Une vibration mécanique d’un système est un petit mouvement de ce système au voisinage de l’une de ses positions d’équilibre stables, lorsqu’elle existe.

VIBRATIONS-CHAPITRE I:

EQUILIBRE ET STABILITE.

Soit (Σ) système à n paramètres principaux $q_1,\ldots\ldots,q_n$ par rapport à R.

I - EQUILIBRE.

*/ Définition 1 :

Une position $\vec{q}^{\,e}=(q_1^e,\ldots\ldots,q_n^e)$ de (Σ) par rapport à R est une position d'équilibre si, abandonné dans cette position sans vitesse initiale, il y reste indéfiniment.

*/ Définition 2 :

Les positions d'équilibre de (Σ) par rapport à R sont les solutions constantes $\dot{q}_i=\ddot{q}_i=0 \quad i=1\ldots.,.n$, lorsqu'elles existent, du système des équations du mouvement de (Σ) par rapport à R.

*/ Cas particulier du système conservatif :

Si (Σ) conservatif par rapport à R alors $T(\Sigma/R)$ quadratique % $\dot{q}_i$

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T(\Sigma/R)}{\partial q_i}\right]_{\dot{q}_i=\ddot{q}_i=0}=0 \qquad \text{pour} \qquad i=1,\ldots\ldots,n$$

donc les positions d'équlibre sont les solutions constantes du système: $\dfrac{\partial U_P(\Sigma/R)}{\partial q_i}=0 \qquad i=1,\ldots\ldots,n$

Les positions d'équilibre % R d'un système conservatif sont donc les extremums, lorsqu'ils existent, de son énergie potentielle % R.

* /Exemple 1 :

Dans le plan vertical fixe $(O;\vec{x},\vec{y})$ associé à $R(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ orthonormé, direct où la verticale $O\vec{x}$ est descendante, on considére le système conservatif constitué d'un pendule composé formé d'une tige (OA) rectiligne, homogène, de centre d'inertie G, de masse m et de longueur 2L. On pose: $(O\,\vec{x}\,;\vec{OA}) = \theta$

toutes les liaisons sont parfaites, indépendantes de t et prises principales de plus la seule force donnée est le poids il dérive d'une énergie potentielle $\Rightarrow (OA)$ est conservatif

$$\mathrm{U_P}(OA/\mathrm{R}) = \mathrm{U_P}(\theta) = -\,\mathrm{m\,g}\,\vec{OG}.\vec{x} + \mathrm{cste} = -\,\mathrm{m\,g\,L}\cos\theta + \mathrm{cste}$$

les positions d'équilibre θ^e de (OA) dans R, extremums de $\mathrm{U_P}(OA/\mathrm{R})$, sont les solutions constantes de :

$$\frac{\mathrm{dU_P}(OA/\mathrm{R})}{\mathrm{d}\theta} = \mathrm{m\,g\,L}\sin\theta = 0$$

2 positions d'équilibre : $\theta_1^e = 0$ et $\theta_2^e = \pi$.

* /Exemple 2 :

Dans le plan vertical fixe $(O;\vec{x},\vec{y})$ associé à $R(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ orthonormé, direct où la verticale $O\vec{x}$ est descendante, on considére $(\sum)$ conservatif constitué d'un pendule double formé de deux tiges (OA) et (AB) identiques, rectilignes, homogènes, de masse m et de longueur 2L chacune. On note G_1 et G_2 les centres d'inertie respectifs des 2 tiges qui sont articulées parfaitement en A et on pose: $(O\,\vec{x}\,;\vec{OA}) = \theta_1$ et $(A\,\vec{x}\,;\vec{AB}) = \theta_2$

toutes les liaisons sont parfaites, indépendantes de t et prises principales de plus les seule forces données sont les poids ils dérivent d'une énergie potentielle $\Rightarrow (\sum)$ est conservatif

$$\mathrm{U_P}(\textstyle\sum/\mathrm{R}) = \mathrm{U_P}(OA/\mathrm{R}) + \mathrm{U_P}(AB/\mathrm{R}) = -\,\mathrm{m\,g}\,\vec{OG}_1.\vec{x} - \mathrm{m\,g}\,\vec{OG}_2.\vec{x} + \mathrm{cste}$$

