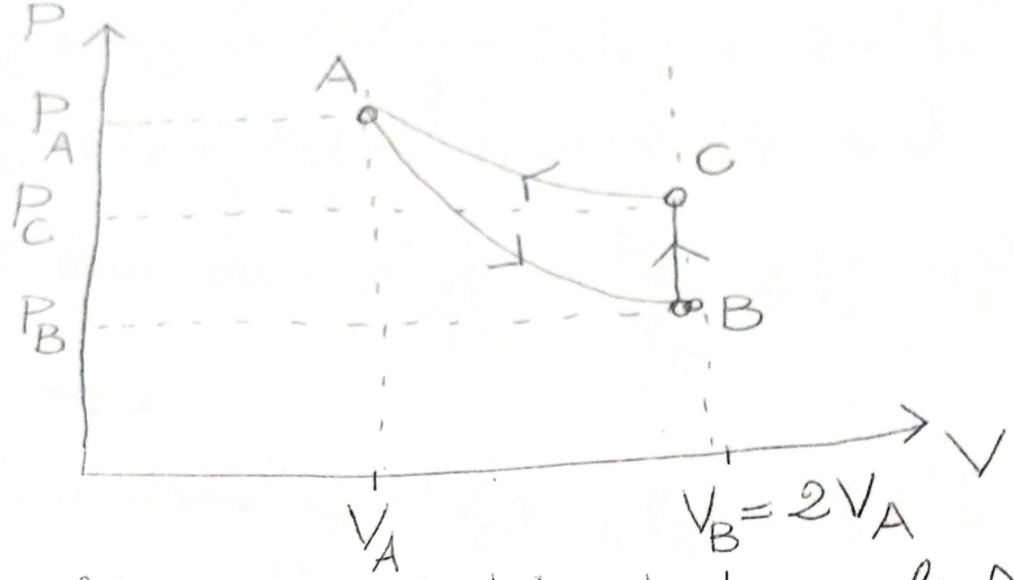
$(\Delta U)_I = (\Delta U)_{II}$

La variation de l'énergie interne ne dépend pas du chemin,

$\Rightarrow$ U est une fonction d'état, et dU est une différentielle totale exacte.

Exercice 6 :

1/



Le cycle ABCA est décrit dans le sens trigonométrique.

2/ Etat B :

$V_B = 2V_A = 20\,L = 20 \cdot 10^{-3}\, m^3$

AB adiabatique : $P_B V_B^{\gamma} = P_A V_A^{\gamma}$

$\Rightarrow P_B = P_A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma} \simeq 0{,}32\, atm$

$= 0{,}32 \cdot 10^5\, Pa$

AB adiabatique : $T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$

$\Rightarrow T_B = T_A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1} \simeq 189\, K$

Etat C :

$V_C = V_B = 2V_A = 20L = 20 \cdot 10^{-3}\, m^3$

$T_C = T_A = 300K$ (CA isotherme)

BC isochore $\Rightarrow \dfrac{P_C}{T_C} = \dfrac{P_B}{T_B} \Rightarrow P_C = P_B \cdot \dfrac{T_C}{T_B}$

ou encore :

CA isotherme $\Rightarrow P_C V_C = P_A V_A \Rightarrow P_C = P_A \cdot \dfrac{V_A}{2V_A}$

$\Rightarrow P_C = \dfrac{P_A}{2} = 0{,}5\, atm = 0{,}5 \cdot 10^5\, Pa$

3/ Transformation AB :

$W_{AB} = \dfrac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma - 1} = -540\, J$

$Q_{AB} = 0$ (AB adiabatique)

Transformation BC

$W_{BC} = 0$ (BC isochore)

$Q_{BC} = m\, c_V\, (T_C - T_B)$

$= m \cdot \dfrac{R}{M} \cdot \dfrac{1}{\gamma - 1} (T_A - T_B)$

$= \dfrac{P_A V_A - P_B V_B}{\gamma - 1} = -W_{AB} = 540\, J$

Transformation CA :

$W_{CA} = -P_A V_A \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right)$

$= -P_A V_A \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 693\,J$

$Q_{CA} = -W_{CA} = -693\,J$ (CA isotherme)

