SMP5

MECANIQUE ANALYTIQUE

CHAPITRE IV

EQUATIONS DE LAGRANGE

*/ Principe des puissances virtuelles:

Quelque soit le repère R, quelque soit le système (∑) , à tout instant t et pour tout champ de vitesses virtuelles compatible avec les liaisons principales , la puissance virtuelle des quantités d'accélération de (∑) par rapport à R est égale à la puissance virtuelle de tous les efforts appliqués à (∑) dans R.

I- Puissance virtuelle des quantités d'accélération:

La puissance virtuelle $P^*_{acc}(\Sigma)$ des quantités d'accélération de (Σ) est donnée par :

$$P^*_{acc}(\Sigma) = \int_{P\in\Sigma} \vec{\gamma}\,(P\in\Sigma/R)\,.\,\vec{V}^*(P)\,dm$$

en tenant compte de : $\vec{V}^*(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\, q_i^*$ il vient : $P^*_{acc}(\Sigma) = \int_{P\in\Sigma} \vec{\gamma}\,(P\in\Sigma/R)\,.\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\, q_i^*\, dm$

donc $$P^*_{acc}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} q_i^* \left[\int_{P\in\Sigma} \vec{\gamma}\,(P\in\Sigma/R)\,.\,\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\, dm\right] = \sum_{i=1}^{n} q_i^*\,\Gamma_i$$

où $\Gamma_i = \int_{P\in\Sigma} \vec{\gamma}\,(P\in\Sigma/R)\,.\,\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\, dm$ $\quad i = 1,....n$ composantes généralisées de quantités d'accélération de (Σ) par rapport à R

*/ Calcul des Γi :

Pour $i = 1, \dots n$ $\qquad \Gamma_i = \int_{P\in\Sigma} \vec{\gamma}(P\in\Sigma/R) \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \, dm$

$$\Gamma_i = \int_{P\in\Sigma} \frac{d\vec{V}(P\in\Sigma/R)}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \, dm$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\int_{P\in\Sigma} \vec{V}(P\in\Sigma/R) \cdot \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} \, dm\right] - \int_{P\in\Sigma} \vec{V}(P\in\Sigma/R) \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\right] dm$$

en tenant compte des propriétés suivantes :

$$\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{V}(P\in\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i} \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_i}\right] = \frac{\partial \vec{V}(P\in\Sigma/R)}{\partial q_i} \qquad i = 1, \dots n$$

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt}\left[\int_{P\in\Sigma} \vec{V}(P\in\Sigma/R) \cdot \frac{\partial \vec{V}(P\in\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i} \, dm\right] - \int_{P\in\Sigma} \vec{V}(P\in\Sigma/R) \cdot \frac{\partial \vec{V}(P\in\Sigma/R)}{\partial q_i} \, dm$$

comme :

$T(\Sigma/R) = \frac{1}{2}\int_{P\in\Sigma} \vec{V}^2(P\in\Sigma/R) \, dm$ on trouve :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial q_i} \qquad i = 1, \dots n.$$

II- **Equations de Lagrange:**

Le principe des puissances virtuelles :∀ (R), ∀ (∑), ∀ CCV compatible, à t fixé

$$P^*_{acc}(\Sigma) = P^*_{tous\,les\,efforts}(\Sigma) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i q_i^* = \sum_{i=1}^{n} Q_{itotal}\, q_i^* \qquad q_i^* \text{ scalaires arbitraires}$$

donc : $\quad \Gamma_i = Q_{itotal} \qquad i = 1, \ldots\ldots. n.$

ou encore, puisque :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial q_i} \qquad i = 1, \ldots\ldots. n.$$

et $Q_{itotal} = Q_{iefforts\,conservatifs} + Q_{i\,efforts\,nonconservatifs} = -\dfrac{\partial U_P(\Sigma/R)}{\partial q_i} + Q_{i\,efforts\,nonconservatifs}$

$Q_{i\,efforts\,nonconservatifs}$ = représente la composante généralisée de tous les efforts non conservatifs (donnés et de liaison)

$$Lq_i) \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial q_i} = -\frac{\partial U_P(\Sigma/R)}{\partial q_i} + Q_{i\,efforts\,nonconservatifs} \qquad i = 1, \ldots\ldots. n.$$

Ce sont les n équations de Lagrange du mouvement de (∑) par rapport à R.

*/Démarche d’application:

1- Choix des liaisons principales, sachant que:

la prise d’une liaison holonome principale permet de réduire le nombre des paramètres principaux et donc le nombre des équations de Lagrange et que la prise d’une liaison parfaite principale réduit le nombre de efforts de liaison inconnus dans ces équations.

