SMP5

MECANIQUE ANALYTIQUE

CHAPITRE V

INTEGRALES PREMIERES DU MOUVEMENT.

* /Définition :

On appelle intégrale première du mouvement d'un système(Σ) par rapport à R tout groupement fontion des q_i, des $\dot{q}_i$ et de t qui reste constant au cours du temps :

$$f\,(q_1, q_2, ...q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2 ....\dot{q}_n, t) = cste \quad ; \quad \forall\, t$$

la valeur de la constante étant déterminée à l'aide des conditions initiales.

* /Exemples :

$\rightarrow$ (S) solide de centre G pseudo - isolé % R

$$\vec{\gamma}(G/R) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}(G/R) = cs\vec{te} \qquad 3 \text{ intégrales premières du mouvement : } V_i = cste_i \quad i = 1,2,3$$

$\rightarrow$ (S) pour lequel, dans R, la somme des moments des forces appliquées est nulle en un point fixe O

$$\vec{\delta}_0(G/R) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\sigma}_0(G/R) = cs\vec{te} \qquad 3 \text{ intégrales premières du mouvement : } \sigma_{0i} = cste_i \quad i = 1,2,3$$

$\rightarrow$ Si pour un paramètre q d'un système(Σ) % R on a $\dfrac{\partial\, T\,(\Sigma/R)}{\partial\, q} = \dfrac{\partial\, U_P\,(\Sigma/R)}{\partial\, q} = 0$ et $Q_q = 0$

l équation de Lagrange correspondante s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\, T\,(\Sigma/R)}{\partial\, \dot{q}}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\, T\,(\Sigma/R)}{\partial\, \dot{q}} = cste \;\; \text{intégrale première du mouvement}$$

I-Intégrale première de l'énergie:

*/ Conditions d'existence:

Si pour un système (∑) par rapport à R:

-toutes les liaisons sont parfaites, principales et indépendantes de t

-tous les efforts qui travaillent, autres que ceux de liaison, sont conservatifs

Alors: $$\mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R}) + \mathrm{U_P}(\Sigma/\mathrm{R}) = \mathrm{cste} \quad \forall t$$

*/ démonstration:

$$\mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R}) = \mathrm{T}(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots\ldots, \dot{q}_n) \Rightarrow \frac{d\mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R})}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R})}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R})}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\mathrm{U_P}(\Sigma/\mathrm{R}) = \mathrm{U_P}(q_1, q_2, \ldots, q_n) \Rightarrow \frac{d\,\mathrm{U_P}(\Sigma/\mathrm{R})}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{U_P}(\Sigma/\mathrm{R})}{\partial q_i} q_i$$

Toutes les liaisons sont parfaites et prises principales et les efforts non conservatifs ne travaillent pas, donc :

$$Q_{i\ \text{efforts non conservatifs}} = 0 \qquad i = 1, \ldots\ldots n.$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R})}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial \mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R})}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathrm{U_P}(\Sigma/\mathrm{R})}{\partial q_i} \qquad i = 1, \ldots\ldots n..$$

en multipliant chaque équation par le correspondant et en sommant, il vient :

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R})}{\partial \dot{q}_i}\right] - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{T}(\Sigma/\mathrm{R})}{\partial q_i} \dot{q}_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{U_P}(\Sigma/\mathrm{R})}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \sum_{i=1}^{n}\ddot{q}_i\,\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial q_i}\,\dot{q}_i = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U_P(\Sigma/R)}{\partial q_i}\,\dot{q}_i$$

soit :

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{d\,T(\Sigma/R)}{dt} = -\frac{d\,U_P(\Sigma/R)}{dt}$$

Toutes les liaisons sont principales et indépendantes du temps $\Longrightarrow$

$T(\Sigma/R) = T_2$ est quadratique par rapport aux $\dot{q}_i$, $T_1 = T_0 = 0$

$$\forall \lambda \in IR \quad T(q_1, q_2, ..., q_n, \lambda\dot{q}_1, \lambda\dot{q}_2, ..., \lambda\dot{q}_n) = \lambda^2\; T(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n)$$

en dérivant cette égalité par rapport à λ, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial(\lambda\dot{q}_i)} = 2\lambda\; T(\Sigma/R)$$

pour $\lambda = 1$; on obtient (théorème d' Euler) :

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i} = 2\,T(\Sigma/R)$$

donc finalement : $\dfrac{d\left[T(\Sigma/R) + U_P(\Sigma/R)\right]}{dt} = 0$ et $T(\Sigma/R) + U_P(\Sigma/R) = cste \quad \forall t$

*/ Remarque:

Pour un système conservatif à un degré de liberté, l’intégrale première de l’énergie permet d’obtenir simplement l’équation du mouvement.

