SMP5
MECANIQUE ANALYTIQUE
CHAPITRE III

PUISSANCES REELLES-PUISSANCES VIRTUELLES.

Soit $(\sum)$ étudié par rapport à R(O) ayant n paramètres principaux $q_1, q_2 \ldots\ldots, q_n$

I-Puissance réelle.

I-1.Schématisation des efforts:

Les efforts s'exerçant sur $(\sum)$ par rapport à R(O) peuvent être schématisés par la donnée d'une densité massique (ou volumique) d efforts notée : $\vec{f}\,(P \in \sum / R)$

Ces efforts constituent un torseur sur $(\sum)$ de résultante:

$$\vec{R} = \int_{P \in \sum} \vec{f}\,(P \in \sum / R)\, dm$$

et de moment en $A \in IR^3$

$$\vec{M}_A = \int_{P \in \sum} \vec{AP} \wedge \vec{f}\,(P \in \sum / R)\, dm$$

tels que :

$$\forall\ A \text{ et } B \in IR^3 : \ \vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{R} \wedge \vec{BA}$$

Cas particuliers :

$\rightarrow$ Force $\vec{F}$ concentrée en A : $\vec{f}\,(P \in \sum / R) = \begin{cases} \vec{F} \text{ si } P \equiv A \\ \vec{0} \text{ sinon} \end{cases}$

$\rightarrow$ Couple $\vec{C} = C\,\vec{u}$ ($\vec{u}$ unitaire) $\vec{f}\,(P \in \sum / R) = \begin{cases} \vec{F} \text{ si } P \equiv A \\ -\vec{F} \text{ si } P \equiv B \\ \vec{0} \text{ sinon} \end{cases}$ tels que $C = F.AB$ et $\vec{F} \perp \vec{AB}$

I-2. PUISSANCE REELLE:

* / Définition :

La puissance réelle $P_{\bar{f}/R}$ par rapport à R des efforts représentés par la densité $\vec{f}\ (P \in \Sigma/R)$ est donnée par :

$$P_{\bar{f}/R} = \int_{P \in \Sigma} \vec{f}\ (P \in \Sigma/R) \,.\, \vec{V}\ (P/R)\, dm$$

* / Propriété:

en tenant compte de : $\vec{V}(P/R) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t}$ il vient :

$$P_{\bar{f}/R} = \int_{P \in \Sigma} \vec{f}\ (P \in \Sigma/R) \,.\, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t}\ dm$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \left[\int_{P \in \Sigma} \vec{f}\ (P \in \Sigma/R) \,.\, \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\ dm \right] + \int_{P \in \Sigma} \vec{f}\ (P \in \Sigma/R) \,.\, \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t}\ dm$$

donc $P_{\bar{f}/R} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i + Q_0$

où $Q_i = \left[\int_{P \in \Sigma} \vec{f}\ (P \in \Sigma/R) \,.\, \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\ dm \right]$ $i = 1, \ldots, n$ Les Q_i sont les composantes de force généralisées

et $Q_0 = \int_{P \in \Sigma} \vec{f}\ (P \in \Sigma/R) \,.\, \frac{\partial \vec{OP}}{\partial t}\ dm$

La puissance $P_{\bar{f}/R}$ est une forme linéaire non homogène des $\dot{q}_i$.

* /Remarque 1 : Si toutes les liaisons principales sont indépendantes de t alors $Q_0 = 0$.

* / Remarque 2 :

La puissance réelle $P_{\vec{f}\,sur\,\sum/R}$ par rapport à R des efforts s'exerçant sur $(\sum)$ représentés par la densité $\vec{f}$ $(P \in \sum/R)$:

$$P_{\vec{f}/sur\sum/R} = \int_{P\in\sum} \vec{f}\,(P \in \sum/R).\vec{V}\,(P/R)\,dm = \sum_{j=1}^{jmax} \int_{P\in S_j} \vec{f}\,(P \in S_j/R).\vec{V}\,(P/R)\,dm = \sum_{j=1}^{j\,max} P_{\vec{f}/sur\,S_j/R}$$

Sur chaque solide $(S_j) \subset (\sum)$, la puissance réelle $P_{\vec{f}/sur\,S_j/R}$ des efforts représentés par le torseur $\left[\vec{R}, \vec{M}_A\right]$ est donnée par :

$$\forall A \in (S_j) \qquad P_{\vec{f}/sur\,S_j/R} = \left[\vec{R}, \vec{M}_A\right]\left[\vec{\Omega}\ (S_j/R), \vec{V}\,(A/R)\right] = \vec{R}.\vec{V}\,(A/R) + \vec{M}_A.\vec{\Omega}\ (S_j/R)$$

