

S.M.P.5 -Module 28.
Travaux dirigés de Vibrations.
Série n° 2.

Exercice 1 :

Par rapport au repère orthonormé direct galiléen R_0 , l'énergie cinétique $T(\Sigma/R_0)$ et l'énergie potentielle $U_p(\Sigma/R_0)$ d'un système conservatif (Σ), à deux paramètres principaux θ et Ψ , sont données par :

$$T(\Sigma/R_0) = K[2\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\Psi}\cos(\Psi - \theta)]$$

$$\text{et } U_p(\Sigma/R_0) = -H[2\cos\theta + \cos\Psi]$$

Où K et H sont deux constantes données strictement positives.

1-Ecrire les équations de Lagrange du mouvement de (Σ) par rapport à R_0 .

2-Montrer que la position ($\Psi^e = 0, \theta^e = 0$) est une position d'équilibre stable de (Σ) par rapport à R_0 .

3-En introduisant les infiniment petits du premier ordre $\varepsilon = \Psi - \Psi^e$ et $\mu = \theta - \theta^e$ et en posant $\Omega^2 = \frac{H}{2K}$, écrire le système des équations du mouvement de (Σ) par rapport à R_0 linéarisées au voisinage de cette position d'équilibre.

4-En cherchant les solutions particulières de ce système, ayant même pulsation et même phase

$$\varepsilon = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad \mu = B \cos(\omega t + \varphi)$$

Ecrire l'équation caractéristique associée à ce système d'équations linéarisées. Montrer que le système (Σ) admet deux modes propres de vibration dont on déterminera les pulsations ω_1 et ω_2 en fonction de Ω .

5-Pour chaque mode propre de vibration $i=1,2$ calculer le rapport des amplitudes $\frac{A^{(i)}}{B^{(i)}}$

6-Sachant qu'à l'instant initial $t=0$:

$$\varepsilon_0 = \mu_0 = \alpha \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}_0 = \dot{\mu}_0 = 0 \quad \text{ou } \alpha \text{ est une constante strictement positive}$$

Donner les expressions des vibrations libres $\varepsilon(t)$ et $\mu(t)$ de (Σ).

Exercice 2 :

Dans le plan vertical fixe $(0; \vec{x}_0; \vec{y}_0)$ du repère orthonormé, direct et galiléen $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ où $O\vec{x}_0$ est la verticale descendante, on considère, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, le mouvement sans frottement du système (Σ) constitué de deux pendules identiques (OM_1) et (AM_2) constitué chacun

d'un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur L au bout duquel est accrochée une particule matérielle $M_i (i=1,2)$. Les deux particules sont de même masse m . M_1 et M_2 sont couplées par un ressort longitudinal de masse négligeable, de raideur K et de longueur naturelle L on donne $\overrightarrow{OA} = l\overrightarrow{y_0}$.

(voir figure 1)

On note $R_i (0, \overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{z_0})$ $i = 1,2$ le repère lié au pendule i et on pose : θ_i l'angle qu'il fait avec la verticale. On se limitera aux petits mouvements en $\theta_i (i = 1,2)$ de manière à ce que le ressort reste pratiquement longitudinal.

1-Donner la position d'équilibre (θ_1^e, θ_2^e) de (Σ) et étudier sa stabilité

2-Ecrire les équations du mouvement de (Σ) linéarisées au voisinage de (θ_1^e, θ_2^e) . Définir la pulsation fondamentale Ω de (Σ) .

3-Calculer les vibrations de (Σ) sachant qu'à l'instant initial $t=0$: $\varepsilon(0) = (\theta_1 - \theta_1^e)(t=0) = \varepsilon_0 > 0$ et $\mu(t=0) = (\theta_2 - \theta_2^e)(t=0) = \dot{\varepsilon}(t=0) = \dot{\mu}(t=0) = 0$. Définir les pulsations ω_1 et ω_2 des modes propres de vibration de (Σ) .

Exercice 3 :

Sur l'axe horizontal $O\overrightarrow{x_0}$ du repère orthonormé, fixe, direct et galiléen $R_0(0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$, on considère les oscillations du système (Σ) constitué :

-de deux particules matérielles M_1 et M_2 de même masse m

-d'un ressort longitudinal, horizontal, de masse négligeable, de raideur K et de longueur naturelle L

-et de deux amortisseurs linéaires, identiques, de masse négligeable et de coefficient d'amortissement α chacun tel que : $\alpha < \sqrt{8mK}$

disposés comme l'indique la figure 2 .On pose : $O\overrightarrow{M_i} = X_i\overrightarrow{x_0}$ pour $i = 1,2$

1-Donner l'énergie cinétique $T(\Sigma/R_0)$, l'énergie potentielle $U_p(\Sigma/R_0)$ de (Σ) par rapport à R_0 ainsi que la puissance virtuelle P^* des efforts exercés par les amortisseurs.

2- Ecrire les équations de Lagrange du mouvement de (Σ) par rapport à R_0 .

3-Montrer que toute position (X_1, X_2) de (Σ) vérifiant : $X_1 - X_2 = L$, est une position d'équilibre de (Σ) dans R_0 .

4-soit (X_1^e, X_2^e) une de ces positions d'équilibre de (Σ) , en introduisant les infiniment petits : $\varepsilon = X_1 - X_1^e$ et $\mu = X_2 - X_2^e$, et en posant $\lambda = \frac{\alpha}{m}$ et $\Omega^2 = \frac{k}{m}$,écrire les équations du mouvement de (Σ) linéarisées au voisinage de (X_1^e, X_2^e) .

5-En appliquant le critère de Liapunov étudier la stabilité de (X_1^e, X_2^e) .

6-On suppose dans ce qui suit, qu'une force excitatrice $\vec{F} = F \cos(\omega t) \vec{x}_0$ agit sur la particule M2 ($\omega > 0$ et $\frac{F}{m}$ est un infiniment petit du premier ordre). Calculer la puissance virtuelle de $\vec{F}$ et écrire les équations linéarisées des vibrations forcées de (Σ) . Résoudre.