$$\mathrm{U_P}(\textstyle\sum/\mathrm{R}) = -\,\mathrm{m\,g\,L}\,(3\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + \mathrm{cste}$$

les positions d'équilibre (θ_1^e,θ_2^e) de $(\sum)$ dans R, extremums de $\mathrm{U_P}(\sum/\mathrm{R})$, sont les solutions constantes du système:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{U_P}(\sum/\mathrm{R})}{\partial\theta_1} = 3\,\mathrm{m\,g\,L}\sin\theta_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathrm{U_P}(\sum/\mathrm{R})}{\partial\theta_2} = \mathrm{m\,g\,L}\sin\theta_2 = 0 \end{cases}$$

4 positions d'équilibre $E^1(\theta_1^e,\theta_2^e) = (0,0)$; $E^2(\theta_1^e,\theta_2^e) = (0,\pi)$; $E^3(\theta_1^e,\theta_2^e) = (\pi,0)$ et $E^4(\theta_1^e,\theta_2^e) = (\pi,\pi)$

II - STABILITE.

On pose: $\|\vec{q}\| = \sup_{i=1\ldots n} |q_i|$

*/ Définition :

une position d'équilibre $\vec{q}^{\,e}$ de (Σ) est stable si :

$\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \eta > 0$ tel que pour toutes conditions initiales $\vec{q}_0$ et $\dot{\vec{q}}_0$ vérifiant $\left\|\vec{q}_0 - \vec{q}^{\,e}\right\| < \eta$ et $\left\|\dot{\vec{q}}_0\right\| < \eta$ alors

le mouvement ultérieur vérifie : $\left\|\vec{q}(t) - \vec{q}^{\,e}\right\| < \varepsilon \quad \forall\, t.$

$\vec{q}^{\,e}$ est stable si légèrement perturbé à partir de $\vec{q}^{\,e}$, (Σ) reste au voisinage de cette position.

*/ Stabilité asymptotique :

$\vec{q}^{\,e}$ est asymptotiquement stable si : elle est stable et si $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|\vec{q}(t) - \vec{q}^{\,e}\right\| = 0$

*/Cas du système conservatif : Critère de LEJEUNE - DIRICHLET.

Pour tout système conservatif, les minimums locaux stricts de l'énergie potentielle sont des positions d'équilibre stables.

Ce critère constitue une condition suffisante non nécessaire de stabilité pour les systèmes conservatifs. DONC:
Pour un système conservatif, si une position d'équilibre correspond à un minimum local strict de l'énergie potentielle elle est stab
S'il s'agit d'un maximum ou d'un point d'inflexion de cette énergie potentielle on ne peut pas conclure.

$\rightarrow$ Cas des systèmes à 1 d.d.l : n = 1 $\quad U_P(\sum/R) = U_P(q)$

si $\quad \left.\dfrac{d^2U_P(\sum/R)}{d\,\theta^2}\right|_{q=q^e} > 0 \Rightarrow q^e$ est stable

si $\quad \left.\dfrac{d^2U_P(\sum/R)}{d\,\theta^2}\right|_{q=q^e} \leq 0 \Rightarrow q^e$ on ne peut pas conclure

*/ Retour à l'exemple 1 :

$$\left.\frac{d^2U_P(OA/R)}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = m\,g\,L > 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1^e = 0 \text{ est stable}$$

$$\left.\frac{d^2U_P(OA/R)}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi} = -m\,g\,L < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_2^e = \pi \text{ on ne peut pas conclure.}$$

$\rightarrow$ Cas des systèmes à 2 d.d.l : n = 2 $\quad U_P(\sum/R) = U_P(q_1, q_2)$

soit $\quad IH(\sum) = \left(\dfrac{\partial^2 U_P(\sum/R)}{\partial q_i\, \partial q_j}\right)_{\substack{i=1,2\\ j=1,2}}$ matrice Hessienne de l'énergie potentielle $U_P(\sum/R)$

si $\left.\mathrm{Tr}\, IH(\sum)\right|_{(q_1^e, q_2^e)} > 0$ et $\left.\det IH(\sum)\right|_{(q_1^e, q_2^e)} > 0 \quad \Rightarrow \quad (q_1^e, q_2^e)$ est stable

si $\left.\mathrm{Tr}\, IH(\sum)\right|_{(q_1^e, q_2^e)} \leq 0$ ou $\left.\det IH(\sum)\right|_{(q_1^e, q_2^e)} \leq 0 \quad \Rightarrow$ on ne peut pas conclure pour la stabilité de (q_1^e, q_2^e)