II- Intégrale première de Painlevé:

* / Conditions d'existence :

Si pour un système(Σ) par rapport à R :

- toutes les liaisons sont parfaites, principales et peuvent dépendre de t
- tous les efforts qui travaillent, autres que ceux de liaison, sont conservatifs

et si $\exists\, A(q_i, t)$ telle que $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\partial L(\Sigma/R)}{\partial t}$ alors $T_2 - T_0 + U_P(\Sigma/R) + A = cste \quad \forall t$ est l'intégrale première de Painlevé

* /Démonstration :

$$T(\Sigma/R) = T(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n, t) \Rightarrow$$

$$\frac{dT(\Sigma/R)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial t}$$

$$U_P(\Sigma/R) = U_P(q_1, q_2, ..., q_n, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,U_P(\Sigma/R)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U_P(\Sigma/R)}{\partial q_i} q_i + \frac{\partial U_P(\Sigma/R)}{\partial t}$$

Toutes les liaisons sont parfaites et prises principales et les efforts non conservatifs ne travaillent pas, donc :

$$Q_{i\ \text{efforts non conservatifs}} = 0 \qquad i = 1,.......n.$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial q_i} = -\frac{\partial U_P(\Sigma/R)}{\partial q_i} \qquad i = 1,.......n..$$

en multipliant chaque équation par le correspondant et en sommant, il vient :

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial q_i}\dot{q}_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U_P(\Sigma/R)}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \sum_{i=1}^{n}\ddot{q}_i\,\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial q_i}\,\dot{q}_i = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U_P(\Sigma/R)}{\partial q_i}\,\dot{q}_i$$

soit :

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \left[\frac{d\,T(\Sigma/R)}{dt} - \frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial t}\right] = -\left[\frac{d\,U_P(\Sigma/R)}{dt} - \frac{\partial\,U_P(\Sigma/R)}{\partial t}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i} - T(\Sigma/R) + U_P(\Sigma/R)\right] = -\frac{\partial\left[T(\Sigma/R) - U_P(\Sigma/R)\right]}{\partial t} = -\frac{\partial L(\Sigma/R)}{\partial t}$$

comme : $T(\Sigma/R) = T_2 + T_1 + T_0$ et d'après le théorème d'Euler :

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} = 2\,T_2 \;;\quad \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} = T_1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\,\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i} = 2\,T_2 + T_1$$

et finalement :

$$\frac{d}{dt}\left[T_2 - T_0 + U_P(\Sigma/R)\right] = -\frac{\partial L(\Sigma/R)}{\partial t} \quad \text{si } \exists\, A(q_i, t) \quad \text{telle que} \quad \frac{dA}{dt} = \frac{\partial L(\Sigma/R)}{\partial t}$$

alors on peut écrire $T_2 - T_0 + U_P(\Sigma/R) + A = cste \quad \forall\, t$ c' est l'intégrale première de Painlevé

* /Remarque :

Si de plus $\frac{\partial L(\Sigma/R)}{\partial t} = 0$ alors $T_2 - T_0 + U_P(\Sigma/R) = cste \quad \forall t$ intégrale première de Painlevé.

* /Remarque1 :

L'intégrale première de Painlevé est une combinaison linéaire des équations de Lagrange.

* /Remarque 2 :

Si toutes les liaisons sont indépendantes de t alors $T_0 = 0$, $T(\sum/R) = T_2$ et $\dfrac{\partial L(\sum/R)}{\partial t} = 0$

on retrouve l'intégrale première de l'énergie qui est donc un cas particulier de l'intégrale première de Painlevé.

* / Exemple :

Par rapport au repère orthonormé, direct, fixe et galiléen $R_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ où $O\vec{z}_0$ est la verticale ascendante, on considère, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, le mouvement d'une tige rectiligne (OA) homogène d'axe $O\vec{z}$ autour de son point fixe O. (OA) est de masse m, de longueur 2L et de centre d'inertie G.