2- Définir les n paramètres principaux.

3- Construire le champ de vitesses virtuelles compatible avec les liaisons principales.

4-Calculer les énergies cinétique et potentielle compatibles du système étudié

5- Calculer les n composantes de force généralisées des tous les efforts appliqués au système

6- Etablir le système des n équations de Lagrange

7-Le compléter, éventuellement, par les équations de liaison complémentaires.

*/ Remarque1:

Il y a autant d'équations de Lagrange que de paramètres principaux.

*/Remarque 2:

Si le système (∑) étudié est conservatif par rapport à R, alors:

$$Q_{i\,\text{efforts nonconservatifs}} = 0$$

puisque tous les efforts donnés sont conservatifs et toutes les liaisons sont parfaites et principales

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$Lq_i) \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial q_i} = -\frac{\partial U_P(\Sigma/R)}{\partial q_i} \qquad i = 1,\ldots\ldots.n$$

comme : $U_P(\Sigma/R) = U_P(q_1, q_2, \ldots\ldots q_n)$ indépendante des $\dot{q}_i$ par définition

$$Lq_i) \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\left[T(\Sigma/R) - U_P(\Sigma/R)\right]}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial\left[T(\Sigma/R) - U_P(\Sigma/R)\right]}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1,\ldots\ldots.n$$

Soit :

$$Lq_i) \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L(\Sigma/R)}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1,\ldots\ldots.n$$

où $L(\Sigma/R) = L(q_1, q_2, \ldots\ldots q_n) = T(\Sigma/R) - U_P(\Sigma/R)$ est le Lagrangien de (Σ) par rapport à R.

Donc le mouvement d'un système conservatif est complètement décrit par la donnée de son Lagrangien.

*/Remarque 3:

Soient $R_0(O)$ repère galiléen et $R(O')$ repère non galiléen

Dans R et pour chaque solide $(S_j) \subset (\Sigma)$, apparaissent en plus des forces extérieures, des forces d'inertie représentées par :

- une densité de force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_C(P \in S_j / R) = 2\ \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}(P/R)$$

- et une densité de force d'inertie d'entrainement :

$$\vec{f}_e(P \in S_j/R) = \vec{\gamma}(O'/R_0) + \frac{d\vec{\Omega}(R/R_0)}{dt}/R_0 \wedge \vec{O'P} + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \left[\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{O'P}\right]$$

Notons que :

- la puissance réelle des efforts de Coriolis est toujours nulle mais leur puissance virtuelle ne l'est pas en général puisque $\vec{V}(P/R)$ n'est pas toujours colinéaire à $\vec{V}^*(P)$

- Les efforts d'inertie d'entrainement peuvent dans certains cas dériver d'une énergie potentielle.

*/Remarque 4:

Les équations de Lagrange relatives à x , y ou z (resp. ψ,Θ et φ) sont des combinaisons linéaires des théorèmes de la résultante (resp. théorèmes des moments) appliqués aux différents constituants solides de (∑) et projetés sur les axes correspondants.

*/ Exemple : Mouvement de Lagrange.

Soit $R_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé, direct, fixe où $O\vec{z}_0$ est la verticale ascendante.
On considère, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, le mouvement d'un solide de révolution (S) homogène d'axe $O\vec{z}$ autour de son point fixe O. (S) est de masse m, de centre d'inertie G tel que $\vec{OG} = a\,\vec{z}$.
On note A, A et C les moments principaux d'inertie de (S) en O.

La seule liaison est la liaison "O point fixe" : $x = y = z = 0$. Elle est holonome, indépendante du temps et principale.
Elle est parfaite car la puissance virtuelle de la réaction $\vec{R}_O$ en O est nulle; en effet :

$$\vec{R}_O = R_{n1}\vec{x}_0 + R_{n2}\vec{y}_0 + R_{n3}\vec{z}_0 \quad \Rightarrow \quad P^*_{\vec{R}_O} = \vec{R}_O.\vec{V}^*(O) = 0 \quad \text{car } \vec{V}^*(O) = \vec{0} \quad \text{puisque } \vec{V}(O/R_0) = \vec{0}.$$

On a donc, 3 paramètres principaux qui sont les angles d'Euler ψ, θ et φ de (S).

$$R_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0) \text{ fixe} \xrightarrow{\psi, O\vec{z}_0} R_1(O;\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0) \xrightarrow{\theta, O\vec{u}} R_2(O;\vec{u},\vec{w},\vec{z}) \xrightarrow{\varphi, O\vec{z}} R(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \text{ lié à (S)}$$