*/ Retour à l'exemple 2 :

$$\frac{\partial^2 U_P(\sum/R)}{\partial \theta_1^2} = 3\,m\,g\,L\cos\theta_1 \;; \quad \frac{\partial^2 U_P(\sum/R)}{\partial \theta_2^2} = m\,g\,L\cos\theta_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 U_P(\sum/R)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = 0$$

$$\left.\mathrm{Tr}\, IH(\sum)\right|_{(0,0)} = 4mgL > 0 \quad \text{et} \quad \left.\det IH(\sum)\right|_{((0,0)} = 3(mgL)^2 > 0 \quad \Rightarrow E^1(\theta_1^e, \theta_2^e) = (0,0) \quad \text{est stable}$$

on ne pourra pas conclure pour $\quad E^2(\theta_1^e, \theta_2^e) = (0, \pi) \quad ; \quad E^3(\theta_1^e, \theta_2^e) = (\pi, 0)$ et $E^4(\theta_1^e, \theta_2^e) = (\pi, \pi)$

Cas général: Critère de stabilité de LIAPUNOV.

*/ Enoncé :

On considère, dans IC, le polynôme caractéristique du système des équations du mouvement linéarisées au voisinage de la position d'équilibre $\vec{q}^{e}$ étudiée

$\rightarrow$ si toutes les solutions, dans IC, de ce polynôme sont à partie réelle négative alors $\vec{q}^{e}$ est stable

$\rightarrow$ si, au moins, une solution est à partie réelle positive alors $\vec{q}^{e}$ est instable

$\rightarrow$ si une solution est à partie réelle nulle :

- soit cette solution est simple et $\vec{q}^{e}$ est stable
- soit cette solution est multiple et $\vec{q}^{e}$ est instable.

*/ Linéarisation des équations du mouvement au voisinage de $\vec{q}^{e}$.

On pose : $\vec{\varepsilon} = \vec{q} - \vec{q}^{e} = (q_1 - q_1^{e}, ..., q_n - q_n^{e}) = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$

les ε_i ($i = 1,..., n$) ainsi que leurs dérivées successives $\dot{\varepsilon}_i$ et $\ddot{\varepsilon}_i$ sont supposés être des infiniment petits du premier ordre.

Les équations du mouvement linéarisées au voisinage de $\vec{q}^{e}$ sont obtenues en considérant les développements limités des fonctions qui y interviennent et en ne conservant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 1 par rapport aux infiniment petits.

Les équations du mouvement d'un système linéarisées au voisinage d'une position d'équilibre peuvent être obtenues directement à partir des expressions des énergies cinétique T_r et potentielle U_{Pr} réduites à l'ordre 2 par rapport aux infiniment petits et des composantes de forces généralisées $Q_{\varepsilon i}$ développées jusqu'à l'ordre 1.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_r}{\partial \dot{\varepsilon}_i}\right) - \frac{\partial T_r}{\partial \varepsilon_i} = -\frac{\partial U_{Pr}}{\partial q_i} + Q_{\varepsilon i} \qquad i = 1, ..., n$$

*/ Retour à l'Exemple 1 :

$$T(\sum/R) = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad U_P(\sum/R) = -m g L \cos\theta + cste \quad \text{et} \quad Q_\theta = 0$$

