

SMP5
MECANIQUE ANALYTIQUE
CHAPITRE I

RAPPELS
PARAMETRAGE ET LIAISONS.



On appelle système un ensemble de solides . Le système peut être déformable

***/ Les théorèmes généraux:**

- s'appliquent à chaque solide constituant le système étudié
- fournissent les équations permettant de calculer toutes les inconnues du problème (forces et paramètres)

***/ La méthode des équations de Lagrange:**

- s'applique une seule fois au système étudié
- permet, dans certaines conditions, de ne pas calculer certaines forces inconnues



I - .PARAMETRAGE:

Le mouvement d'un solide (S) par rapport à R est décrit par son torseur cinématique $[\vec{\Omega}(S/R), \vec{V}(P \in S/R)]$

tel que : $\forall P \in (S) \text{ et } \forall Q \in (S) : \vec{V}(P/R) = \vec{V}(Q/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge Q\vec{P}$

En tout point $P \in (S)$, ce torseur se décompose de manière unique en un couple et un glisseur

$$[\vec{\Omega}(S/R), \vec{V}(P \in S/R)] = [\vec{0}, \vec{V}(P \in S/R)] + [\vec{\Omega}(S/R), \vec{0}]$$

Le couple $[\vec{0}, \vec{V}(P \in S/R)]$ représente une translation de vecteur $\vec{V}(P \in S/R)$

Le glisseur $[\vec{\Omega}(S/R), \vec{0}]$ représente une rotation centrale autour de P

Donc tout mouvement de solide peut être décomposé en une translation de l'un de ses points et d'une rotation autour de ce point choisi.

Pour caractériser la translation on se donne les coordonnées (cartésiennes, cylindriques ou sphériques) du point P choisi

La rotation centrale autour de P se décompose en 3 rotations élémentaires autour d'axes passant par P et d'angles ψ, θ et φ

On a donc besoin de 6 paramètres pour le solide (S).

*/Remarque :

- On choisira par la suite, un point fixe O de (S) s'il existe; on travaillera avec le centre d'inertie G, le cas échéant.

Un système(Σ) constitué de n solides et m particules a $6n + 3m = N$ paramètres ; soient $\varsigma_1, \dots, \varsigma_N$

Ces N paramètres sont appelés paramètres primitifs de (Σ).



* / Exemple de décomposition du mouvement :

Soit $P\vec{z}$ l'axe autour duquel s'effectue la rotation propre φ de (S), on considère la décomposition suivante :

$$R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \text{ fixe} \xrightarrow{\text{translation}} R^*(P; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\psi, P\vec{z}_0} R_1(P; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0) \xrightarrow{\theta, P\vec{u}} R_2(P; \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}) \xrightarrow{\varphi, P\vec{z}} R(P; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ lié à (S)}$$

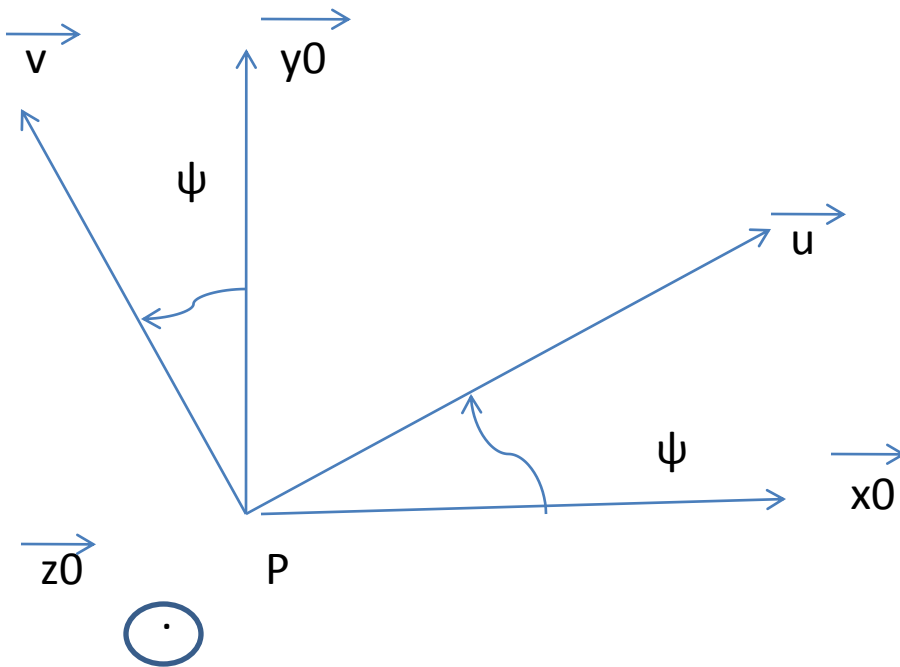
où $-P\vec{v}$ est la projection de l'axe $P\vec{z}$ sur le plan horizontal $(P; \vec{x}_0, \vec{y}_0)$; $\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{z}_0$ et $\vec{w} = \vec{z} \wedge \vec{u}$