4/ 1er principe : $\Delta U = W + Q$

$(\Delta U)_{AB} = W_{AB} = -540\,J$

$(\Delta U)_{BC} = Q_{BC} = 540\,J$

$(\Delta U)_{CA} = W_{CA} + Q_{CA} = 0$

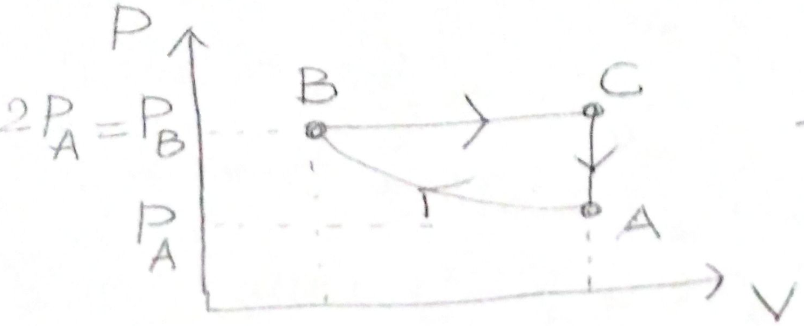
Pour le cycle :

$(\Delta U)_{cycle} = (\Delta U)_{AB} + (\Delta U)_{BC} + (\Delta U)_{CA}$

$= W_{AB} + Q_{BC} = 0$

Exercice 7 :

1/



$T_A = 283\,K$

Le cycle A B C A est décrit dans le sens horaire (sens contraire au sens trigonométrique).

2/ A l'état A :

$P_A V_A = \frac{m}{M} R T_A \Rightarrow m = M \cdot \frac{P_A V_A}{R T_A} \simeq 0{,}76\,g$

AB adiabatique $\Rightarrow T_B^{\gamma} P_B^{1-\gamma} = T_A^{\gamma} P_A^{1-\gamma}$

avec $P_B = 2P_A$

$\Rightarrow T_B = T_A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 345\,K$

ou encore : $T_B V_B^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \Rightarrow T_B = T_A \cdot \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma}$

ou encore : Etat B $\Rightarrow T_B = \frac{M}{m} \cdot \frac{P_B V_B}{R}$

CA isochore $\Rightarrow \frac{T_C}{P_C} = \frac{T_A}{P_A}$

$\Rightarrow T_C = T_A \cdot \frac{P_C}{P_A}$ avec $P_C = 2P_A$

$= 566\,K$

ou encore : BC isobare $\Rightarrow \frac{T_C}{V_C} = \frac{T_B}{V_B}$

$$\Rightarrow T_C = T_B \cdot \frac{V_C}{V_B}$$

ou encore : Etat C $\Rightarrow T_C = \frac{M}{m} \cdot \frac{P_C V_C}{R}$

avec $P_C = P_B = 2P_A$ et $V_C = V_A$

3/ $Q_{AB} = 0$ (AB adiabatique)

$$Q_{BC} = m\,c_p\,(T_C - T_B)$$

$$= m \cdot \frac{R}{M} \cdot \frac{\gamma}{\gamma-1}(T_C - T_B)$$

$$\simeq 272\,J$$

$$Q_{CA} = m\,c_v\,(T_A - T_C)$$

$$= m \cdot \frac{R}{M} \cdot \frac{1}{\gamma-1}(T_A - T_C)$$

$$\simeq -249\,J$$

4/ $W_{AB} = (\Delta U)_{AB} = m\,c_v\,(T_B - T_A)$

$$= m \cdot \frac{R}{M} \cdot \frac{1}{\gamma-1}(T_B - T_A)$$

$$= \frac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma - 1}$$

$$\simeq 55\,J$$

$$W_{BC} = -P_B (V_C - V_B)$$
$$= -2P_A (V_A - V_B)$$
$$\simeq -78\,J$$

$$W_{CA} = 0 \quad (CA \text{ isochore})$$

5/ Pour le cycle :

$$(\Delta U)_{cycle} = Q_{cycle} + W_{cycle}$$
$$= Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} + W_{AB} + W_{BC} + W_{C}$$
$$= 0 + 272 - 249 + 55 - 78 +$$
$$= 0$$