Université Mohammed V-Rabat **Année universitaire 2020-2021**
Faculté des Sciences – Rabat.

S.M.P.5 -Module 28.
Travaux dirigés de Vibrations.
Série n° 1.

Exercice 1 :

Dans le plan vertical fixe (O ;$\overrightarrow{x_0}$,$\overrightarrow{y_0}$) du repère orthonormé , direct et galiléen $R_0(0,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ où O$\overrightarrow{y_0}$ est la verticale ascendante , on considère, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, le mouvement sans frottement d'une particule M de masse m sur une paroi d'équation $y = ax^2$ où a > 0.

1-Ecrire l'équation du mouvement de M par rapport à R_0. Déterminer sa position d'équilibre et étudier sa stabilité.

2-A partir de l'équation du mouvement de M linéarisée au voisinage de cette position d'équilibre déterminer la pulsation ω_0 des petits mouvements de M.

3-Reprendre l'exercice lorsque le déplacement de M se fait avec frottement (α étant le coefficient de frottement visqueux).

Exercice 2 :

Dans le plan vertical fixe (O ;$\overrightarrow{x_0}$; $\overrightarrow{y_0}$) du repère orthonormé, direct et galiléen $R_0(0,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ où O$\overrightarrow{y_0}$ est la verticale ascendante, on considère, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, le mouvement sans frottement d'un tige (AB) rectiligne, homogène, de longueur 4L, de masse m et de centre G. La tige (AB) peut tourner librement autour de son point fixe 0 tel que AO=L. (AB) est reliée au sol par deux ressorts longitudinaux, verticaux, de masse négligeable, de raideurs respectives K_1, K_2 et de longueurs naturelles respectives L_1 et L_2, l'un fixe en A et l'autre en B. On note H la distance du point O au sol.(Figure 1).

On pose : $\Theta = (O\overrightarrow{x_0}, A\vec{B})$

1-Donner l'énergie potentielle Up (AB/R0) et l'énergie cinétique T(AB/R0).

2-Déterminer la position d'équilibre Θ^e de (AB) dans R0 et étudier sa stabilité.

3-Ecrire l'équation des petites oscillations de ce système au voisinage de Θ^e et préciser leur pulsation propre ω_0.

Exercice 3 :

Dans le plan vertical fixe (O ;$\overrightarrow{x_0}$; $\overrightarrow{y_0}$) du repère orthonormé, direct et galiléen $R0(0,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ où O$\overrightarrow{y_0}$ est la verticale ascendante, on considère, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, le mouvement du système ($\sum$) constitué :

-d'une tige (OA) rectiligne, homogène, de longueur 2L, de masse m et de centre G pouvant tourner sans frottement autour de son point fixe 0

-de deux ressorts longitudinaux, verticaux, de masse négligeable, identiques, de raideurs K et de longueur naturelle l chacun.

-et d'un amortisseur de coefficient d'amortissement α(voir figure 2).

R(0,$\vec{u}$,$\vec{v}$,$\overrightarrow{z_0}$) étant le repère lié à la tige (OA), on pose : $\Theta = (O\overrightarrow{x_0}, O\vec{u})$ et on se limitera aux petits mouvements de Θ de manière à ce que les ressorts restent pratiquement longitudinaux.

1-Etablir l'équation du mouvement de (∑) par rapport à R_0.

2-Déterminer la position d'équilibre Θ^e de (OA) dans R_0.

3-En introduisant l'infiniment petit du premier ordre : $\varepsilon = \Theta - \Theta^e$, écrire l'équation du mouvement de (∑) linéarisée au voisinage de Θ^e et étudier sa stabilité.

4-Quelle est la condition sur le coefficient de frottement α pour que le système (∑) soit le siège de vibrations pseudo-périodiques ? Préciser, dans ce cas, la pulsation propre ω_0,le temps caractéristique τ et la pseudo-pulsation ω de ce système.

5-Exprimer ces vibrations $\varepsilon(t)$ pour :$\varepsilon(t = 0) = \varepsilon_0 \neq 0$ et $\dot{\epsilon}(t = 0) = \dot{\varepsilon}_0 \neq 0$.

6-Un couple excitateur $\vec{C} = C \cos(\Omega t)\, \overrightarrow{z_0}$ agit sur la tige (OA). Ecrire l'équation linéarisée des vibrations forcées de (∑) et donner l'expression de ces vibration forcées $\varepsilon_f(t)$.

Exercice 4 :

Dans le plan vertical fixe (O ;$\overrightarrow{x_0}$; $\overrightarrow{y_0}$) du repère orthonormé, direct et galiléen R_0(0,$\overrightarrow{x_0}$,$\overrightarrow{y_0}$,$\overrightarrow{z_0}$) où O$\overrightarrow{y_0}$ est la verticale ascendante, on considère, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, le mouvement du système conservatif (∑) constitué :

-d'une tige rectiligne (OA) homogène, de longueur 2L, de masse m, de centre G et d'axe G$\vec{u}$. On note I le moment d'inertie en O de la tige (OA) par rapport à l'axe O$\overrightarrow{z_0}$ et on suppose que (OA) peut tourner sans frottement autour de son extrémité fixe O

-et d'un ressort longitudinal, de masse négligeable, de raideurs $K = \frac{mg}{4L}$ et de longueur naturelle *nulle*,reliant à tout instant l'extrémité A de la tige au point fixe B du plan vertical tel que $O\vec{B} = -2L\overrightarrow{x_0}$ (Figure 3).

Soit R (0,$\vec{u}$,$\vec{v}$,$\overrightarrow{z_0}$) le repère lié à la tige (OA) ; on pose : $\Theta = (O\overrightarrow{x_0}, O\vec{u})$.

1-Exprimer dans le repère R_0 les composantes du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

2-Donner les expressions des énergies cinétique T(∑/R_0) et potentielle Up(∑/R_0) du système (∑) par rapport à R0.

3-Etablir l'équation du mouvement de (∑) par rapport à R0

4-Déterminer les positions d'équilibre ${\Theta_1}^e$ et ${\Theta_2}^e$ de (AB) dans R_0 et étudier leur stabilité.

5-En introduisant l'infiniment petit du premier ordre $\varepsilon = \Theta - \Theta^e$,on se place au voisinage de la position d'équilibre stable :

a-écrire l'équation du mouvement de (∑) linéarisée au voisinage de cette position d'équilibre

b-sachant qu'à l'instant initial t=0 : $\varepsilon(t = 0) = 0$ et $\dot{\varepsilon}(t = 0) = \dot{\varepsilon_0} > 0$,donner l'expression des vibrations $\varepsilon(t)$ en précisant la pulsation propre ω_0.

6-On suppose, dans ce qui suit, qu'une force excitatrice $\vec{F} = F\cos(2\omega_0 t)\,\vec{v}$ (F infiniment petit d'ordre 1) appliquée en A agit sur la tige (OA). Ecrire l'équation linéarisée des vibrations forcées de $(\sum)$ et donner l'expression des vibrations forcées $\varepsilon_f(t)$ de ce système.