

Travaux Dirigés de Physique Quantique
Série 2
Moment cinétique de spin

Exercice 1: Mesures d'un moment de spin sous champ magnétique

On considère une particule de $S = \frac{1}{2}$ de moment magnétique $\vec{M} = \gamma \vec{S}$. L'espace des états de spin est engendré par les vecteurs de base $| + \rangle$ et $| - \rangle$, vecteurs propres de S_z correspondant aux valeurs propres $+\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$. A l'instant $t = 0$, l'état du système est $|\psi(t=0)\rangle = | + \rangle$.

1- Quels sont les résultats possibles d'une mesure de S_x à $t = 0$ et quelles sont leurs probabilités ?

2- Au lieu de mesurer S_x à $t = 0$, on laisse évoluer le système sous l'influence d'un champ magnétique parallèle à Oy et de module B_0 . Calculer, dans la base $\{| + \rangle, | - \rangle\}$, l'état du système à l'instant t .

3- A cet instant t , on mesure les observables S_x , S_y , S_z . Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Quelle relation doit exister entre B_0 et t pour que le résultat de l'une des mesures soit certain. Donner une interprétation physique de cette condition ?

Exercice 2:Précession d'un spin dans un champ magnétique

On considère une particule non chargée de spin $1/2$ soumise à un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$ parallèle à l'axe Oz . On note $\vec{S}$ l'opérateur de spin. Soit le vecteur unitaire $\vec{u}$ pointant dans la direction spécifiée par les angles (θ, φ) des coordonnées sphériques.

1- Calculer la matrice S_u représentant la composante du spin selon l'axe de vecteur unitaire $\vec{u}$.

2- Calculer S_u^2 .

3- Calculer les valeurs propres de S_u et montrer que ses vecteurs propres, notés $| + \rangle_u$ et $| - \rangle_u$ sont donnés, dans la base $\{| + \rangle, | - \rangle\}$ des vecteurs propres de S_z , par:

$$| + \rangle_u = e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} | + \rangle + e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} | - \rangle$$

$$| - \rangle_u = e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2} | + \rangle - e^{i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2} | - \rangle$$

4- Calculer les valeurs moyennes des trois composantes du spin dans l'état $| + \rangle_u$ et montrer que $\langle \vec{S} \rangle_u = \frac{\hbar}{2} \vec{u}$.

5- On prépare le système, à l'instant $t = 0$, dans l'état $| + \rangle_u$ et on le laisse évoluer sous l'action du champ $\vec{B}$. On note par $\vec{M} = \gamma \vec{S}$ le moment magnétique de la particule, où γ est le facteur gyromagnétique.

Écrire l'hamiltonien de la particule. (On introduira la pulsation de Larmor $\omega = -\gamma B$).

6- Déterminer, à l'instant t , le vecteur d'état de la particule qu'on note $|\psi(t)\rangle$ dans la base $\{| + \rangle, | - \rangle\}$ des états propres de S_z . En déduire que $|\psi(t)\rangle = | + \rangle_{u(t)}$ où $\vec{u}(t)$ est un vecteur unitaire qui évolue au cours du temps et dont on précisera la direction.

7- Quel est le mouvement de $\langle \vec{S} \rangle_{u(t)}$?

8- On effectue à l'instant t la mesure de S_x . Quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités. Même question pour S_y

Exercice 3: Système à deux spins

On considère le système constitué par deux spins $\frac{1}{2}$, $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$. L'espace des états de ce système est le produit tensoriel $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ des espaces des états $\mathcal{E}_1$ de $\vec{S}_1$ et $\mathcal{E}_2$ de $\vec{S}_2$. Une base de cet espace est formée par les quatres vecteurs propres communs à S_{1z} et S_{2z} : $\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$.

A: Compatibilité et incompatibilité des observables

1- Quelles sont, dans $\mathcal{E}$ les valeurs et vecteurs propres de S_{1x}, S_{1y}, S_{1z} et S_{2x}, S_{2y}, S_{2z} .
On suppose que l'état des deux spins est donné par

$$|\psi(0)\rangle = \alpha |++\rangle + \beta |+-\rangle + \gamma |-+\rangle + \delta |--\rangle$$

1- On fait une mesure de S_{1z} et, immédiatement après, une mesure de S_{2z} ; quelle est la probabilité de trouver $\frac{\hbar}{2}$ dans la première mesure et $-\frac{\hbar}{2}$ dans la deuxième? Quel est l'état des deux spins juste après ces mesures?

2 Même question si on inverse l'ordre des mesures.

3 Reprendre les mêmes questions 1 et 2 avec les observables S_{1x} et S_{2z} .

4 Que peut on conclure.

B: Effet du champ magnétique

On suppose qu' à l'instant $t = 0$ le système est dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2} |++\rangle + \frac{1}{2} |+-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |--\rangle.$$

1- A l'instant $t = 0$, on mesure S_{1z} ; Quelle probabilité a-t-on de trouver $-\frac{\hbar}{2}$? Quel est le vecteur d'état après cette mesure? Si l'on mesure ensuite S_{1x} , quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités? Même question si la mesure de S_{1z} a donné $+\frac{\hbar}{2}$.

