Université Mohammed V **Année 2020-2021**
Faculté des Sciences

Travaux Dirigés de Mécanique Analytique
Série n° 1-SMP5

Exercice 1 :

Une sphère (S) homogène, de masse m, de centre G et de rayon R est astreinte à se déplacer sur le plan horizontal fixe $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ du repère orthonormé direct $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

1- Paramétrer la sphère (S).

2- Calculer son énergie cinétique compatible avec les liaison $T(S/R_0)$ par rapport à R_0.

On suppose, de plus, que (S) roule sans glisser sur le plan horizontal fixe $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

3- Traduire le non glissement de (S) par rapport à $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

4- Quelle est la nature de cette nouvelle liaison ?

5- Donner son énergie cinétique compatible avec les liaisons $T(S/R_0)$ par rapport à R_0.

Exercice 2 :

Par rapport au repère orthonormé direct $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ où $O\vec{z}_0$ est la verticale ascendante, on considère le mouvement du système $(\sum)$ constitué de deux disques verticaux, homogènes et identiques (D) et (D') de centres respectifs C et C', de masse m chacun et de rayon R et d'une tige rectiligne homogène (CC') de longueur $2L$, de meme masse m et de centre G. On suppose à chaque instant :

- que les disques (D) et (D') sont en contact ponctuel permanent en (I) et (J) avec le plan horizontal fixe $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.
- et que la tige (CC') est portée par l'axe de symétrie de révolution commun $C\vec{z} = C'\vec{z}$ des disques (D) et (D').

1- Quel est le nombre de paramètres primitifs du système $(\sum)$?

2- Faire l'inventaire de toutes les liaisons imposées au système $(\sum)$. Quelle est leur nature ?

3- Quels sont les paramètres principaux du système $(\sum)$ si toutes ces liaisons sont principales.

4- Donner, dans ce cas, l'énergie cinétique compatible $T(\sum /R_0)$ par rapport à R_0.

Exercice 3 :

Dans le plan vertical fixe $(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ du repère orthonormé direct $R_0(O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ où $O\vec{x}_0$ est la verticale descendante, on considère le pendule double $(\sum)$ constitué de deux tiges identiques (OA) et (AB) articulées en A, rectilignes, homogènes, de longueur $2L$ chacune et de centres respectifs G_1et G_2.

On introduit les repères orthonormés directs $R_1(O; \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{z}_0)$ lié à (OA) et $R_2(A; \vec{u}_2, \vec{v}_2, \vec{z}_0)$ lié à (AB) tels que :

$$O\vec{G}_1 = L\vec{u}_1 \qquad \text{et} \qquad A\vec{G}_2 = L\vec{u}_2$$

et on pose : $\theta_1 = (O\vec{x}_0, O\vec{u}_1)$ et $\theta_2 = (G_2\vec{x}_0, G_2\vec{u}_2)$.

A tout instant, un dispositif approprié impose, dans ce système, la liaison $\theta_1 = \omega t + \theta_{1_0}$.

1- Quelle est la nature de cette nouvelle liaison ?

2- Quelle sera la forme de l'énergie cinétique $T(\sum /R_0)$ compatible avec toutes les liaisons ?

Exercice 4 :

On considère un disque (D) homogène de centre C, de masse M et de rayon R en mouvement par rapport au repère orthonormé direct $R_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ où $O\vec{z}_0$ est la verticale ascendante, de manière que :

a- (D) soit en contact ponctuel permanent avec le plan horizontal $(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0)$.

b- (D) roule sans glisser sur ce plan.

c- la précession Ψ de (D) est donnée par $\Psi(\mathrm{t}) = \omega\mathrm{t} + \Psi_0$, ω et Ψ_0 étant des constantes.

1- Traduire les liaisons a et b.

2- Si P est un point de la circonférence de (D), donner les vitesses réelles $\vec{V}(C/R_0)$, $\vec{V}(P/R_0)$ puis les vitesses virtuelles $\vec{V}^*(C)$ et $\vec{V}^*(P)$ compatibles avec la liaison a, puis avec les liaisons a et b et enfin avec a, b et c.

Exercice 5 :

Par rapport au repère orthonormé, galiléen et direct $R_0(O;\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ où $O\vec{z}_0$ est la verticale ascendante, on considère, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, le mouvement du système $(\sum\ )$ constitué :

- d'une tige rectiligne homogène (OA) de longueur L, de masse m et de centre G.
- et d'une particule matérielle M de même masse m que la tige (OA).

On suppose à chaque instant que la particule M coulisse sur la tige (OA) dont la nutation θ varie uniformément par rapport au temps $\left(\dot{\theta} = \omega = cste\right)$.

1- Paramétrer le système $(\sum\ )$ ainsi formé et préciser les paramètres principaux q_i.

2- En considérant le paramétrage complet, calculer les vecteurs $\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}$ puis la vitesse réelle $\vec{V}(M/R_0)$ et la vitesse virtuelle $\vec{V}^*(M)$ de M.

3- Calculer les puissances réelles et virtuelles de tous les efforts s'exerçant sur M dans R_0.