Un couple moteur $\vec{C} = C\,\vec{z}_0$ impose, à tout instant, une précession $\psi = \omega\, t$ à la tige (OA).

Les liaisons sont :

$\rightarrow$ La liaison "O point fixe" : $x = y = z = 0$. Elle est holonome, indépendante du temps et parfaite

car $P^*_{\vec{R}_O} = \vec{R}_O.\vec{V}^*(O) = 0$ car $\vec{V}^*(O) = \vec{0}$ puisque $\vec{V}(O/R_0) = \vec{0}$.

$\rightarrow$ (OA) rectiligne donc pas de rotation propre

$\rightarrow$ La liaison $\psi = \omega\, t$ liaison dépendant de t; elle est parfaite puisque

$\vec{\Omega}\,(prec) = \omega\, \vec{z}_0$ et $\vec{\Omega}^*\,(prec) = \vec{0}$ donc $P^*_{\vec{C}} = 0$

Toutes les liaisons sont parfaites et principales. Le seul effort , autre de liaison, est le poids il est conservatif

On a donc, un seul paramètres principal θ .

$$R_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0) \text{ fixe } \xrightarrow{\omega t,\, O\vec{z}_0} R_1(O;\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0) \xrightarrow{\theta,\, O\vec{u}} R_2(O;\vec{u},\vec{w},\vec{z}) \text{ lié à (OA)}$$

$R_2(O;\vec{u},\vec{w},\vec{z})$ est un repère principal d'inertie de (OA); la matrice principale d'inertie en O de (OA) est

$$II_o(OA) = \begin{bmatrix} \frac{4ml^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Omega}\,(OA/R_0) = \omega\, \vec{z}_0 + \dot{\theta}\, \vec{u} = \dot{\theta}\, \vec{u} + \omega \sin\theta\, \vec{w} + \omega \cos\theta\ \vec{z}$$

Les énergies cinétique et potentielle compatibles de (OA) par rapport à R_0 sont :

$$T(OA/R_0) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}\,(S/R_0)\left[II_o(S)..\vec{\Omega}\,(S/R_0)\right] = \frac{1}{2}\frac{4\,m\,L^2}{3}\left[\ \dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta\ \right]$$

donc $T_2 = \frac{1}{2}\frac{4\,m\,L^2}{3}\dot{\theta}^2$, $T_1 = 0$ et $T_0 = \frac{1}{2}\frac{4\,m\,L^2}{3}\omega^2 \sin^2\theta$

$$U_P(OA/R_0) = +m\ g\ O\vec{G}.\vec{z}_0 + cste = m\ g\ a\ \cos\theta + cste$$

de plus $\dfrac{\partial L(OA/R_0)}{\partial t} = \dfrac{\partial\left[T(OA/R_0) - U_P(OA/R_0)\right]}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = cste$

donc on peut écrire l'intégrale première de Painlevé : $T_2 - T_0 + U_P(OA/R_0) = cste$

$$\frac{1}{2}\frac{4\,m\,L^2}{3}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\frac{4\,m\,L^2}{3}\omega^2 \sin^2\theta + m\,g\,L\cos\theta = cste$$

la valeur de la constante est obtenue à l'aide des conditions initiales : θ_0 et $\dot{\theta}_0$, *soit* :

$$cste = \frac{1}{2}\frac{4\,m\,L^2}{3}\dot{\theta}_0^2 - \frac{1}{2}\frac{4\,m\,L^2}{3}\omega^2 \sin^2\theta_0 + m\,g\,L\cos\theta_0$$

L'équation du mouvement correspondante est obtenue par dérivation par rapport au temps; soit :

$$\frac{4\,m\,L^2}{3}\dot{\theta}\ddot{\theta} - \frac{4\,m\,L^2}{3}\omega^2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta - m\,g\,L\,\dot{\theta}\sin\theta = 0 \qquad \text{comme} \quad \dot{\theta} \neq 0 \text{ alors :}$$

$$\frac{4\,m\,L^2}{3}\ddot{\theta} - \frac{4\,m\,L^2}{3}\omega^2 \sin\theta\cos\theta - m\,g\,L\sin\theta = 0$$

Cette équation du mouvement peut être retrouvée en écrivant directement l'équation de Lagrange L_θ.