

S.M.P.5 -Module 28.
Travaux dirigés de Vibrations.
Série n° 1.

Exercice 1 :

Dans le plan vertical fixe $(O ; \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ du repère orthonormé, direct et galiléen $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ où $O\vec{y}_0$ est la verticale ascendante, on considère, dans le champ de pesanteur \vec{g} , le mouvement sans frottement d'une particule M de masse m sur une paroi d'équation $y = ax^2$ où $a > 0$.

1-Ecrire l'équation du mouvement de M par rapport à R_0 . Déterminer sa position d'équilibre et étudier sa stabilité.

2-A partir de l'équation du mouvement de M linéarisée au voisinage de cette position d'équilibre déterminer la pulsation ω_0 des petits mouvements de M.

3-Reprendre l'exercice lorsque le déplacement de M se fait avec frottement (α étant le coefficient de frottement visqueux).

Exercice 2 :

Dans le plan vertical fixe $(O ; \vec{x}_0; \vec{y}_0)$ du repère orthonormé, direct et galiléen $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ où $O\vec{y}_0$ est la verticale ascendante, on considère, dans le champ de pesanteur \vec{g} , le mouvement sans frottement d'un tige (AB) rectiligne, homogène, de longueur $4L$, de masse m et de centre G. La tige (AB) peut tourner librement autour de son point fixe O tel que $AO=L$. (AB) est reliée au sol par deux ressorts longitudinaux, verticaux, de masse négligeable, de raideurs respectives K_1, K_2 et de longueurs naturelles respectives L_1 et L_2 , l'un fixe en A et l'autre en B. On note H la distance du point O au sol.(Figure 1).

On pose : $\theta = (O\vec{x}_0, \vec{AB})$

1-Donner l'énergie potentielle U_p (AB/ R_0) et l'énergie cinétique T (AB/ R_0).

2-Déterminer la position d'équilibre θ^e de (AB) dans R_0 et étudier sa stabilité.

3-Ecrire l'équation des petites oscillations de ce système au voisinage de θ^e et préciser leur pulsation propre ω_0 .

Exercice 3 :

Dans le plan vertical fixe $(O ; \vec{x}_0; \vec{y}_0)$ du repère orthonormé, direct et galiléen $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ où $O\vec{y}_0$ est la verticale ascendante, on considère, dans le champ de pesanteur \vec{g} , le mouvement du système (Σ) constitué :

-d'une tige (OA) rectiligne, homogène, de longueur $2L$, de masse m et de centre G pouvant tourner sans frottement autour de son point fixe O

-de deux ressorts longitudinaux, verticaux, de masse négligeable, identiques, de raideurs K et de longueur naturelle l chacun.

-et d'un amortisseur de coefficient d'amortissement α (voir figure 2).

$R(0, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ étant le repère lié à la tige (OA), on pose : $\theta = (O\vec{x}_0, O\vec{u})$ et on se limitera aux petits mouvements de θ de manière à ce que les ressorts restent pratiquement longitudinaux.

1-Etablir l'équation du mouvement de (Σ) par rapport à R_0 .

2-Déterminer la position d'équilibre θ^e de (OA) dans R_0 .

3-En introduisant l'infiniment petit du premier ordre : $\varepsilon = \theta - \theta^e$, écrire l'équation du mouvement de (Σ) linéarisée au voisinage de θ^e et étudier sa stabilité.

4-Quelle est la condition sur le coefficient de frottement α pour que le système (Σ) soit le siège de vibrations pseudo-périodiques ? Préciser, dans ce cas, la pulsation propre ω_0 , le temps caractéristique τ et la pseudo-pulsation ω de ce système.

5-Exprimer ces vibrations $\varepsilon(t)$ pour : $\varepsilon(t=0) = \varepsilon_0 \neq 0$ et $\dot{\varepsilon}(t=0) = \dot{\varepsilon}_0 \neq 0$.

6-Un couple excitateur $\vec{C} = C \cos(\Omega t) \vec{z}_0$ agit sur la tige (OA). Ecrire l'équation linéarisée des vibrations forcées de (Σ) et donner l'expression de ces vibration forcées $\varepsilon_f(t)$.

Exercice 4 :

Dans le plan vertical fixe $(O; \vec{x}_0; \vec{y}_0)$ du repère orthonormé, direct et galiléen $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ où $O\vec{y}_0$ est la verticale ascendante, on considère, dans le champ de pesanteur \vec{g} , le mouvement du système conservatif (Σ) constitué :

-d'une tige rectiligne (OA) homogène, de longueur $2L$, de masse m , de centre G et d'axe $G\vec{u}$. On note I le moment d'inertie en O de la tige (OA) par rapport à l'axe $O\vec{z}_0$ et on suppose que (OA) peut tourner sans frottement autour de son extrémité fixe O

-et d'un ressort longitudinal, de masse négligeable, de raideurs $K = \frac{mg}{4L}$ et de longueur naturelle nulle, reliant à tout instant l'extrémité A de la tige au point fixe B du plan vertical tel que $O\vec{B} = -2L\vec{x}_0$ (Figure 3).

