MECANIQUE DU POINT MATERIEL

- **CHAPITRE 1**
- Système de coordonnées.
- Cinématique du point matériel (avec et sans changement de référentiel).
- **CHAPITRE 2**
- Loi fondamentale et théorèmes généraux de la dynamique du point matériel.
- **CHAPITRE 3**
- Travail et énergie.
- **CHAPITRE 4**
- Les mouvements à force centrale.

RAPPELS

I] PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS:

Définition:

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

tels que: $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$; $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le scalaire:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}).(v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Ou bien:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos(\text{angle}(\vec{u},\vec{v}))$$

II] PRODUIT VECTORIEL DE DEUX VECTEURS:

1) Définition:

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que:

- Sa direction est perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
- Son module vaut: $\left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right| = \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\sin(\text{angle}(\vec{u},\vec{v}))$ = aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2) **Propriétés.**

- Le produit vectoriel de deux vecteurs est anticommutatif:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

- Le produit vectoriel de deux vecteurs est distributif par rapport à l'addition:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

- Dans le cas où $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} // \vec{v}$.

** Une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est directe si:

$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ et $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

III] PRODUIT MIXTE :

On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ exprimés dans

la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tels que:

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \quad ; \quad \vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \quad ;$$

$$\vec{w} = w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k}$$

Le produit mixte de ces trois vecteurs s'écrit:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ = volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs.

- Le produit mixte est antisymétrique: la permutation de deux des vecteurs change son signe.

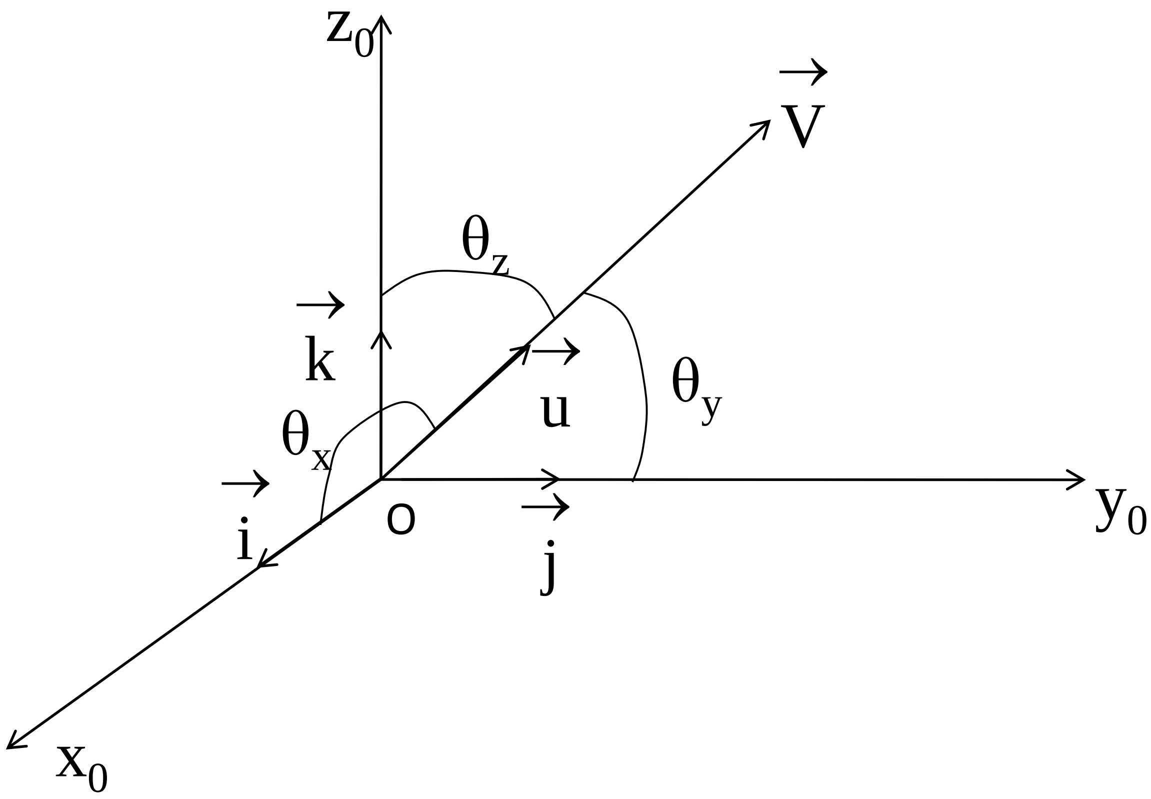
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -\vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{w})$$

- Le produit mixte est invariant par permutation circulaire:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u})$$

IV) Cosinus directeurs d'un vecteur

Les cosinus directeurs d'un vecteur sont les cosinus des angles que fait ce vecteur avec chacun des axes d'un repère.



Soient $\vec{V} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}$; $\left|\vec{V}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

et $\vec{u} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$; $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$

$$\vec{u}\,.\,\vec{i} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{i}\right|\cos\theta_x = (\alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}).\,\vec{i} = \alpha$$

$$\vec{u}\,.\,\vec{j} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{j}\right|\cos\theta_y = (\alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}).\,\vec{j} = \beta \quad \Rightarrow \quad \vec{u}\begin{pmatrix} \alpha = \cos\theta_x \\ \beta = \cos\theta_y \\ \gamma = \cos\theta_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\,.\,\vec{k} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{k}\right|\cos\theta_z = (\alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}).\,\vec{k} = \gamma$$

Les cosinus directeurs de $\vec{V}$ sont les coordonnées de $\vec{u}$.

V) CHAMP SCALAIRE:

Le champ scalaire est une application de IR^3 dans IR :

$$\begin{array}{ccc} IR^3 & \xrightarrow{f} & IR \\ (x, y, z) & & f(x, y, z) \end{array}$$

Calculer la dérivée partielle de f(x,y,z) par rapport à un paramètre c’est calculer la dérivée de cette fonction par rapport à ce paramètre en supposant les autres constants.

Exemple:

$$f(x,y,z) = 2x^2yz + y^2z^3 + xz^2$$

Les dérivées partielles de f(x,y,z) par rapport à x, y et z respectivement sont:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 4xyz + z^2$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 2x^2z + 2yz^3$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2x^2y + 3y^2z^2 + 2xz$$

VI) GRADIENT D'UN CHAMP SCALAIRE

Soit le vecteur $\vec{\nabla}$ appelé *« nabla »* défini par:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}} \quad ; \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

C'est un vecteur.

VII) ROTATIONNEL D'UN CHAMP DE VECTEURS.

Soit $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ -(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}) \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}_{\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}}$$

c'est un vecteur.

VIII) DIVERGENCE D'UN CHAMP DE VECTEURS.

$$\text{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\,.\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}} \quad . \quad \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}_{\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}}$$

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

C'est un scalaire.