VIBRATIONS – CHAPITRE III.

VIBRATIONS DES SYSTEMES A DEUX D.D.L. COUPLAGE.

Soit un système(Σ) à 2 ddl $\vec{q} = (q_1, q_2)$ par rapport à R et soit $\vec{q}^{\,e} = (q_1^e, q_2^e)$ une position d'équilibre stable de (Σ), donc :

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{IH}(\Sigma)\Big|_{(q_1^e, q_2^e)} > 0 \quad \text{et} \quad \det \mathrm{IH}(\Sigma)\Big|_{(q_1^e, q_2^e)} > 0$$

Au voisinage de $\vec{q}^{\,e}$, on introduit $\delta\vec{q} = (\varepsilon, \mu)$ où ε et μ sont des infiniment petits du premier ordre définis par :

$$\varepsilon = q_1 - q_1^e, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{q}_1, \quad \ddot{\varepsilon} = \ddot{q}_1 \quad \text{et} \quad \mu = q_2 - q_2^e, \quad \dot{\mu} = \dot{q}_2 \quad \text{et} \quad \ddot{\mu} = \ddot{q}_2$$

I-VIBRATIONS LIBRES NON AMORTIES : SYSTEMES CONSERVATIFS.

1 - Equations des vibrations :

(Σ) conservatif donc $T(\Sigma/R)$ quadratique par rapport aux $\dot{q}_i$ donc de la forme générale :

$$T(\Sigma/R) = \frac{1}{2}\,a\,(q_1,q_2)\,\dot{q}_1^{\,2} + \frac{1}{2}\,b\,(q_1,q_2)\,\dot{q}_2^{\,2} + c\,(q_1,q_2)\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2$$

donc à l'ordre 2 par rapport aux infiniment petits

$$T_{\text{réduite}}(\Sigma/R) = \frac{1}{2}\,a\,(q_1^e,q_2^e)\,\dot{\varepsilon}^{\,2} + \frac{1}{2}\,b\,(q_1^e,q_2^e)\,\dot{\mu}^{\,2} + c\,(q_1^e,q_2^e)\,\dot{\varepsilon}\,\dot{\mu}$$

on pose : $a\,(q_1^e,q_2^e) = a$, $b\,(q_1^e,q_2^e) = b$ et $c\,(q_1^e,q_2^e) = c$

d'où $T_{\text{réduite}}(\Sigma/R) = \frac{1}{2}\,a\;\dot{\varepsilon}^{\,2} + \frac{1}{2}\,b\;\dot{\mu}^{\,2} + c\;\dot{\varepsilon}\,\dot{\mu}$

$$U_P(\Sigma/R) = U_P(q_1,q_2)$$

$$= U_P(q_1^e,q_2^e) + \varepsilon\frac{\partial U_P}{\partial q_1}(q_1^e,q_2^e) + \mu\frac{\partial U_P}{\partial q_2}(q_1^e,q_2^e) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 U_P}{\partial q_1^2}(q_1^e,q_2^e) + \frac{\mu^2}{2}\frac{\partial^2 U_P}{\partial q_2^2}(q_1^e,q_2^e) + \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 U_P}{\partial q_2\partial q_1}(q_1^e,q_2^e) + ..$$

comme $\dfrac{\partial U_P}{\partial q_1}(q_1^e,q_2^e) = \dfrac{\partial U_P}{\partial q_2}(q_1^e,q_{2\varepsilon}^e) = 0$ puisque (q_1^e,q_2^e) est une position d'équilibre, donc à l'ordre 2 :

$$U_{P\,réduite}(\Sigma/R) = U_P(q_1^e,q_2^e) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 U_P}{\partial q_1^2}(q_1^e,q_2^e) + \frac{\mu^2}{2}\frac{\partial^2 U_P}{\partial q_2^2}(q_1^e,q_2^e) + \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 U_P}{\partial q_2\partial q_1}(q_1^e,q_2^e)$$

Les équations des vibrations s'écrivent :

$$L_{\varepsilon}) \qquad a\,\ddot{\varepsilon} + + \frac{\partial^2 U_P}{\partial q_1^2}(q_1^e, q_2^e)\ \varepsilon + c\,\ddot{\mu} + \left[\frac{\partial^2 U_P}{\partial q_2 \partial q_1}(q_1^e, q_2^e)\right]\mu = 0$$

$$L_{\mu}) \qquad b\,\ddot{\mu} + + \frac{\partial^2 U_P}{\partial q_2^2}(q_1^e, q_2^e)\,\mu + c\,\ddot{\varepsilon} + \left[\frac{\partial^2 U_P}{\partial q_2 \partial q_1}(q_1^e, q_2^e)\right]\varepsilon = 0$$

Système d'équations linéarisées auquel on associe 4 conditions initiales : ε_0 , μ_0 , $\dot{\varepsilon}_0$ et $\dot{\mu}_0$.

