SMP5
MECANIQUE ANALYTIQUE
CHAPITRE II

VITESSES REELLES - VITESSES VIRTUELLES.

I-Champ des vitesses réelles.

Soit un système (∑) ayant n paramètres qi principaux par rapport à R. Pour toute particule P de (∑) on définit le vecteur position par la donnée du champ:

$$\forall P \in (\sum) \rightarrow \vec{OP} = \vec{OP}(q_1, q_2 \ldots\ldots\ldots, q_n, t)$$

IL s agit d'une fonction de (n+1) variables indépendantes qi et t supposée de classe C2 au moins.

Le champ des vitesses réelles par rapport à R est défini par:

$$\vec{V}(P/R) = \frac{d}{dt}\vec{OP}/R = \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial t} + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t}$$

soit

$$\vec{V}(P/R) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t}$$

IL s agit d'une fonction de (2 n+1) variables indépendantes qi ,leurs dérivées et t supposée de classe C1 au moins.

Propriété 1: $$\frac{\partial \vec{V}(P/R)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \qquad \forall\, i = 1,\ldots\ldots, n$$

Propriété 2: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \vec{V}(P/R)}{\partial q_i} \qquad \forall\, i = 1,\ldots\ldots, n$$

En effet; pour chaque i:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \left(\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\right)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \left(\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\right)}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} \right] = \frac{\partial \vec{V}(P/R)}{\partial q_i} \qquad \forall\, i = 1,\ldots\ldots, n$$

car $\vec{OP}(q_i, t)$ étant de classe C^2 l'ordre de dérivation n'affecte pas le résultat.

<u>Remarque:</u> Si toutes les liaisons principales sont indépendantes du temps alors:

$$\forall\, P \in (\Sigma) \qquad \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} = \vec{O}$$

II-Energie cinétique et paramètres principaux.

L énergie cinétique du système$(\sum)$ par rapport à R est donnée par :

$$T(\sum / R) = \frac{1}{2} \int_{P\in\sum} V^2 (P / R)\, \mathrm{dm} \qquad \text{où} \int_{P\in\sum} = \sum_{j=1}^{jmax} \int_{P\in S_j}$$

$$T(\sum / R) = \frac{1}{2} \int_{P\in\sum} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} \right] \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} \right] dm$$

$$= \frac{1}{2} \int_{P\in\sum} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right] \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] dm + \int_{P\in\sum} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right] \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} \right] dm + \frac{1}{2} \int_{P\in\sum} \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} \right]^2 dm$$

lorsque P parcourt $(\sum)$ les indices et les $\dot{q}_i$ ne sont pas affectés, donc :

$$T(\sum / R) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k\, \dot{q}_i \frac{1}{2} \int_{P\in\sum} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_k} dm + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \dot{q}_i \int_{P\in\sum} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} dm + \frac{1}{2} \int_{P\in\sum} \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} \right]^2 dm$$

En posant:

$$a_{ik} = \frac{1}{2}\int_{P\in\sum} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_k} dm \quad , \quad b_i = \int_{P\in\sum} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{OP}}{\partial t} dm \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{2}\int_{P\in\sum} (\frac{\partial \vec{OP}}{\partial t})^2 dm$$

On obtient:

$$T(\sum / R) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ik}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k + \sum_{i=1}^{n} b_i\,\dot{q}_i + c = T_2 + T_1 + T_0$$

$$\textit{où}\ T\textit{i}\ \text{ est l'ensemble des termes de degré i par rapport à } \dot{q}_i$$

<u>Remarque</u> : Si toutes les liaisons principales sont indépendantes du temps, alors:

$$T_0 = T_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad T(\sum / R) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ik}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k = T_2$$

$$\text{L énergie cinétique est une forme quadratique (homogène de degré 2) des } \dot{q}_i$$

Exemple2 : Pendule conique. Par rapport au repère orthonormé direct fixe $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ on considère une tige rectiligne homogène (OA), d'axe $O\vec{z}$, de longueur 2L de centre G et de masse m; soumise aux liaisons :

a/ O point fixe $x = y = z = 0$: liaison holonome indépendante de t

b/ précession uniforme $\dot{\psi} = \omega$ constante : liaison holonome dépendante de t

$$R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \text{ fixe } \xrightarrow{\psi,\, O\vec{z}_0} R_1(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0) \xrightarrow{\theta,\, O\vec{u}} R_2(O; \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}) \text{ lié à (OA)}$$

$\rightarrow$ a principale et b complémentaire $\Rightarrow$ 2 paramètres principaux ψ et θ