Les angles ψ et θ repère, à chaque instant, la position de l'axe $P\vec{z}$ dans l'espace; en effet :

Le plan $(P; \vec{v}, \vec{z}_0)$ contient à chaque instant l'axe $P\vec{z}$ et est repéré par l'angle ψ

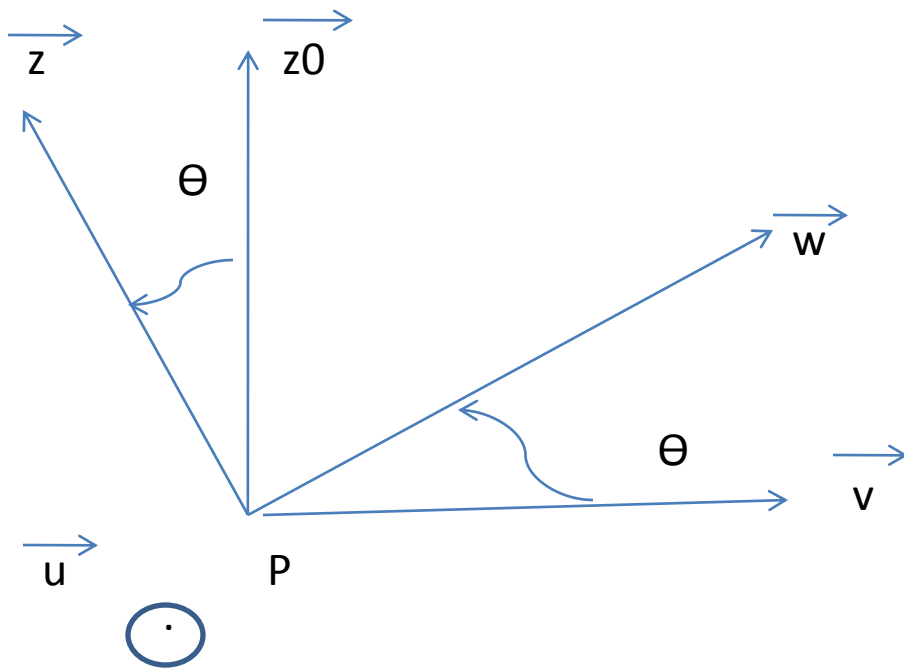
La position de l'axe $P\vec{z}$ dans ce plan est donnée par l'angle θ





Ψ repère à chaque instant la position du plan $(P; \vec{v}, \vec{z}_0)$ contenant l'axe $P \vec{z}_0$ autour duquel se fait la rotation propre.