La solution ε(t) dépend de μ(t) et inversement; les équations sont couplées.

Les coefficients de couplage sont les mêmes dans les deux équations :

$\rightarrow$ c est le coefficient de couplage par inertie

$\rightarrow \dfrac{\partial^2 U_P}{\partial q_2 \partial q_1}(q_1^e, q_2^e)$ est le coefficient de couplage par élasticité.

en posant : $\Omega_1^2 = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial^2 U_P}{\partial q_1^2}(q_1^e, q_2^e)$ et $\Omega_2^2 = \dfrac{1}{b}\dfrac{\partial^2 U_P}{\partial q_2^2}(q_1^e, q_2^e)$

on obtient :

$$L_\varepsilon) \quad \ddot{\varepsilon} + +\Omega_1^2\,\varepsilon + \frac{c}{a}\,\ddot{\mu} + \left[\frac{1}{a}\frac{\partial^2 U_P}{\partial q_2 \partial q_1}(q_1^e, q_2^e)\right]\mu = 0$$

$$L_\mu) \quad \ddot{\mu} + +\Omega_2^2\,\mu + \frac{c}{b}\,\ddot{\varepsilon} + \left[\frac{1}{b}\frac{\partial^2 U_P}{\partial q_2 \partial q_1}(q_1^e, q_2^e)\right]\varepsilon = 0$$

Ω_1 et Ω_2 sont les pulsations fondamentales du systèmes.Ce sont, respectivement, les pulsatios des oscillateurs ε et μ obtenus en l'absence de couplage.

2 - Résolution : Modes propres de vibration.

*/Définition :

Un mode propre de vibration est une solution particulière des équations des vibrations où ε et μ ont même pulsation, même phase et des amplitudes proportionnelles.

(Σ) a deux d.d.l donc son polynome caractéristique est de degré 4, dans IC il admet 4 racines.
comme (Σ) est conservatif, pas d'amortissement, donc ces racines sont complexes imaginaire s purs conjugués 2 à 2 soient : $r_{1,2} = \pm j\omega_1$ et $r_{3,4} = \pm j\omega_2$

$\delta\vec{q} = \mathrm{Re}\left[\vec{A}_1^C\, e^{j\omega_1 t} + \vec{A}_2^C\, e^{-j\omega_1 t} + \vec{A}_3^C\, e^{j\omega_2 t} + \vec{A}_4^C\, e^{-j\omega_2 t}\right]$ où $\vec{A}_1^C, \vec{A}_2^C, \vec{A}_3^C$ et $\vec{A}_4^C$ sont des vecteurs de IC

$$\delta\vec{q} = \underbrace{\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)}_{\leftarrow \ \text{mode I} \ \rightarrow} + \underbrace{\begin{pmatrix} A^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)}_{\leftarrow \ \text{mode II} \ \rightarrow}$$

La solution est donc la superposition de deux modes propres de vibration.

On cherche des solutions particulières ayant même pulsation ω et même phase φ :

$$\varepsilon(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad \mu(\mathrm{t}) = \mathrm{B}\cos(\omega t + \varphi)$$

en reportant dans les équations $\Rightarrow$ pour chaque ω , on obtient un système algébrique linéaire, homogène de deux équations à 2 inconnues A et B pour lequel $\det_{\mathrm{A}} = \det_{B} = 0$.
Pour avoir des solutions non nulles il faut imposer $\det = 0$
c'est l'équation caractéristique du système qui permet de déteminer les pulsations des modes propres ω_1 et ω_2
Pour chaque ω_{i} ($\mathrm{i} = 1{,}2$) $\det = 0$, les 2 équations algébriques sont équivalentes, en utilisant l'une d'elles on écrit la proportionnalité des amplitudes