L'énergie cinétique $T_a(\sum/R_0)$ de (OA) compatible avec la liaison a, O point fixe, est donnée par :

$$T_a(\sum/R_0) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(OA/R_0)\left[II_0(OA)\ ..\vec{\Omega}(OA/R_0)\right]$$

$(O; \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ est un repère principal d'inertie de (OA), en utilisant le théorème de Koenig :

$$II_0(OA) = II_G(OA) + II_0(G,m) = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{R_2} + \begin{bmatrix} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{R_2} = \begin{bmatrix} \frac{4mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}(OA/R_0) = \dot{\psi}\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}\,\vec{u} \Rightarrow \vec{\Omega}(OA/R_0) = \dot{\psi}\cos\theta\,\vec{z} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + \dot{\theta}\,\vec{u} \text{ car } \vec{z}_0 = \cos\theta\,\vec{z} + \sin\theta\,\vec{w}$$

donc finalement :

$$T_a(\sum/R_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{4mL^2}{3}\right)\left(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2\right) = T_2$$

cette énergie cinétique est quadratique par rapport aux $\dot{q}_i$ car il n'y a pas de liaison principale dépendant de t.

$\rightarrow$ a et b principales $\Rightarrow$ 1 paramètre principal θ

L'énergie cinétique $T_{a,b}(\sum/R_0)$ de (OA) compatible avec les liaisons a et b est donnée par :

$$T_{a,b}(\sum/R_0) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(OA/R_0)\left[II_0(OA)\,..\vec{\Omega}(OA/R_0)\right]$$

$$\vec{\Omega}(OA/R_0) = \omega\cos\theta\,\vec{z} + \omega\sin\theta\,\vec{w} + \dot{\theta}\,\vec{u}$$

donc finalement :

$$T_{a,b}(\sum/R_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{4mL^2}{3}\right)\left(\omega^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2\right) = T_2 + T_0$$

cette énergie cinétique n'est plus quadratique par rapport aux $\dot{q}_i$ car la liaison principale b dépend du temps

Remarque1 :

$T_{a,b}(\sum/R_0)$ compatible avec les liaisons a et b peut être obtenue en tenant compte de la liaison b dans l'expression de $T_a(\sum/R_0)$

Remarque2 :

L'approximation "tige rectiligne" conduit à ne pas considérer la rotation propre φ de la tige car elle n'intervient pas dans le champ des vitesses; en effet :

$$\forall P \in \text{tige } \vec{OP} \,//\, \vec{z} \text{ et } \vec{V}(P/R_0) = \vec{\Omega}(OA/R_0)\wedge\vec{OP} = (\dot{\psi}\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{z})\wedge\vec{OP} = (\dot{\psi}\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}\,\vec{u})\wedge\vec{OP}$$

III-Champ de vitesses virtuelles:

A t fixé, on définit un CVV par: $\forall\, \mathrm{P} \in (\Sigma) \rightarrow \vec{\mathrm{V}}^*(P)$ arbitraire

Pb: La donnée d'un champ totalement arbitraire risque de ne pas respecter
la rigidité des différents constituants solides de (Σ)

*/ Définition : on définit un CVV par: A t fixé

$$\forall\, \mathrm{P} \in (\Sigma) \rightarrow \vec{\mathrm{V}}^*(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, \vec{\mathrm{OP}}}{\partial\, \mathrm{q_i}}\, \mathrm{q^*{}_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P/R})}{\partial\, \dot{\mathrm{q}}_\mathrm{i}}\, \mathrm{q^*{}_i}$$ où les $\mathrm{q^*{}_i}$ sont des scalaires arbitraires.

*/ Il s'agit d'un champ de moments de torseurs; en effet :

$\forall\, (\mathrm{S_j}) \subset (\Sigma)$ et $\forall\, \mathrm{P, Q} \in (\mathrm{S_j})$ $\quad \vec{\mathrm{PQ}}^2 = \mathrm{cste}$

On dérive par rapport à $\mathrm{q_i}$ $\quad \vec{\mathrm{PQ}}.\left[\frac{\partial\, \vec{\mathrm{PQ}}}{\partial\, \mathrm{q_i}}\right] = \vec{\mathrm{PQ}}.\left[\frac{\partial\, \vec{\mathrm{OQ}}}{\partial\, \mathrm{q_i}} - \frac{\partial\, \vec{\mathrm{OP}}}{\partial\, \mathrm{q_i}}\right] = 0$ et ce $\forall\, \mathrm{P, Q} \in (\mathrm{S_j})$

