Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohammed V

SMPC-Algèbre I
Série 1
Année Universitaire 2020-2021

Exercice 1. I) Considérons dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$u = (2, -3, 6), \quad v = (18, -27, 25), \quad w = (\alpha, 9, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1) Les vecteurs u et v sont ils colinéaires? Déduire si la famille $\{u, v\}$ est libre.
2) A quelles conditions sur α et β la famille $\{u, w\}$ est libre?
3) Posons $\alpha = 0$.
i) Pouvez vous construire w en utilisant u, v et les opérations "+" et "." dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$? Déduire que la famille $\{u, v, w\}$ est libre.
ii) Existe t'il $\beta \in \mathbb{R}$ pour lequel la famille $\{u, u + v, w\}$ soit libre?

Exercice 2. 1) Dans chacun des cas suivants, voir si les vecteurs donnés forment une famille libre:
a) Dans $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (3, -1, 0), v_2 = (2, 1, -1), v_3 = (-2, 0, 1)$.
b) Dans $\mathbb{R}^3$: $w_1 = (1, 2, -3), w_2 = (8, 1, 6), w_3 = (7, 2, 3)$.
c) Dans $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1, 2, 0, 4), u_2 = (0, 5, 9, 0), u_3 = (1, 2, -1, 0)$.
2) Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Posons $w = (2, 1, -1)$. Trouver toutes les valeurs de α pour lesquelles $\{e_1, e_2, e_3 + \alpha w\}$ est libre.

Exercice 3. Considérons les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1, 2, -3), \quad u_2 = (-2, -1, 4), \quad v = (1, -1, 0).$$

1) Vérifier que les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires. Ensuite, compléter la famille $\{u_1, u_2\}$ par un élément u_3 de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de sorte que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner les coordonnées du vecteur v dans la base B.
3) Donner la forme de tous les élements de $\mathrm{Vec}\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2\}$ et donner des exemples.
4) Vérifier que les familles

$$B' = \{-2u_1, 3u_2, -u_3\} \text{ et } B" = \{u_1 + u_2, u_2, u_3\}$$

sont des bases de $\mathbb{R}^3$ et déduire les coordonnées de v dans les bases B' et $B"$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^4$, considérons $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x+3z = y\}$.
1) Trouver des vecteurs u_1, u_2, u_3 de $\mathbb{R}^4$ de sorte que $E = \mathrm{Vec}\ \{u_1, u_2, u_3\}$.
2) Donnez 4 vecteurs $v_1, \ldots, v_4$ de $\mathbb{R}^4$, tous non nuls et distincts deux

à deux de sorte que $E = \mathrm{Vec}\{\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_4\}$.
3) Maintenant considérons la structure euclidienne de $\mathbb{R}^4$, posons

$$v = (-1, 1, 2, 3), w = (2, 1, -1, 0).$$

i) Calculer $d(v, 2w)$, $\langle v, w\rangle$.
ii) Trouver les éléments de $\mathbb{R}^4$ orthogonaux à v. Déduire la forme des éléments de E orthogonaux à v.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs $u_1 = (1, 3, -2)$ et $u_2 = (-2, 4, 5)$.
1) Trouver un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $d(w, u_1) = 1$.
2) Trouver tous les vecteurs unitaires $w \in \mathbb{R}^3$ qui soient orthogonaux à u_1 et u_2.
3) Choisissez un vecteur u_3 orthogonal à u_1, u_2 et posons $B = \{u_1, u_2, u_3\}$. Montrer que B est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas orthonormale.
4) Donner $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de B.
5) Dans $\mathbb{R}^3$, soit $v = (6, -9, 5)$. Donner les coordonnées de v dans la base B'. Ensuite, déduire les coordonnées de v dans la base B.

Exercice 6. I) Dans $\mathbb{R}^3$, soit le vecteur $u_1 = (-2, 0, 0)$.
1) Trouver un vecteur w de $\mathbb{R}^3$ pour lequel l'écart angulaire entre u_1 et w soit égal à $\pi/3$.
2) Trouver deux vecteurs u_2, u_3 de $\mathbb{R}^3$ de sorte que $\{u_1, u_2, u_3\}$ soit une base orthogonale.
II) Utiliser l'inégalité de Cauchy Schwartz et montrer les deux inégalités suivantes:
i) Pour tous $x_1, \dots, x_n$ dans $\mathbb{R}^+$,

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 \leq n(\sum_{k=1}^{n} x_k^2).$$

Dans quel cas à t'on l'égalité?
ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)}(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k})^2.$$

Exercice 7. I) Considérons le vecteur $u = (\frac{3}{19}, \frac{9}{19}, \frac{27}{19})$ dans $\mathbb{R}^3$. Donner un vecteur unitaire colinéaire à u.
II) En appliquant le procédé de Gram- Schmidt, orthonormaliser la base donnée dans $\mathbb{R}^3$ dans chacun des cas suivants:
1) $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$, où $u_1 = (1, 1, 0),\ u_2 = (1, 0, -1),\ u_3 = (-1, -1, 1)$.
2) Facultatif: On réordonne les éléments de la base B, $B_1' = \{u_3, u_1, u_2\}$.
3) $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ où $w_1 = (-1, -1, 1), w_2 = (3, 0, 2), w_3 = (5, -1, 4)$.
4) $B_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$, où $v_1 = (1, -2, 2),\ v_2 = (1, 0, -1),\ v_3 = (5, 3, 1)$.