Soit $R(0, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ le repère lié à la tige (OA) ; on pose : $\theta = (O\vec{x}_0, O\vec{u})$.

1-Exprimer dans le repère R_0 les composantes du vecteur \vec{BA} .

2-Donner les expressions des énergies cinétique $T(\Sigma/R_0)$ et potentielle $U_p(\Sigma/R_0)$ du système (Σ) par rapport à R_0 .

3-Etablir l'équation du mouvement de (Σ) par rapport à R_0

4-Déterminer les positions d'équilibre θ_1^e et θ_2^e de (AB) dans R_0 et étudier leur stabilité.

5-En introduisant l'infiniment petit du premier ordre $\varepsilon = \theta - \theta^e$, on se place au voisinage de la position d'équilibre stable :

a-écrire l'équation du mouvement de (Σ) linéarisée au voisinage de cette position d'équilibre

b-sachant qu'à l'instant initial $t=0$: $\varepsilon(t=0) = 0$ et $\dot{\varepsilon}(t=0) = \dot{\varepsilon}_0 > 0$, donner l'expression des vibrations $\varepsilon(t)$ en précisant la pulsation propre ω_0 .

6-On suppose, dans ce qui suit, qu'une force excitatrice $\vec{F} = F \cos(2\omega_0 t) \vec{v}$ (F infiniment petit d'ordre 1) appliquée en A agit sur la tige (OA). Ecrire l'équation linéarisée des vibrations forcées de (Σ) et donner l'expression des vibrations forcées $\varepsilon_f(t)$ de ce système.

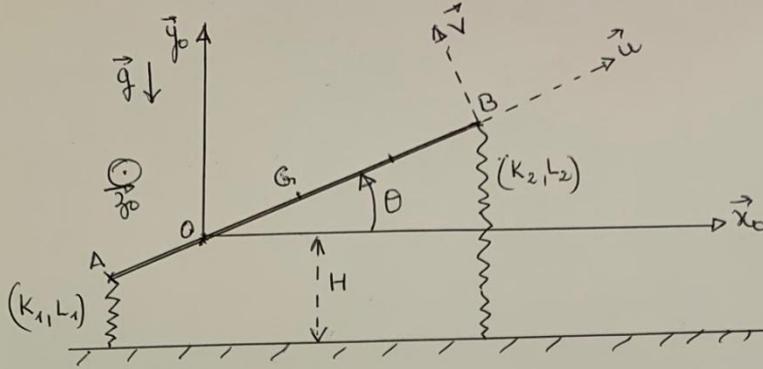


Fig 1

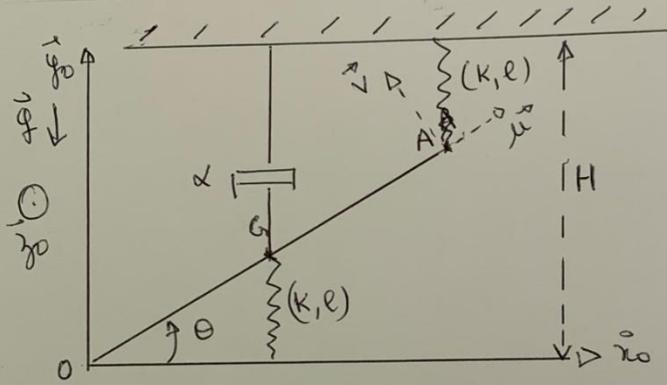


Fig 2

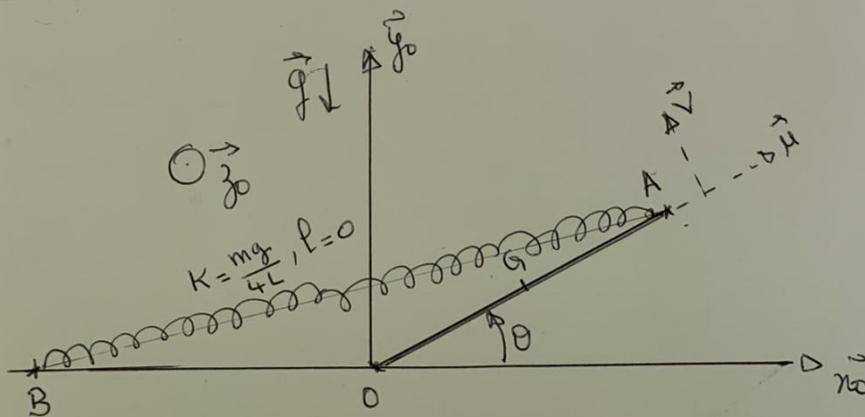


Fig 3