L'équation de Lagrange s'écrit : $I\ddot{\theta} + m g L \sin\theta = 0$

$\rightarrow$ au $V(\theta_1^e = 0)$ on pose: $\varepsilon = \theta,\ \dot{\varepsilon} = \dot{\theta}$ et $\ddot{\varepsilon} = \ddot{\theta}$

l'équation du mouvement linéarisée au $V(\theta_1^e = 0)$ est obtenue en ne conservant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 1 dans les développements limités des foncctions intervenant dans l'équation du mouvement :

puisque $\sin\theta = \sin\varepsilon \approx \varepsilon$ on trouve $I\ \ddot{\varepsilon} + m g L\, \varepsilon = 0$

on peut retrouver ce résultat à partir des expressions réduites à l'ordre 2 des énergies cinétique et potentielle et Q_θ à l'ordre 1 :

puisque $\cos\theta = \cos\varepsilon \approx 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$ et $T_r = \frac{1}{2} I \dot{\varepsilon}^2$ $\quad U_{Pr} = \frac{1}{2} m g L\, \varepsilon^2 + cste$ et $Q_\varepsilon = 0$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_r}{\partial \dot{\varepsilon}}\right) - \frac{\partial T_r}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial U_{Pr}}{\partial \varepsilon} + Q_\varepsilon$ redonne le résultat.

$\rightarrow$ au $V(\theta_2^e = \pi)$ on pose: $\varepsilon = \theta - \pi,\ \dot{\varepsilon} = \dot{\theta}$ et $\ddot{\varepsilon} = \ddot{\theta}$

$\sin\theta = \sin(\varepsilon + \pi) = -\sin\varepsilon \approx -\varepsilon$ et $\quad \cos\theta = \cos(\varepsilon + \pi) = -\cos\varepsilon \approx -1 + \frac{\varepsilon^2}{2}$

$T_r = \frac{1}{2} I \dot{\varepsilon}^2 \quad U_{Pr} = -\frac{1}{2} m g L\, \varepsilon^2 + cste$ et $Q_\varepsilon = 0$

l'équation du mouvement linéarisée au voisinage de $(\theta_2^e = \pi)$ est donnée, par l'une des méthodes : $I\ \ddot{\varepsilon} - m g L\, \varepsilon = 0$

* /Résolution

Après linéarisation des équations du mouvement, au voisinanage de la position d'équilibre étudiée on obtient un système linéaire de n équations différentielles d'ordre 2 chacune., auquel on associe

2n conditions initiales : ε_{i0} *et* $\dot{\varepsilon}_{i0}$ pour $i = 1,...n.$

Dans IC, les solutions sont recherchées sous la forme $\varepsilon_i^c(t) = A_i^c\, e^{rt}$ où $A_i^c \in IC$ et $r \in IC$ pour $i = 1,....,n$

$\rightarrow$ En tenant compte de ces formes de solutions, on aboutit, puisque $e^{rt} \neq 0$, à un système homogène, linéaire de n équations algébriques pour les n inconnues A_i^c.(système de Cramer)

$A_i^c = \dfrac{\det_{A_i^c}}{\det}$ comme le système est homogène, on a $\det_{A_i^c} = 0 \quad \forall i = 1,......,n$

Pour avoir des solutions non nulles, on impose : $\det = 0$.

C'est l'équation caractéristique du système, elle est de degré 2n.

$\rightarrow$ Dans IC, elle admet K solutions, soient :

$r_k = \mathrm{Re}(r_k) + j\,\mathrm{Im}(r_k)$ de multiplicité m_k $\quad k = 1,.....,K$ $\quad$ où $j^2 = -1$ $\qquad$ telles que $\displaystyle\sum_{k=1}^{K} m_k = 2n$

à chaque solution r_k, de multiplicité m_k, correspond une solution complexe particulière du système de la forme :

$P_k(t)\, e^{r_k t}$ $\quad$ où $\quad$ $P_k(t)$ est un polynôme de degré $= m_k - 1$

le principe de superposition permet d'avoir la solution complexe : $\varepsilon_i^c(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{K} P_k(t)\, e^{r_k t} = \sum_{k=1}^{K} P_k(t)\, e^{\mathrm{Re}(r_k)\, t}\, e^{j\,\mathrm{Im}(r_k)\, t}$

et donc finalement : $\varepsilon_i(t) = \mathrm{Re}\left[\varepsilon_i^c(t)\right]$ pour $i = 1,.....,n.$

*/ Démonstration :

Pour chaque solution r_k du polynome caractéristique correspond une solution particulière du système des équations linéarisées de la forme :