$$\mathrm{B}^{(\mathrm{i})} = \mathrm{f}(\omega_{\mathrm{i}})\ \mathrm{A}^{(\mathrm{i})} \qquad \mathrm{i} = 1{,}2$$

$$\delta\vec{q} = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \mathrm{f}(\omega_1)\ \mathrm{A}^{(1)} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad + \quad \begin{pmatrix} A^{(2)} \\ \mathrm{f}(\omega_2)\ \mathrm{A}^{(2)} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\leftarrow \quad \text{mode I} \quad \rightarrow \qquad\qquad \leftarrow \quad \text{mode II} \quad \rightarrow$$

$\mathrm{A}^{(1)}, \mathrm{A}^{(2)}, \varphi_1$ et φ_2 déterminées à l'aide des conditions initiales.

* /Remarque : Résolution matricielle.
Le système des équations linéarisées s'écrit :

$\mathrm{IA}\ \delta\ddot{\vec{q}} + \mathrm{IB}\ \delta\vec{\mathrm{q}} = \vec{0}$ où les solutions sont recherchées sous la forme $\delta\vec{\mathrm{q}} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \delta\vec{\mathrm{q}}_0\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$

$\mathrm{IA} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{c} \\ \mathrm{c} & \mathrm{b} \end{pmatrix}$ matrice des coefficients d'inertie, matrice symétrique définie positive

$\mathrm{IB} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 U_P}{\partial q_1^2}(\mathrm{q}_1^{\mathrm{e}}, \mathrm{q}_2^{\mathrm{e}}) & \dfrac{\partial^2 U_P}{\partial q_2 \partial q_1}(\mathrm{q}_1^{\mathrm{e}}, \mathrm{q}_2^{\mathrm{e}}) \\ \dfrac{\partial^2 U_P}{\partial q_2 \partial q_1}(\mathrm{q}_1^{\mathrm{e}}, \mathrm{q}_2^{\mathrm{e}}) & \dfrac{\partial^2 U_P}{\partial q_2^2}(\mathrm{q}_1^{\mathrm{e}}, \mathrm{q}_2^{\mathrm{e}}) \end{pmatrix} = \mathrm{IH}(\sum/\mathrm{R})_{(\mathrm{q}_1^{\mathrm{e}}, \mathrm{q}_2^{\mathrm{e}})}$ matrice des coefficients élastiques, symétrique

c'est la valeur de la matrice Hessienne de l'énergie potentielle à la position d'équilibre

Les termes non diagonaux de ces matrices sont les coefficients de couplage.

$$\delta\vec{q} = \delta\vec{q}_0\, e^{j\omega t} \quad \text{donc} \quad \delta\,\ddot{\vec{q}} = -\,\omega^2 \delta\vec{q}_0\, e^{j\omega t} = -\omega^2 \delta\vec{q}$$

$$\det \mathrm{IA} \neq 0 \Rightarrow \exists\, \mathrm{IA}^{-1} \;\Rightarrow\; -\,\omega^2 \delta\vec{q} + (\mathrm{IA}^{-1}\mathrm{IB})\; \delta\vec{q} = \vec{0} \Rightarrow \quad (\mathrm{IA}^{-1}\mathrm{IB})\, \delta\vec{q} = \omega^2 \delta\vec{q} \;\text{ et }\; (\mathrm{IA}^{-1}\mathrm{IB})\, \delta\vec{q}_0 = \omega^2 \delta\vec{q}_0$$

Les solutions $\delta\vec{q}_0$ sont les vecteurs propres de la matrice $(\mathrm{IA}^{-1}\mathrm{IB})$ dont les valeurs propres sont les carrés des pulsations des modes propres.

*/ Cas particulier : les systèmes accordés.