Cette quantité est indépendante du point A choisi sur (S_j) pour la calculer; en effet :

$$\forall A, B \in (S_j) \quad P_{\vec{f}/sur\,S_j/R} = \vec{R}.\vec{V}\,(A/R) + \vec{M}_A.\vec{\Omega}\ (S_j/R)$$
$$= \vec{R}.\left[\vec{V}\,(B/R) + \vec{\Omega}\ (S_j/R) \wedge B\vec{A}\right] + \left[\vec{M}_B + \vec{R} \wedge B\vec{A}\right].\vec{\Omega}\ (S_j/R)$$
$$= \vec{R}.\vec{V}\,(B/R) + \vec{M}_B.\vec{\Omega}\ (S_j/R)$$

puisque: $\vec{R}.\left[\vec{\Omega}\ (S_j/R) \wedge B\vec{A}\right] + \left[\vec{R} \wedge B\vec{A}\right].\vec{\Omega}\ (S_j/R) = \vec{0}$

Cas particuliers :

$\rightarrow$ Force $\vec{F}$ concentrée en A : $P_{\vec{F}\,sur\,S_j/R} = \vec{F}.\vec{V}\,(A/R)$

$\rightarrow$ Couple $\vec{C}$: $P_{\vec{C}\,sur\,S_j/R} = \vec{C}.\vec{\Omega}\ (S_j/R)$

* / Exemple :

Soit $R_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé, direct, fixe où $O\vec{y}_0$ est la verticale ascendante.
On considère, dans le plan vertical $(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0)$, un disque homogène (D) de rayon R et de centre G.
(D), en contact ponctuel permanent en I avec l'axe $O\vec{x}_0$, roule et glisse sur cet axe
avec une rotation propre uniforme de vitesse angulaire ω.

Les paramètres primitifs de (D) sont : les coordonnées x, y et z de G et les angles d'Euler ψ, θ et φ de (D).
La réaction en I s'exerçant sur (D) est : $\vec{R}_I = R_t\ \vec{x}_0 + R_{n1}\ \vec{y}_0 + R_{n2}\ \vec{z}_0$
Sa puissance vaut : $P_{\vec{R}_I} = \vec{R}_I.\vec{V}(I\in D/R_0)$ où $\vec{V}(I\in D/R_0)$ est la vitesse de glissement de (D) par rapport à R_0
telle que : $\vec{V}(I\in D/R_0) = \vec{V}(G/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0)\wedge G\vec{I}$

Les liaisons sont :
a - mouvement plan ; $z=0$, $\psi = cste$ et $\theta = cste$ holonome, indépendante de t et et $R_{n2}=0$
b - contact : $y=R$ holonome, indépendante de t
c - rotation propre uniforme $\dot{\varphi}=\omega$ holonome, dépendante de t

$\rightarrow$ Si a et b principales et c complémentaire $\Rightarrow$ 2 paramètres principaux x et φ

$\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\varphi}\ \vec{z}_0$ et $\vec{V}(I\in D/R_0) = (\dot{x} + R\dot{\varphi})\ \vec{x}_0$

$P_{\vec{R}_I} = R_t(\dot{x} + R\dot{\varphi}) \quad \Rightarrow \quad Q_x = R_t\ ,\ Q_\varphi = R\,R_t$ et $Q_0 = 0$

$\rightarrow$ Si a, b et c principales $\Rightarrow$ 1 paramètre principal x :

$\vec{\Omega}(D/R_0) = \omega\ \vec{z}_0$ et $\vec{V}(I\in D/R_0) = (\dot{x} + R\,\omega)\ \vec{x}_0$

$P_{\vec{R}_I} = R_t(\dot{x} + R\,\omega) \quad \Rightarrow \quad Q_x = R_t$ et $Q_0 = R\ R_t\,\omega$

II-Puissance virtuelle:

* / Définition :

De manière analogue, on définit la puissance vituelle $P_{\vec{f}}^{*}$ des efforts représentés par la densité $\vec{f}\ (P \in \Sigma/R)$ par :

$$P_{\vec{f}}^{*} = \int_{P \in \Sigma} \vec{f}\ (P \in \Sigma/R) \,.\, \vec{V}^{*}\ (P)\, dm$$

* / Propriété:

en tenant compte de : $\vec{V}^{*}(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, \overrightarrow{OP}}{\partial\, q_i}\, q_i^{*}$ il vient :

$$P_{\vec{f}}^{*} = \int_{P \in \Sigma} \vec{f}\ (P \in \Sigma/R) \,.\, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, \overrightarrow{OP}}{\partial\, q_i}\, q_i^{*}\ dm \ = \ \sum_{i=1}^{n} q_i^{*} \left[\int_{P \in \Sigma} \vec{f}\ (P \in \Sigma/R) \,.\, \frac{\partial\, \overrightarrow{OP}}{\partial\, q_i}\ dm \right]$$

donc $P_{\vec{f}}^{*} = \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i^{*}$

Cette puissance est linéaire homogène par rapport aux q_i^{*}.