$\forall\, \mathrm{i} = 1 \ldots \mathrm{n}$ le champ $\forall\, \mathrm{P} \in (S_j) \rightarrow \dfrac{\partial\, \vec{\mathrm{OP}}}{\partial\, \mathrm{q_i}}$ est équiprojectif c'est donc un champ de moments de torseur

Le champ $\forall P \in (\Sigma) \rightarrow \vec{V}^*(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} q^*{}_i$ est une combinaison linéaire de champs de moments de torseur c'est donc un champ de moments de torseur

$\forall P, Q \in (S_j) \subset (\Sigma)$; $\exists\ \Omega^*(S_j)$ vecteur rotation instantanée virtuelle de (S_j) tel que

$$\vec{V}^*(P) = \vec{V}^*(Q) + \Omega^*(S_j) \wedge \vec{QP}$$

*/ Detemination de $\Omega^*(S_j)$

$\forall P, Q \in (S_j)$: $\quad \vec{V}(P/R) = \vec{V}(Q/R) + \vec{\Omega}(S_j/R) \wedge \vec{QP}$

on dérive par rapport à $\dot{q}_i$:

$$i = 1 \ldots n, \quad \frac{\partial \vec{V}(P/R)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{V}(Q/R)}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \vec{\Omega}(S_j/R)}{\partial \dot{q}_i} \wedge \vec{QP} \quad \text{puisque } \vec{QP} \text{ indépendant de } \dot{q}_i$$

En multipliant chaque équation par $q^*{}_i$ réel arbitraire et en sommant, il vient :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{V}(P/R)}{\partial \dot{q}_i} q^*{}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{V}(Q/R)}{\partial \dot{q}_i} q^*{}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{\Omega}(S_j/R)}{\partial \dot{q}_i} q^*{}_i \wedge \vec{QP}$$

Sur chaque solide (S_j) de $(\sum)$, on définit le torseur cinématique virtuel $\left[\ \vec{V}^*(P), \vec{\Omega}^*(S_j)\ \right]$ tel que :

$$\forall\, P, Q \in (S_j) \quad : \vec{V}^*(P) = \vec{V}^*(Q) + \Omega^*(S_j) \wedge \vec{QP} \qquad \text{avec} \quad \vec{\Omega}^*(S_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, \vec{\Omega}(S_j/R)}{\partial\, \dot{q}_i}\ q^*_i$$

En conclusion : à t fixé :

$$\vec{V}^*(P) = \left[\vec{V}(P/R) \ - \ \frac{\partial\, \vec{OP}}{\partial\, t} \right] q_i^* \rightarrow \dot{q}_i$$

Remarque :

Lorsque toutes les liaisons principales sont indépendantes du temps, le champ des vitesses réelles est un champ de vitesses virtuelles particulier pour lequel les scalaires q_i^* ont les valeurs des fonctions $\dot{q}_i$ à l'instant t considéré.

Exemple1 : Particule matérielle M de coordonnées (x, y, z) par rapport à R soumise aux liaisons :

a/ $x = y$ et b/ $z = 5t$

$\rightarrow$ a et b liaisons complémentaires $\Rightarrow$ 3 paramètres principaux : x, y et z

$$\vec{OM} = (x, y, z) \quad ; \quad \vec{V}(M/R) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \qquad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} = (1,0,0); \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y} = (0,1,0); \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = (0,0,1)$$

$$\vec{V}^*(M) = (x^*, y^*, z^*)$$

$\rightarrow$ a principale et b complémentaire $\Rightarrow$ 2 paramètres pricipaux x (ou y) et z

$$\vec{OM} = (x, x, z) \quad ; \quad \vec{V}(M/R) = (\dot{x}, \dot{x}, \dot{z}) \qquad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} = (1,1,0) ; \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = (0,0,1)$$

$$\vec{V}^*(M) = (x^*, x^*, z^*)$$

$\rightarrow$ a complémentaire et b principale $\Rightarrow$ 2 paramètres principaux x et y

$$\vec{OM} = (x, y, 5t) \quad ; \quad \vec{V}(M/R) = (\dot{x}, \dot{x}, 5) \qquad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} = (1,0,0) ; \quad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial z} = (0,1,0)$$

$$\vec{V}^*(M) = (x^*, y^*, 0)$$

$\rightarrow$ a et b principales $\Rightarrow$ 1 paramètre principal x (ou y)