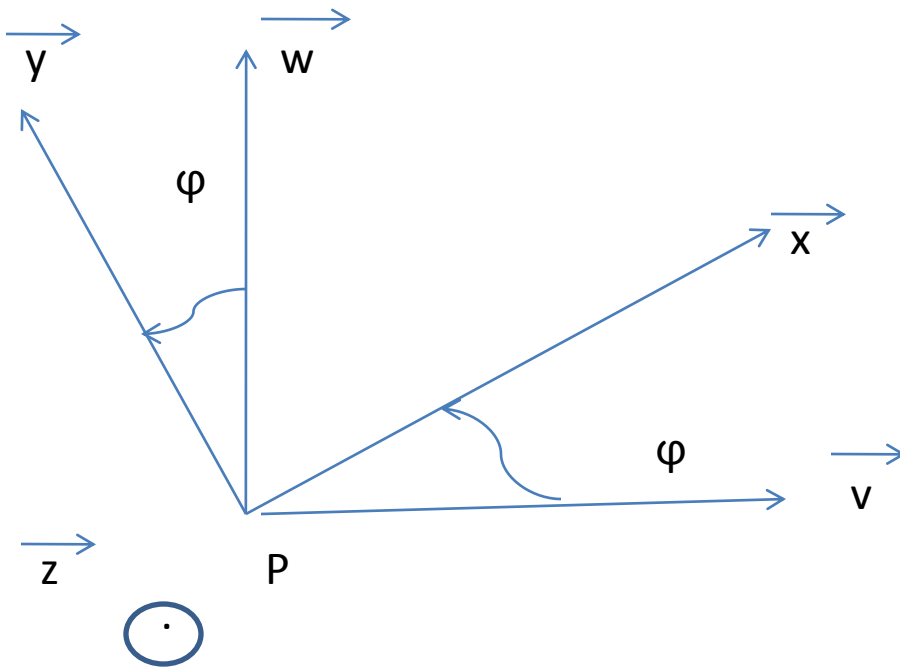




NUTATION

θ repère à chaque instant la position de l'axe $P \vec{z}$ dans le plan $(P; \vec{v}, \vec{z_0})$





ROTATION PROPRE



II - LES LIAISONS.

Une liaison est une restriction imposée au mouvement d'un système.

Les liaisons peuvent être :

- géométriques : limitations des zones de l'espace permises pour le système : point fixe, mouvement plan, mouvement rectiligne, contact permanent.....
- cinématiques : limitations sur les champs de vitesses : non glissement, non roulement, non pivotement.....
- dynamiques : le non frottement par exemple

La description complète d'une liaison nécessite non seulement l'établissement des équations ou inéquations qui la traduisent (effet) mais aussi la détermination des efforts de liaison inconnus qui la réalisent (cause).

Une liaison est dite bilatérale lorsqu'elle est traduite par des équations uniquement. Elle est dite unilatérale lorsqu'interviennent des inéquations dans sa traduction. On se limitera, par la suite, aux seules liaisons bilatérales.



/ Cas du contact.

On supposera, dans ce qui suit, que lorsque 2 solides (S_1) et (S_2) sont en contact permanent, ce contact est ponctuel en I et qu'à chaque instant, ces 2 solides admettent en ce point géométrique un plan tangent commun (π).

En I, les réactions sont $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$ telles que $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} + \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}$ puisque le contact est permanent

avec $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = - \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$

où $\vec{R}_n \perp (\pi)$ réaction normale et $\vec{R}_t \in (\pi)$ réaction tangentielle ou force de frottement.

Lois de Coulomb

Il existe un coefficient f , dit coefficient de frottement, dont la valeur dépend de la nature des surfaces en contact, tel que :

→ s'il y a frottement ($f \neq 0$)

* si $\vec{V}(I \in S_1/S_2) \neq \vec{0}$ glissement de (S_1) par rapport à (S_2) alors $\|\vec{R}_t\| = f \|\vec{R}_n\|$

$\vec{R}_t$ parallèle et de sens contraire à $\vec{V}(I \in S_1/S_2)$

* si $\vec{V}(I \in S_1/S_2) = \vec{0}$ pas de glissement de (S_1) par rapport à (S_2) alors $\|\vec{R}_t\| < f \|\vec{R}_n\|$

→ s'il n'y a pas de frottement ($f = 0$) et $\vec{R}_t = \vec{0}$



Un système(Σ) constitué de n solides et m particules a $6n + 3m = N$ paramètres; soient $\varsigma_1, \dots, \varsigma_N$
Ces N paramètres sont appelés paramètres primitifs de (Σ).