* / Liaisons parfaites :

Une liaison est dite parfaite (au sens de Gauss) si la puissance virtuelle des efforts de liaison qui la réalisent est nulle lorsque cette liaison est prise principale.

* / Exemple :

Dans l'exemple précédent du disque (D), la liaison rotation propreuniforme est imposée par un couple moteur $\vec{C} = C\,\vec{z}_0$

Si cette liaison est principale, alors : $\vec{\Omega}(D/R_0) = \omega\,\vec{z}_0 \ \Rightarrow \ \vec{\Omega}^{*}(D) = \vec{0}$ et $P_{\vec{C}}^{*} = \vec{C}.\vec{\Omega}^{*}(D) = 0$

Il s'agit d'une liaison parfaite.

Notons que sa puissance réelle est non nulle :

$P_{\vec{C}/R_0} = C\,\omega$ c'est l'énergie par unité de temps transférée par le moteur au disque pour maintenir la liaison.

*/Cas du contact ponctuel:

Soient (S_1) et (S_2) 2 solides de $(\sum)$ en contact permanent ponctuel en I admettant un plan tangent commun de contact (π)
Les efforts de liaison sont :

$\vec{F}_{S1\to S2}$ réaction de (S_1) sur (S_2) et $\vec{F}_{S2\to S1}$ réaction de (S_2) sur (S_1)

donc $P^*_{liaison} = \vec{F}_{S1\to S2}.\vec{V}^*(I\in S_2/R_0) + \vec{F}_{S2\to S1}.\vec{V}^*(I\in S_1/R_0)$

d'après le principe de l'action et de la réaction : $\vec{F}_{S1\to S2} + \vec{F}_{S2\to S1} = \vec{0}$ donc :

$$P^*_{liaison} = \vec{F}_{S2\to S1}.\left[\vec{V}^*(I\in S_1/R_0) - .\vec{V}^*(I\in S_2/R_0)\right] = \vec{F}_{S2\to S1}.\vec{V}^*{}_g(I\in S_1/S_2)$$

où $\vec{V}^*{}_g(I\in S_1/S_2)\in(\pi)$ est la vitesse virtuelle de glissement de (S_1) par rapport à (S_2).

Cette puissance virtuelle est nulle si :
$\to \vec{V}^*{}_g(I\in S_1/S_2) = \vec{0}$ non glissement de (S_1) par rapport à (S_2)
ou
$\to \vec{F}_{S2\to S1} \perp (\pi)$ contact sans frottement

Tout contact ponctuel se faisant sans glissement ou sans frottement est une liaison parfaite. La puissance virtuelle des efforts de liaison est nulle lorsque cette liaison est principale.

III-Energie potentielle.

* / Définition :

Des efforts représentés par la densité $\vec{f}(P \in \sum / R)$ dérivent d'une énergie potentielle si il existe une fonction $U_p(\sum / R) = U_p(q_1, q_2, ..., q_n, t)$ de classe C^1 telle que : $P_{\vec{f}(P \in \sum / R)} = - \frac{d U_p}{d t}$

comme $\frac{d U_p}{d t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U_p}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial U_p}{\partial t}$ et $P_{\vec{f}(P \in \sum / R)} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i + Q_0$

$U_p(\sum / R)$, lorsqu'elle existe, est donc solution du systèmedes $(n+1)$ équations :

$\frac{\partial U_p}{\partial q_i} = - Q_i$ $i = 1, ...n$ et $\frac{\partial U_p}{\partial t} = - Q_0$

$U_p(\sum / R)$ est l'énergie potentielle correspondant aux efforts représentés par la densité $\vec{f}(P \in \sum / R)$

Ces efforts sont alors dits conservatifs. $V(\sum / R) = - U_p(\sum / R)$ est appelée fonction de forces.