$\rightarrow$ Définition :

Si $\quad a = b \quad$ et $\quad \dfrac{\partial^2 U_P}{\partial q_1^2}(q_1^e, q_2^e) = \dfrac{\partial^2 U_P}{\partial q_2^2}(q_1^e, q_2^e)$

Le système est dit accordé; le changement de variables :

$$s(t) = \varepsilon(t) + \mu(t) \quad \text{et} \quad d(t) = \varepsilon(t) - \mu(t)$$

permet de découpler les équations et de résoudre avec $s_0 = \varepsilon_0 + \mu_0$ et $d_0 = \varepsilon_0 - \mu_0$

$$\varepsilon(t) = \frac{s(t) + d(t)}{2} \quad \text{et} \quad d(t) = \frac{s(t) - d(t)}{2}$$

→ Exemple :

Soit le système accordé décrit par :

$$\begin{cases} \ddot{\varepsilon} + \Omega^2 \ \varepsilon - \dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}} \mu = 0 \\ \ddot{\mu} + \Omega^2 \ \mu - \dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}} \varepsilon = 0 \end{cases}$$

où $\Omega^2 > \dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$, Ω pulsation fondamentale et $-\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$ est le coefficient de couplage par élasticité.

$$\ddot{s} + (\Omega^2 - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}) \ s = 0 \quad \text{oscillateur harmonique de pulsation propre } \omega_1 = \sqrt{\Omega^2 - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}} \Rightarrow s(t) = s_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\mathrm{t} = 0 : \begin{cases} \mathrm{s}_0 = \mathrm{s}_\mathrm{m} \cos\varphi_1 = \dfrac{\varepsilon_0 + \mu_0}{2} \\ \dot{s}_0 = -\mathrm{s}_\mathrm{m} \omega_1 \sin\varphi_1 = \dfrac{\dot{\varepsilon}_0 + \dot{\mu}_0}{2} \end{cases} \Rightarrow \ \mathrm{s}_\mathrm{m} = \sqrt{(\frac{\varepsilon_0 + \mu_0}{2})^2 + (\frac{\dot{\varepsilon}_0 + \dot{\mu}_0}{2\,\omega_1})^2} \quad \text{et} \quad \varphi_1 = -\arctan\left[\frac{\dot{\varepsilon}_0 + \dot{\mu}_0}{(\varepsilon_0 + \mu_0)\omega_1}\right] \pm k\pi$$

$$\ddot{d} + (\Omega^2 + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}) \ d = 0 \quad \text{oscillateur harmonique de pulsation propre } \omega_2 = \sqrt{\Omega^2 + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}} \Rightarrow d(t) = d_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\mathrm{t} = 0 : \begin{cases} \mathrm{d}_0 = \mathrm{d}_\mathrm{m} \cos\varphi_2 = \dfrac{\varepsilon_0 - \mu_0}{2} \\ \dot{d}_0 = -\mathrm{d}_\mathrm{m} \omega_2 \sin\varphi_2 = \dfrac{\dot{\varepsilon}_0 - \dot{\mu}_0}{2} \end{cases} \Rightarrow \ \mathrm{d}_\mathrm{m} = \sqrt{(\frac{\varepsilon_0 - \mu_0}{2})^2 + (\frac{\dot{\varepsilon}_0 - \dot{\mu}_0}{2\,\omega_2})^2} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = -\arctan\left[\frac{\dot{\varepsilon}_0 - \dot{\mu}_0}{(\varepsilon_0 - \mu_0)\omega_2}\right] \pm k\pi$$

donc finalement : $\varepsilon(t) = \dfrac{s(t) + d(t)}{2} = \dfrac{s_m}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \dfrac{d_m}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

et $\mu(\mathrm{t}) = \dfrac{s(t) - d(t)}{2} = \dfrac{s_m}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \dfrac{d_m}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

II-OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES:

$\rightarrow$ Système des équations linéarisées :

En un point P du système(Σ), on introduit une force d'amortissement visqueux de coefficient α

$$\vec{f} = -\alpha\,\vec{V}(P/R)$$

Comme : $\vec{V}(P/R) = \dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\dot{q}_2$ et $\vec{V}^*(P) = \dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}q_1^* + \dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}q_2^*$

sa puissance virtuelle est : $P^* = \vec{f}.\vec{V}^*(P) = -\alpha\vec{V}(P/R).\vec{V}^*(P)$

$$= -\alpha\left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\dot{q}_2\right]\left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}q_1^* + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}q_2^*\right] = -\alpha\left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\dot{q}_2\right]\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}q_1^* - \alpha\left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\dot{q}_2\right]\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}q_2^*$$

d'où $Q_{q1} = -\alpha\left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\dot{q}_2\right]\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}$ et $Q_{q2} = -\alpha\left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\dot{q}_2\right]\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}$