$$\vec{OM} = (x, x, 5t) \quad ; \quad \vec{V}(M/R) = (\dot{x}, \dot{x}, 5) \qquad \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} = (1,1,0) ;$$

$$\vec{V}^*(M) = (x^*, x^*, 0)$$

Exemple2 : Pendule conique. Par rapport au repère orthonormé direct fixe $R_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ on considère une tige rectiligne homogène (OA), d'axe $O\vec{z}$, de longueur 2L de centre G et de masse m; soumise aux liaisons :

a/ O point fixe $x = y = z = 0$: liaison holonome indépendante de t

b/ précession uniforme $\dot{\psi} = \omega$ constante : liaison holonome dépendante de t

$$R_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)\ \text{fixe} \xrightarrow{\psi,\ O\vec{z}_0} R_1(O;\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0) \xrightarrow{\theta,\ O\vec{u}} R_2(O;\vec{u},\vec{w},\vec{z})\ \text{lié à (OA)}$$

$\rightarrow$ a principale et b complémentaire $\Rightarrow$ 2 paramètres principaux ψ et θ

$$\vec{\Omega}(OA/R_0) = \dot{\psi}\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}\,\vec{u} \Rightarrow \frac{\partial\vec{\Omega}(OA/R_0)}{\partial\dot{\psi}} = \vec{z}_0 \text{ et } \frac{\partial\vec{\Omega}(OA/R_0)}{\partial\dot{\theta}} = \vec{u} \Rightarrow \vec{\Omega}^*(OA) = \psi^*\,\vec{z}_0 + \theta^*\,\vec{u}$$

$$\vec{V}(G/R_0) = \vec{V}(O/R_0) + \vec{\Omega}(OA/R_0)\wedge\vec{OG} = (\dot{\psi}\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}\,\vec{u})\wedge L\vec{z} = L\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{u} - L\dot{\theta}\,\vec{w}$$

puisque : $\vec{z}_0 = \cos\theta\,\vec{z} + \sin\theta\,\vec{w}$

$$\frac{\partial\vec{OG}}{\partial\psi} = \frac{\partial\vec{V}(G/R)}{\partial\dot{\psi}} = L\sin\theta\,\vec{u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\vec{OG}}{\partial\theta} = \frac{\partial\vec{V}(G/R)}{\partial\dot{\theta}} = -L\,\vec{w}$$

donc : $\vec{V}^*(G) = L\psi^*\sin\theta\,\vec{u} - L\,\theta^*\vec{w}$

Remarque : on aurait pu utiliser : $\vec{V}^*(G) = \vec{V}^*(O) + \vec{\Omega}^*(OA)\wedge\vec{OG}$ avec $\vec{V}^*(O) = \vec{0}$

$\rightarrow$ a et b principales $\Rightarrow$ 1 paramètre principal θ

$$\vec{\Omega}(OA/\mathrm{R}_0) = \omega\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}\;\vec{\mathrm{u}} \;\Rightarrow\; \frac{\partial\,\vec{\Omega}(\mathrm{OA/R_0})}{\partial\,\dot{\theta}} = \vec{\mathrm{u}} \;\Rightarrow\; \vec{\Omega}^*(OA) = \theta^*\;\vec{\mathrm{u}}$$

$$\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{G/R}_0) = \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{O/R}_0) + \vec{\Omega}(OA/\mathrm{R}_0) \wedge \vec{\mathrm{OG}} = (\;\omega\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}\;\vec{\mathrm{u}}\;) \wedge \mathrm{L}\vec{z} = \mathrm{L}\,\omega\sin\theta\;\vec{\mathrm{u}}\; - L\,\dot{\theta}\,\vec{w}$$

puisque : $\vec{z}_0 = \cos\theta\,\vec{z} + \sin\theta\,\vec{w}$

$$\frac{\partial\,\vec{\mathrm{OG}}}{\partial\,\theta} = \frac{\partial\,\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{G/R})}{\partial\,\dot{\theta}} = -L\,\vec{w} \qquad \text{donc : } \vec{\mathrm{V}}^*(\mathrm{G}) = -L\,\theta^*\vec{w}$$

EN PRATIQUE: Pour construire un champ de vitesses virtuelles compatible avec certaines liaisons on construit d'abord le champ de vitesses réelles compatible avec ces liaisons puis on élimine dans ce champ les termes ne contenant pas les $\dot{\mathrm{q}}_{\mathrm{i}}$ et on remplace les $\dot{\mathrm{q}}_{\mathrm{i}}$ par les scalaires arbitraires $\mathrm{q}_{\mathrm{i}}^*$ correspondants.