2- Le système étant dans l'état $|\psi(0)\rangle$ écrit plus haut, on mesure simultanément S_{1z} et S_{2z} ; quelle probabilité a-t-on de trouver des résultats opposés? identiques?

3- Au lieu d'effectuer les mesures précédentes, on laisse évoluer le système sous l'influence de l'hamiltonien: $H = \omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z}$. Quel est le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant t ? Calculer à l'instant t les valeurs moyennes $\langle \vec{S}_1(t) \rangle$ et $\langle \vec{S}_2(t) \rangle$. Interprétation physique.

4- Montrer que les longueurs des vecteurs $\langle \vec{S}_1 \rangle$ et $\langle \vec{S}_2 \rangle$ sont inférieures à $\frac{\hbar}{2}$ (utiliser la question 4 de l'exercice 2); quelle devrait être la forme de $|\psi(0)\rangle$ pour que ces longueurs soient toutes deux égales à $\frac{\hbar}{2}$.

Exercice supplémentaire

Spin d'un atome plongé dans un champ magnétique variable

On considère une particule de spin $S = \frac{1}{2}$, de moment magnétique de spin $\vec{M} = \gamma \vec{S}$ (γ est le rapport gyromagnétique). Cette particule est plongée dans un champ magnétique constant $\vec{B}_0$ porté par l'axe Oz , et un champ $\vec{B}_1(t)$ perpendiculaire à $\vec{B}_0$, de module constant et tournant autour de $\vec{B}_0$ à la vitesse angulaire constante ω . On pose $\omega_0 = -\gamma B_0$ et $\omega_1 = -\gamma B_1$.

1- Donner l'expression de l'hamiltonien du système ainsi que la matrice qui le représente dans

la base $(| + \rangle, | - \rangle)$ des vecteurs propres de S_z .

2- L'état du système à un instant t peut se mettre sous la forme

$$|\psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle.$$

Ecrire l'équation de Schrödinger et en déduire les équations d'évolution des fonctions $a_+(t)$ et $a_-(t)$.

3- a) En effectuant le changement de fonctions $b_+(t) = a_+(t)e^{i\omega t/2}$ et $b_-(t) = a_-(t)e^{-i\omega t/2}$, montrer que le système des équations d'évolution des fonctions $b_+(t)$ et $b_-(t)$ est équivalent à une équation de Schrödinger $i\hbar \frac{d|\tilde{\psi}(t)\rangle}{dt} = \tilde{H} |\tilde{\psi}(t)\rangle$ d'un système conservatif. On suppose que le système est préparé à l'instant $t = 0$ dans l'état $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$ et on pose $\Delta\omega = \omega - \omega_0$.

b) On souhaite résoudre cette équation par deux méthodes de calcul différentes.

Première méthode: Diagonalisation de la matrice $\tilde{H}$

i- Montrer que les valeurs propres de $\tilde{H}$ sont données par

$$E_+ = \frac{\hbar\Omega}{2}, \quad E_- = -\frac{\hbar\Omega}{2} = -E_+$$

où $\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + (\Delta\omega)^2}$.

ii- En posant $\cos\theta = -\frac{\Delta\omega}{\Omega}$, $\sin\theta = \frac{\omega_1}{\Omega}$

Montrer que les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont respectivement

$$|\varphi_+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle, \quad |\varphi_-\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|-\rangle$$

En déduire $|\tilde{\psi}(t)\rangle$.

Deuxième méthode: Développement de l'opérateur d'évolution $U(t, 0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{H}t}$

i- Montrer que $\tilde{H}^2 = (\frac{\hbar\Omega}{2})^2 \mathbb{1}$ où $\mathbb{1}$ est la matrice identité.

ii- En développant $e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{H}t}$ en série entière, montrer que

$$U(t, 0) = \cos\frac{\Omega t}{2} \mathbb{1} - 2\frac{i}{\Omega} \sin\frac{\Omega t}{2} \mathbb{M}$$

où $\mathbb{M}$ est une matrice à déterminer.

En déduire $|\psi(t)\rangle$.

4 L'état de spin de l'atome à l'instant $t = 0$ est $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$. Quelle est la probabilité de trouver à l'instant t ce spin dans l'état $|-\rangle$? Représenter graphiquement cette probabilité dans les deux cas suivants : $|\Delta\omega| \gg |\omega_1|$ (loin de la résonance) et $|\Delta\omega| \ll |\omega_1|$ (près de la résonance); discuter en particulier le cas de résonance exacte : $|\Delta\omega| = 0$.