à l'ordre 1 par rapport aux infiniment petits:

$Q_\varepsilon = -\alpha\left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\right]^2_{qe}\dot{\varepsilon} + \left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\right]_{qe}\dot{\mu}$ et $Q_\mu = -\alpha\left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\right]^2_{qe}\dot{\mu} + \left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\right]_{qe}\dot{\varepsilon}$

on pose: $IC = \begin{bmatrix} -\alpha\left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\right]^2_{qe} & -\alpha\left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\right]_{qe} \\ -\alpha\left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\right]_{qe} & -\alpha\left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\right]^2_{qe} \end{bmatrix}$ matrice des coefficients d'amortissement, IC est symétrique

Les termes non diagonaux $-\alpha\left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\right]_{qe}$ sont les coefficients de couplage par amortissement.

Le systèmedes équations du mouvement linéarisées s'écrit :

IA $\delta\ddot{\vec{q}}$ + IC $\delta\dot{\vec{q}}$ + $IB\delta\vec{q} = \vec{0}$ auquel on adjoint les conditions initiales : à t = 0 $\delta\vec{q}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix}$ et $\delta\dot{\vec{q}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_0 \\ \dot{\mu}_0 \end{pmatrix}$

→ Résolution :

Dans IC, les solutions particulières sont recherchées sous la forme $\delta\vec{q}^{\,C} = \begin{pmatrix} A^C \\ B^C \end{pmatrix} e^{rt}$, $r \in$ IC.

En reportant cette forme de solution, dans le systèmedes équations linéarisées, on obtient, puisque $e^{rt} \neq 0$,
un systèmealgébrique, homogène de deux équations à deux inconnues A^C et B^C.
Pour avoir des solutions non nulles, on impose det = 0. C'est l'équation caractéristique du système.
Pour chaque solution r_k de l'équation caractéristique, det = 0 donc les deux équations du systèmealgébrique sont équivalentes.
On utilise l'une d'elles pour établir la proportionnalité des amplitudes : $A = f(r_k)\,B$.

→ Exemple :
On supposeque l'équation caractéristique admet 2 solutions réelles r_1, r_2 et 2 solutions complexes conjuguées $r_{3,4} = -\alpha \pm j\beta$
La position d'équilibre étudiée étant stable on a $r_1 \leq 0$, $r_2 \leq 0$ et $\alpha \geq 0$. La solution s'écrit :

$$\delta\vec{q} = \begin{pmatrix} f(r_1)B^{(1)} \\ B^{(1)} \end{pmatrix} e^{r1t} + \begin{pmatrix} f(r_2)B^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} e^{r2t} + \begin{pmatrix} f(r_3)B^{(3)} \\ B^{(3)} \end{pmatrix} e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$$

c'est la superposition d'un régime apériodique et d'un régime pseudo-périodique, où les constantes $B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)}$ et φ
sont déterminées à l'aide des conditions initiales.

→ Remarque :

si a = b , $\dfrac{\partial^2 U_P}{\partial q_1^2}(q_1^e, q_2^e) = \dfrac{\partial^2 U_P}{\partial q_2^2}(q_1^e, q_2^e)$ et $\left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\right]_{qe}^2 = \left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\right]_{qe}^2$

Le systèmeest accordé; le changement de variables :

$$s(t) = \varepsilon(t) + \mu(t) \quad \text{et} \quad d(t) = \varepsilon(t) - \mu(t)$$

permet, là encore, de découpler et de résoudre rapidement le systèmedes équations.

III-VIBRATIONS FORCEES:

$\rightarrow$ Equations des vibrations :

En un point P du système$(\sum)$, on introduit une force excitatrice sinusoidale de pulsation Ω connue :

$\vec{F} = F_m \cos \Omega t\, \vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire et F_m est un infiniment petit du premier ordre