* / Une liaison est dite holonome si les équations qui la traduisent ne font intervenir que les valeurs finies de paramètres et éventuellement le temps. Elles ne font pas intervenir les dérivés des paramètres et sont de la forme :

$$f(\varsigma_1, \dots, \varsigma_N, t) = 0$$

La liaison est dite non holonome si les équations qui la traduisent font intervenir les dérivés des paramètres. On se limitera aux liaisons dont les équations sont de la forme :

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i(\varsigma_1, \dots, \varsigma_N, t) \dot{\varsigma}_i + \beta(\varsigma_1, \dots, \varsigma_N, t) = 0$$

* / Une liaison holonome est dite indépendante du temps si les équations qui la traduisent ne dépendent pas explicitement de t : $\frac{\partial f(\varsigma_1, \dots, \varsigma_N)}{\partial t} = 0$

Une liaison non holonome est dite indépendante du temps si : $\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = 0$ et $\beta = 0$

* / Une liaison est dite principale si elle est prise en compte dès le début de la résolution. Si toutes les liaisons sont principales, le paramétrage est dit complet.

Une liaison non principale est une liaison complémentaire; elle est ignorée durant toute la résolution; ce n'est qu'après avoir établi le système des équations de Lagrange qu'elles interviennent éventuellement pour le compléter.

La prise en compte des liaisons holonomes principales permet de réduire le nombre des paramètres et de définir de nouveaux paramètres indépendants notés $q_1, q_2, \dots, q_n$ appelés paramètres principaux.

Toute grandeur sera dite compatible avec les liaisons principales ayant permis de la calculer.



III - Energie cinétique.

* / Définition :

L'énergie cinétique du solide (S) de masse m et de centre d'inertie G par rapport au repère R est le scalaire $T(S/R)$ défini par :

$$T(S/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in (S)} V^2(P/R) dm$$

– $\forall (S), \forall R : T(S/R) \geq 0$

– $2T(S/R)$ est appelée force vive de (S) par rapport à R.

* / Expression de $T(S/R)$.

soit $A \in (S) :$ $\vec{V}(P/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge A\vec{P}$

$$\text{donc : } 2 T(S/R) = \int_{P \in (S)} \vec{V}(P/R) \cdot \vec{V}(A/R) dm + \int_{P \in (S)} \vec{V}(P/R) \cdot [\vec{\Omega}(S/R) \wedge A\vec{P}] dm$$

$\vec{V}(A/R)$ et $\vec{\Omega}(S/R)$ restent constants lorsque P parcourt (S) et invariance du produit mixte par permutation circulaire

$$[\vec{V}(P/R), \vec{\Omega}(S/R), A\vec{P}] = [A\vec{P}, \vec{V}(P/R), \vec{\Omega}(S/R)] = [\vec{\Omega}(S/R), A\vec{P}, \vec{V}(P/R)]$$

$$2 T(S/R) = \vec{V}(A/R) \cdot \int_{P \in (S)} \vec{V}(P/R) dm + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \int_{P \in (S)} A\vec{P} \wedge \vec{V}(P/R) dm$$

comme $\int_{P \in (S)} \vec{V}(P/R) dm = m \vec{V}(G/R)$ et que le moment cinétique en A de (S) par rapport à R est :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in (S)} A\vec{P} \wedge \vec{V}(P/R) dm = m A\vec{G} \wedge \vec{V}(A/R) + I_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

où $I_A(S)$ est la matrice d'inertie en A de (S) ; on a finalement :

$$\forall A \in (S) \quad 2 T(S/R) = m \vec{V}(G/R) \cdot \vec{V}(A/R) + m \vec{\Omega}(S/R) [A\vec{G} \wedge \vec{V}(A/R)] + \vec{\Omega}(S/R) \cdot [I_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R)]$$



