

Travaux Dirigés de Physique Quantique
Série 4
Moment cinétique

Exercice 1: Composantes du moment cinétique $J = 3/2$

On considère un système quantique de moment cinétique $J = \frac{3}{2}$. On se place dans la base des vecteurs propres de J_z . Déterminer les matrices représentant les opérateurs J_+ et J_- et en déduire les matrices représentant les observables J_x et J_y .

Exercice 2: Moment cinétique quadrupolaire

On considère un système de moment cinétique $\ell = 1$; une base de son espace des états est constituée par les trois vecteurs propres de L_z : $|1\rangle$, $|0\rangle$, $|-1\rangle$, de valeurs propres respectives $+\hbar$, 0 , $-\hbar$, et tels que : $L_{\pm} |0\rangle = \hbar\sqrt{2} |m \pm 1\rangle$, $L_+ |1\rangle = L_- |-1\rangle = 0$.

Ce système, qui possède un moment quadrupolaire électrique, est plongé dans un gradient de champs électrique, de sorte que son hamiltonien s'écrit : $H = \frac{\omega_0}{\hbar} (L_u^2 - L_v^2)$ où L_u et L_v sont les composantes de $\vec{L}$ sur les deux directions Ou et Ov du plan xOz , à 45 de Ox et Oz ; ω_0 est une constante réelle.

1- Ecrire la matrice représentant H dans la base $\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$. Quels sont les états stationnaires du système, et leurs énergies? (Ces états seront notés : $|E_1\rangle$, $|E_2\rangle$, $|E_3\rangle$, rangés par ordre d'énergies décroissantes).

2- A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état : $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |-1\rangle)$. Quel est le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant t ? A cet instant, on mesure L_z ; quelles sont les probabilités des différents résultats possibles?

3- Calculer les valeurs moyennes $\langle L_x \rangle(t)$, $\langle L_y \rangle(t)$ et $\langle L_z \rangle(t)$ à l'instant t . Quel est le mouvement effectué par le vecteur $\langle \vec{L} \rangle$?

4- On effectue à l'instant t une mesure de L_z .

a. Existe-t-il des instants où un seul résultat est possible ? b. On suppose que cette mesure a donné le résultat $\hbar/2$. Quel est l'état du système immédiatement après la mesure ? Indiquer, sans calcul, son évolution ultérieure.

Exercice 3: Moment orbital

On considère un système de moment orbitale $\vec{L}$ et dont l'hamiltonien est $H = \frac{L_+ L_-}{\hbar}$.

A l'instant $t = 0$, l'état du système est décrit par la fonction d'onde $\psi(\theta, \varphi) = c(1 + \cos \theta \sin \varphi)$.

1- Déterminer la constante c pour que la fonction d'onde $\psi(\theta, \varphi)$ soit normée.

2- Développer cette fonction d'onde en fonction des harmoniques sphériques.

3- Déterminer la fonction d'onde $\psi(\theta, \varphi, t)$ à l'instant t .

4- Donner les résultats, avec les probabilités correspondantes, qu'on peut trouver lors d'une mesure de L_z . Trouver la fonction d'onde décrivant l'état de la particule juste après cette mesure.

On donne les harmoniques sphériques:

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^{\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$$

Exercice supplémentaire

Moment orbital

-Partie A

On considère un système d'hamiltonien H et de moment orbital $\vec{L}$ dont l'espace des états ξ est engendré par la base $\{|k, \ell, m\rangle\}$ où k est le nombre quantique associé à H et ℓ, m les nombres quantiques associés respectivement à L^2 et L_z .

1- Sachant que dans la représentation $|\vec{r}\rangle$ la fonction d'onde du système est donnée par $\psi_{k,\ell,m}(r, \theta, \varphi) = f(r)Y_\ell^m(\theta, \varphi)$, déterminer les équations différentielles satisfaites par $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$. En déduire que:

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = F_\ell^m(\theta)Z_m(\varphi)$$

où $Z_m(\varphi)$ est une fonction à déterminer.

2- Quelles sont les valeurs que peut prendre ℓ et m Justifiez votre réponse.

3- Calculer $Y_\ell^\ell(\theta, \varphi)$.

4- Montrer que:

$$(L_-)^{\ell-m}Y_\ell^\ell(\theta, \varphi) = (\hbar)^{\ell-m}\sqrt{2\ell \times 2(2\ell-1) \times \dots \times (\ell-m)(\ell+m+1)}Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

En déduire que:

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(2\ell)!(\ell-m)!}} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{\ell-m} Y_\ell^\ell$$

-Partie B

Le système physique est décrit par le vecteur d'état $|\psi\rangle$ dont la fonction d'onde est donnée par :

$$\psi(\vec{r}) = a(r)(Y_2^{-2}(\theta, \varphi) + Y_1^0(\theta, \varphi) + Y_0^0(\theta, \varphi)) + b(r)(Y_3^0(\theta, \varphi) + Y_2^{-1}(\theta, \varphi) + Y_1^1(\theta, \varphi))$$

1- Donner la condition que doivent satisfaire les fonctions $a(r)$ et $b(r)$ pour que $|\psi\rangle$ soit normé.

2- Donner les résultats, avec les probabilités correspondantes, qu'on peut trouver lors d'une mesure de L_z . Même question pour L^2 . En déduire les valeurs moyennes de L_z^2 et L^2 dans l'état $|\psi\rangle$.

3- Calculer la probabilité pour qu'une mesure simultanée de L^2 et L_z sur la particule dans l'état $|\psi\rangle$ donne le résultat $(6\hbar, -\hbar)$.

4- On mesure L_z , le résultat trouvé est $0\hbar$. Trouver la fonction d'onde décrivant l'état de la particule juste après cette mesure.

5- Si la fonction d'onde est donnée par

$$\psi(\vec{r}) = C(r)(1 + \sqrt{\sin(\theta)} \cos(\varphi))$$

5-1 Donner la condition que doit satisfaire la fonction réelle $C(r)$ pour que l'état $\psi(\vec{r})$ soit normé.

5-2 Donner les résultats, avec les probabilités correspondantes, qu'on peut trouver lors d'une mesure de L_z .

On donne:

$$\begin{aligned} L_+ &= \hbar e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) & L_- &= \hbar e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ L_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} & L^2 &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \end{aligned}$$