$R_2(O;\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ est un repère principal d'inertie de (S); la matrice principale d'inertie en O de (S) est

$$II_o(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi}\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{z} = \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{z}$$

Les énergies cinétique et potentielle compatibles de (Σ) par rapport à R_0 sont :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0)\left[II_o(S)..\vec{\Omega}(S/R_0)\right] = \frac{1}{2}A\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta\right] + \frac{1}{2}C\,(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2$$

$$U_P(S/R_0) = +m\,g\,\vec{OG}.\vec{z}_0 + cste = m\,g\,a\cos\theta + cste$$

Les 3 équations de Lagrange sont :

$$\text{L}\psi)\qquad \frac{\partial\, T(\Sigma/R)}{\partial \dot{\psi}} = A\,\dot{\psi}\sin^2\theta + C\cos\theta\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\ ;\quad \frac{\partial\, T(\Sigma/R)}{\partial \psi} = 0\ ;\quad \frac{\partial\, U_P(\Sigma/R)}{\partial \psi} = 0 \quad \text{et} \quad Q_\psi = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[A\,\dot{\psi}\sin^2\theta + C\cos\theta\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\right] = 0 \quad\Rightarrow\quad A\,\dot{\psi}\sin^2\theta + C\cos\theta\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta) = K \quad \text{constante}$$

intégrale première du mouvement, dans laquelle $K = \left[A\,\dot{\psi}\sin^2\theta + C\cos\theta\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\right]_{\text{à } t=0}$

$$\text{L}\varphi)\qquad \frac{\partial\, T(\Sigma/R)}{\partial \dot{\varphi}} = C\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\ ;\quad \frac{\partial\, T(\Sigma/R)}{\partial \varphi} = 0\ ;\quad \frac{\partial\, U_P(\Sigma/R)}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{et} \quad Q_\varphi = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[C\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\right] = 0 \quad\Rightarrow\quad C\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta) = H \quad \text{constante}$$

intégrale première du mouvement, dans laquelle $H = \left[C\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\right]_{\text{à } t=0}$

$$\text{L}\theta)\qquad \frac{\partial\, T(\Sigma/R)}{\partial \dot{\theta}} = A\,\dot{\theta}\ ;\quad \frac{\partial\, T(\Sigma/R)}{\partial \theta} = A\,\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + C\,\dot{\psi}\sin\theta\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\ ;$$

$$\frac{\partial\, U_P(\Sigma/R)}{\partial \theta} = -m\,g\,a\sin\theta \quad \text{et} \quad Q_\theta = 0$$

$$\Rightarrow\ A\,\ddot{\theta} - A\,\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + C\,\dot{\psi}\sin\theta\,(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta) = m\,g\,a\sin\theta$$

ou encore, en tenant compte de $\text{L}\varphi)$:

$$A\,\ddot{\theta} - A\,\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + H\,\dot{\psi}\sin\theta = m\,g\,a\sin\theta$$

I

*/Remarques :

- Le système (∑) est conservatif par rapport à R, l’équation de Lagrange relative à Θ peut être remplacée par l’intégrale première de l’énergie:

$$\frac{1}{2}A\left[\dot{\theta}^{2}+\dot{\psi}^{2}\sin^{2}\theta\right]+\frac{1}{2}C\ (\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^{2}+\mathrm{m\,g\,a}\cos\theta=\mathrm{cste}$$

- Ces équations de Lagrange peuvent retrouvées en appliquant le théorème du moment dynamique en O à (S) par rapport à R

R_0 étant galiléen, le théorème du moment dynamique en O de (S) par rapport à R_0 s'écrit :

$$\vec{\delta}_0\,(\mathrm{S}/R_0)=\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_0\,(\mathrm{S}/R_0)\right]/R_0=\vec{M}_0\,(\vec{P})+\vec{M}_0\,(\vec{R}_0)=\mathrm{O}\vec{\mathrm{G}}\wedge\vec{P}+\mathrm{O}\vec{\mathrm{O}}\wedge\vec{\mathrm{R}}_0$$

où $\qquad \vec{\sigma}_0\,(\mathrm{S}/R_0)=\mathrm{II}_0(S)\,.\,\vec{\Omega}\,(\mathrm{S}/R_0)$

soit $\qquad \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_0\,(\mathrm{S}/R_0)\right]/R_0=\mathrm{O}\vec{\mathrm{G}}\wedge\vec{P}$

on retouve :

$L\psi$) par projection de cette équation sur la direction de l'axe de rotation $\vec{z}_0$

$L\theta$) par projection de cette équation sur la direction de l'axe de la rotation $\vec{u}$

$L\varphi$) par projection de cette équation sur la direction de l'axe de la rotation $\vec{z}$