* / Cas particuliers :

→ si $\exists A \equiv O$ de (S) fixe par rapport à R : $\vec{V}(O/R) = \vec{0}$ et

$$T(S/R) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R) \cdot [\Pi_O(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R)] \quad \text{énergie cinétique de rotation autour de O}$$

→ si $A \equiv G$ on obtient le théorème de Koenig : $A\vec{G} = \vec{0}$

$$T(S/R) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(G/R) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R) \cdot [\Pi_G(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R)]$$

énergie cinétique de translation de G + énergie cinétique de rotation autour de G

* / 2^{ème} Théorème de Koenig (généralisation du théorème de Huygens) :

$$\forall A \in \mathbb{R}^3 : \Pi_A(S) = \Pi_G(S) + \Pi_A(G, m)$$

$\Pi_A(G, m)$ est la matrice d'inertie en A de la particule G où on suppose que toute la masse m est concentrée.

si la matrice centrale d'inertie $\Pi_G(S)$ est exprimée dans une base β

$$\text{et } A\vec{G} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \gamma \\ \delta \end{vmatrix}_{\beta} \quad \text{alors :} \quad \Pi_A(G, m) = \begin{bmatrix} m(\gamma^2 + \delta^2) & -m\alpha\gamma & -m\alpha\delta \\ -m\alpha\gamma & m(\alpha^2 + \delta^2) & -m\gamma\delta \\ -m\alpha\delta & -m\gamma\delta & m(\gamma^2 + \alpha^2) \end{bmatrix}_{\beta}$$

* / Additivité :

$$\text{si } (\Sigma) = \bigcup_{j=1}^{j_{\max}} (S_j) \quad \text{alors} \quad T(\Sigma / R) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} T(S_j / R)$$



***/ EXEMPLE :**

Par rapport à $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ orthonormé, direct et fixe, on considère un disque (D) homogène, de centre G, de masse m et de rayon R, en mouvement dans le plan vertical fixe $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, en contact ponctuel permanent en I avec l'axe matériel horizontal $(O; \vec{x}_0)$ sur lequel il roule sans glisser.

On a 6 paramètres primitifs : 3 coordonnées (x, y, z) de G et 3 angles d'Euler ψ, θ et φ .

Les liaisons sont :

- 1 - mouvement plan et contact : $z = 0; \psi = \text{cste}, \theta = \text{cste}$ et $y = R$ bilatérale, holonome et indépendante de t
L'axe du disque est $G\vec{z}_0$ est fixe dans le repère barycentrique R_{bary} donc pas de précession ni de nutation.

- 2 - roulement sans glissement $\dot{x} + R \dot{\varphi} = 0$ semi-holonome puisque intégrable $\Rightarrow x + R \varphi = \text{cste} = x_0 + R \varphi_0$
bilatérale, holonome et indépendante de t

$$R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\text{trans } O\vec{G}} R_{\text{bary}}(G; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\varphi, G\vec{z}} R_D(G; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0) \text{ lié à (D)}$$

→ Si 1 est principale (2 complémentaire)

il ne reste que 2 paramètres principaux x et φ

l'énergie cinétique de (D) par rapport à R_0 compatible avec la liaison 1 est

$$T_1(D/R_0) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \dot{\varphi}^2$$

→ Si 1 et 2 sont principales

il ne reste qu'un seul paramètre principal : x ou φ , $\varphi = \frac{\text{cste} - x}{R}$ et $\dot{\varphi} = -\frac{\dot{x}}{R}$

l'énergie cinétique de (D) par rapport à R_0 compatible avec les liaisons 1 et 2 est

$$T_{1,2}(D/R_0) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}^2$$