* / Additivité :

Si $(\sum) = \bigcup_{j=1}^{jmax} (S_j)$ alors $U_p(\sum / R) = \sum_{j=1}^{jmax} U_p(S_j / R)$

* / Energie potentielle de pesanteur :

Par rapport à R(O; $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) orthonormé, direct où O$\vec{z}$ est la verticale ascendante; on considère un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G dans le champ de pesanteur $\vec{f}(P \in \sum /R) = -\vec{g} = -g\,\vec{z}$

Les paramètres de (S) par rapport à R sont les coordonnées x, y, z de G et les angles d'Euler ψ, θ et φ

$\vec{OG} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z}$ et $\vec{V}(G/R) = \dot{x}\,\vec{x} + \dot{y}\,\vec{y} + \dot{z}\,\vec{z}$

$$P_{\vec{f}(S\in\sum/R)} = \int_{P\in S} -\vec{g}\,\vec{V}(P \in S/R)\,dm = -\vec{g}\int_{P\in S} \vec{V}(P \in S/R)\,dm = -m\,\vec{g}\,\vec{V}(G/R) \quad \text{donc}$$

$$P_{\vec{f}(S\in\sum/R)} = -m\,g\,\dot{z} = Q_x\,\dot{x} + Q_y\,\dot{y} + Q_z\,\dot{z} + Q_\psi\,\dot{\psi} + Q_\theta\,\dot{\theta} + Q_\varphi\,\dot{\varphi} + Q_0$$

avec, par identification : $Q_x = Q_y = Q_\psi = Q_\theta = Q_\varphi = Q_0 = 0$ et $Q_z = -m\,g$

$U_{pp}(S) = U_{pp}(x, y, z, \psi, \theta, \varphi, t)$ est donc solution de :

$$\frac{\partial U_p}{\partial x} = \frac{\partial U_p}{\partial y} = \frac{\partial U_p}{\partial \psi} = \frac{\partial U_p}{\partial \theta} = \frac{\partial U_p}{\partial \varphi} = \frac{\partial U_p}{\partial t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial U_p}{\partial z} = mg$$

$$U_{pp}(S) = m\,g\,z + cste = +m\,g\,\vec{OG}.\vec{z} + cste$$

remarque : Si la verticale est descendante alors : $U_{pp}(S) = -\,m\,g\,\vec{OG}.\vec{z} + cste$

*/Energie potentielle élastique:

Un ressort longitudinal, de masse négligeable, d'axe $O\vec{x}$ ($\vec{x}$ unitaire), de raideur K et de longueur au repos L,
dont une extrémité est fixée en O, exerce une force de rappel $\vec{F}$ en son autre extrémité M

$\vec{OM} = X\,\vec{x}$

$\vec{F} = -K\,(X - L)\,\vec{x} = -K\,x\,\vec{x}$ où $x = X - L$ allongement du ressort

comme $\vec{V}(M/R) = \dot{X}\,\vec{x} = \dot{x}\,\vec{x}$ la puissance réelle développée par cette force est :

$P_{\vec{F}/R} = \vec{F}.\vec{V}(M/R) = -K\,x\,\dot{x}$ donc $Q_x = -K\,x$ et l'énergie potentielle élastique correspondante est : $U_{Pe} = \frac{1}{2} K\,x^2$

Remarque1 :
Il n'y a pas de constante d'intégration puisqu'à l'état non déformé ($x = 0$) on a $U_{Pe} = 0$

Remarque 2 :
Les ressorts sont les réservoirs de l'énergie potentielle élastique; ils doivent, à ce titre, faire partie du système étudié.
Or les ressorts sont déformables, ils seront considérés de masse négligeable pour ne pas avoir à calculer leur énergie cinétique.

IV-SYSTEMES CONSERVATIFS.

*/ Si pour un système (∑) par rapport à R

- toutes les liaisons sont principales, parfaites et indépendantes du temps

-tous les efforts qui travaillent, autres que les efforts de liaison, dérivent d'une énergie potentielle alors :

l énergie mécanique de (∑) par rapport à R est conservée au cours du temps:

T((∑/R) + Up(∑/R) = cste au cours du mouvement

C'est l'intégrale première de l'énergie où la valeur de la constante est déterminée par les conditions initiales.

*/Démonstration:

On applique le théorème de l'énergie cinétique au système (∑) par rapport à R

$$\frac{d\,T(\sum/R)}{dt} = P_{tous\,les\,efforts} = P_{efforts\,conservatifs} + P_{efforts\,non\,conservatifs} + P_{efforts\,de\,liaison}$$

$$P_{efforts\,conservatifs} = -\frac{d\,U_p(\sum/R)}{dt}$$

$P_{efforts\,non\,conservatifs} = 0$ car tous les efforts appliqués, qui travaillent, sont conservatifs

toutes les liaisons sont parfaites et principales $\Rightarrow$ $P^{*}_{efforts\,de\,liaison} = 0$ donc

$Q_i = 0 \;\forall\, i = 1,..n$ comme de plus toutes les liaisons sont indépendantes de t $Q_0 = 0$

Soit finalement $\frac{d\,T(\sum/R)}{dt} = -\frac{d\,U_p(\sum/R)}{dt}$ et $\frac{d\left[T(\sum/R) + U_p(\sum/R)\right]}{dt} = 0$