$P_k(t)\, e^{\mathrm{Re}(r_k)\, t}\, e^{j\,\mathrm{Im}(r_k)\, t}$ telle que $d°P_k = m-1$ et $\left|P_k(t)\, e^{\mathrm{Re}(r_k)\, t}\, e^{j\,\mathrm{Im}(r_k)\, t}\right| = \left|P_k(t)\, e^{\mathrm{Re}(r_k)\, t}\right|$ puisque $\left|e^{j\,\mathrm{Im}(r_k)\, t}\right| = 1$

$\rightarrow$ si $\forall\, k = 1,\ldots K$ $\quad \mathrm{Re}(r_k) < 0 \quad \lim_{t\to\infty} P_k(t)\, e^{\mathrm{Re}(r_k)\, t} = 0$ et $\lim_{t\to\infty} \varepsilon_i(t) = 0 \quad \vec{q}^{\,e}$ est stable

$\rightarrow$ si $\exists\, k$ tel que $\quad \mathrm{Re}(r_k) > 0 \quad \lim_{t\to\infty} P_k(t)\, e^{\mathrm{Re}(r_k)\, t} = \infty$ et $\lim_{t\to\infty} \varepsilon_i(t) = \infty \quad \vec{q}^{\,e}$ est instable

$\rightarrow$ si $\exists\, k$ tel que $\mathrm{Re}(r_k) = 0$ alors : -

- si r_k est une solution simple alors $d°P_k = 0$, $\left|P_k(t)\right|$ est fini et $\vec{q}^{\,e}$ est stable
- si r_k est une solution multiple alors $d°P_k \geq 1$, $\lim_{t\to\infty} P_k(t)\, e^{\mathrm{Re}(r_k)\, t} = \infty$ et $\vec{q}^{\,e}$ est instable

*/ Retour à l'exemple 1 :

$\rightarrow$ au $V(\theta_1^e = 0)$:

l'équation linéarisée est : $I\, \ddot{\varepsilon} + m\, g\, L\, \varepsilon = 0$

en posant $\varepsilon = A^C e^{rt}$, $(A^C, r) \in \mathbb{C}^2$ avec $A^C \neq 0$ son polynome caractéristique est : $r^2 + \dfrac{mgL}{I} = 0$

il admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: $\quad r_1 = +j\sqrt{\dfrac{mgL}{I}}$ *et* $\quad r_2 = -j\sqrt{\dfrac{mgL}{I}}$

$\mathrm{Re}(r_1) = \mathrm{Re}(r_2) = 0$ $\quad r_1$ et r_2 sont des solutions simples $\Rightarrow$ on retrouve la stabilité de $\theta_1^e = 0$.

$\rightarrow$ au $V(\theta_2^e = \pi)$

l'équation linéarisée est : $I\, \ddot{\varepsilon} - m\, g\, L\, \varepsilon = 0$

en posant $\varepsilon = A^C e^{rt}$, $(A^C, r) \in \mathbb{C}^2$ avec $A^C \neq 0$ son polynome caractéristique est : $r^2 - \dfrac{mgL}{I} = 0$

il admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: $\quad r_1 = +\sqrt{\dfrac{mgL}{I}}$ *et* $\quad r_2 = -\sqrt{\dfrac{mgL}{I}}$

$\mathrm{Re}(r_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_2^e = \pi$ est instable..

* /Remarques :

1 - Soit dans IC, un polynome R(z) à coefficients réels; si z est une racine de R(z) $\Rightarrow$ $\bar{z}$ est aussi racine de R(z).

2 - Au voisinage d'une position d'équilibre stable d'un système, pour chaque solution r_k du polynome caractéristique correspond une solution particulière du système des équations linéarisées de la forme :

$$P_k(t)\, e^{\mathrm{Re}(r_k)\, t}\, e^{j\,\mathrm{Im}(r_k)\, t} \quad \text{où} \quad \mathrm{Re}(r_k) \le 0$$

la partie $e^{\mathrm{Re}(r_k)\, t}$ représente l'amortissement et $e^{j\,\mathrm{Im}(r_k)\, t}$ correspond à la partie oscillatoire de la solution

$\Rightarrow$ Pour un système conservatif, pas d'amortissement donc les solutions de l'équation caractéristique sont imaginaires pures conjuguées 2 à 2.