Comme : $\vec{V}(P/R) = \dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}\dot{q}_2$ et $\vec{V}^*(P) = \dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1} q_1^* + \dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2} q_2^*$

la puissance virtuelle de cet effort est $P^* = \vec{F}.\vec{V}^*(P) = F_m \cos \Omega t\, \vec{u}\,.\vec{V}^*(P) = F_m \cos \Omega t \left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}.\vec{u} q_1^* + \dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}.\vec{u}\, q_2^*\right]$

les composantes de force généralisée correspondantes sont :

$$Q_{q1} = \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}.\vec{u}\right] F_m \cos \Omega t \quad \text{et} \quad Q_{q2} = \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}.\vec{u}\right] F_m \cos \Omega t$$

à l'ordre 1 au voisinage de la position d'équilibre, elles valent :

$$Q_\varepsilon = \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}.\vec{u}\right]_{qe} F_m \cos\Omega t \quad \text{et} \quad Q_\mu = \left[\frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}.\vec{u}\right]_{qe} F_m \cos\Omega t$$

on posera, par la suite : $F_1 = \left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_1}.\vec{u}\right]_{qe} F_m$ et $F_2 = \left[\dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial q_2}.\vec{u}\right]_{qe} F_m$

Le système des équations du mouvement linéarisées s'écrit : $IA\, \delta \ddot{q} + IC\, \delta\dot{q} + IB\, \delta q = \begin{pmatrix} F_1 \cos \Omega t \\ F_2 \cos \Omega t \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Résolution :

Les solutions particulières sont de même pulsation Ω que l'effort excitateur et déphasées par rapport à celui - ci

$$\delta q = \begin{pmatrix} \varepsilon(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos(\Omega t + \varphi) \\ B\cos(\Omega t + \psi) \end{pmatrix}$$

En complexes, on pose $\begin{pmatrix} F_1 \cos \Omega t \\ F_2 \cos \Omega t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} e^{j\Omega t}$

et $\delta q^C = \begin{pmatrix} \varepsilon^C(t) \\ \mu^C(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\, e^{j(\Omega t+\varphi)} \\ B e^{j(\Omega t+\psi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\, e^{j\varphi} \\ B e^{j\psi} \end{pmatrix} e^{j\Omega t} = \begin{pmatrix} A\, e^{j\varphi} \\ B e^{j\psi} \end{pmatrix} e^{j\Omega t} = \begin{pmatrix} A^C \\ B^C \end{pmatrix} e^{j\Omega t}$

$A = |A^C|$, $\varphi = \arg A^C$, $B = |B^C|$ et $\psi = \arg B^C$

on obtient un systèmealgébrique , non homogène de 2 équations à 2 inconnues A^C et B^C

puisque $e^{j\Omega t} \neq 0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} P(\Omega)\,A^C + Q(\Omega)\,B^C = F_1 \\ R(\Omega)\,A^C + S(\Omega)\,B^C = F_2 \end{cases}$

où $P(\Omega)$, $Q(\Omega)$, $R(\Omega)$ et $S(\Omega)$ sont des polynomesde degré inférieurs ou égal à 2 en Ω

$$A^C = \frac{\det_{AC}}{\det} = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & Q(\Omega) \\ F_2 & S(\Omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P(\Omega) & Q(\Omega) \\ R(\Omega) & S(\Omega) \end{vmatrix}} = \frac{F_1\,S(\Omega) - F_2\,Q(\Omega)}{P(\Omega)\,S(\Omega) - Q(\Omega)\,R(\Omega)} \quad \text{d'où} \quad A = \left|A^C\right| \ \text{et} \quad \varphi = \arg A^C$$

$$B^C = \frac{\det_{BC}}{\det} = \frac{\begin{vmatrix} P(\Omega) & F_1 \\ R(\Omega) & F_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P(\Omega) & Q(\Omega) \\ R(\Omega) & S(\Omega) \end{vmatrix}} = \frac{F_2\,P(\Omega) - F_1\,R(\Omega)}{P(\Omega)\,S(\Omega) - Q(\Omega)\,R(\Omega)} \quad \text{d'où} \quad B = \left|B^C\right| \ \text{et} \quad \varphi = \arg B^C$$

$\rightarrow$ Si $\exists$ une pulsation excitatrice Ω telle que $\det = 0$ A et B $\rightarrow \infty$ résonance d'amplitude.

$\rightarrow$ Si $\exists$ une pulsation excitatrice Ω telle que $\det_{Ac} = 0$ (ou $\det_{BC} = 0$) alors $A = 0$ (ou $B = 0$) anti - résonance pour A (ou pour B).