Module Algèbre 1: Généralités et Arithmétique

Programme

1. **Chapitre 1** : Eléments de Logique et Méthodes de Démonstration.
2. **Chapitre 2** : Ensembles, applications et Relations binaires.
3. **Chapitre 3** : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

Eléments de logique

Assertions

Définition 2.1

Une assertion p (ou proposition) est une phrase déclarative exclusivement vraie ou fausse.

Notation 2.2

Une table de vérité associe à l'assertion p les deux possibilités : vrai (V) ou faux (F) :

p
V
F

Exemples 2.3

On considère les phrases suivantes :

Exemples 2.3

On considère les phrases suivantes :

1. *Rabat est la capitale du Maroc.*

Eléments de logique

Assertions

Exemples 2.3

On considère les phrases suivantes :

1. *Rabat est la capitale du Maroc.*
2. $1+1=3$.

Exemples 2.3

On considère les phrases suivantes :

1. *Rabat est la capitale du Maroc.*
2. *1+1=3.*
3. *Quelle heure est-il ?*

Exemples 2.3

On considère les phrases suivantes :

1. *Rabat est la capitale du Maroc.*
2. $1+1=3$.
3. *Quelle heure est-il ?*
4. $x+y=z$.

1) est une assertion vraie et 2) est une assertion fausse. 3) et 4) ne sont pas des assertions.

Eléments de logique

Connecteurs logiques élémentaires

Définitions 2.4

Soit p et q deux assertions.

Définitions 2.4

Soit p et q deux assertions.

- La **négation** de p, notée $\neg p$ (ou non p),

Définitions 2.4

Soit p et q deux assertions.

- La **négation** de p, notée $\neg p$ (ou non p), est l'assertion définie par la table

  de vérité suivante :

Définitions 2.4

Soit p et q deux assertions.

- La **négation** de p, notée $\neg p$ (ou non p), est l'assertion définie par la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Définitions 2.4

Soit p et q deux assertions.

- La **négation** de p, notée $\neg p$ (ou non p), est l'assertion définie par la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
V	F
F	V

- La **conjonction** (p **et** q), notée aussi $p \wedge q$,

Définitions 2.4

Soit p et q deux assertions.

- La **négation** de p, notée $\neg p$ (ou non p), est l'assertion définie par la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
V	F
F	V

- La **conjonction** (p **et** q), notée aussi $p \wedge q$, et la **disjonction** (p **ou** q), notée aussi $p \vee q$, sont définies par les tables de vérité suivantes :

Définitions 2.4

Soit p et q deux assertions.

- La **négation** de p, notée $\neg p$ (ou non p), est l'assertion définie par la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
V	F
F	V

- La **conjonction** (p **et** q), notée aussi $p \wedge q$, et la **disjonction** (p **ou** q), notée aussi $p \vee q$, sont définies par les tables de vérité suivantes :

p	q	p et q	p ou q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Exemples 2.5

Exemples 2.5

1. *Soit p l'assertion "Au moins 100 étudiants assistent au cours d'Algèbre".*

Exemples 2.5

1. *Soit p l'assertion "Au moins 100 étudiants assistent au cours d'Algèbre". La négation de p est l'assertion $\neg p$: "Au plus 99 étudiants assistent au cours d'Algèbre".*

Exemples 2.5

1. *Soit p l'assertion "Au moins 100 étudiants assistent au cours d'Algèbre". La négation de p est l'assertion $\neg p$: "Au plus 99 étudiants assistent au cours d'Algèbre".*
2. *On considère l'assertion p : "Aujourd'hui c'est jeudi" et l'assertion q : "Il pleut aujourd'hui".*

Exemples 2.5

1. *Soit p l'assertion "Au moins 100 étudiants assistent au cours d'Algèbre". La négation de p est l'assertion* $\neg p$ *: "Au plus 99 étudiants assistent au cours d'Algèbre".*
2. *On considère l'assertion p : "Aujourd'hui c'est jeudi" et l'assertion q : "Il pleut aujourd'hui".* $p \wedge q$ *est l'assertion : "Aujourd'hui est jeudi et il pleut aujourd'hui"*

Exemples 2.5

1. *Soit p l'assertion "Au moins 100 étudiants assistent au cours d'Algèbre". La négation de p est l'assertion $\neg p$: "Au plus 99 étudiants assistent au cours d'Algèbre".*
2. *On considère l'assertion p : "Aujourd'hui c'est jeudi" et l'assertion q : "Il pleut aujourd'hui". $p \wedge q$ est l'assertion : "Aujourd'hui est jeudi et il pleut aujourd'hui"tandis que l'assertion $p \vee q$ est "Aujourd'hui est jeudi ou il pleut aujourd'hui".*

Remarque 2.6

Remarque 2.6

Soit p et q deux assertions.

Remarque 2.6

Soit p et q deux assertions.Le connecteur "ou exclusif" est le connecteur, noté

$p \oplus q$, défini par la table de vérité suivante :

Remarque 2.6

Soit p et q deux assertions.Le connecteur "ou exclusif" est le connecteur, noté $p \oplus q$, défini par la table de vérité suivante :

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Définition 2.7

Soit p et q deux assertions.

Définition 2.7

Soit p et q deux assertions.On appelle **implication** de q par p

Définition 2.7

Soit p et q deux assertions.On appelle **implication** de q par p l'assertion $(\neg p) \vee q$.

Définition 2.7

Soit p et q deux assertions.On appelle **implication** de q par p l'assertion $(\neg p) \vee q$.L'implication de q par p est notée $p \Rightarrow q$ et se lit "p implique q".

Remarques 2.8

Remarques 2.8

- La table de vérité de l'implication $p \Rightarrow q$ est :

Remarques 2.8

- La table de vérité de l'implication $p \Rightarrow q$ est :

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarques 2.8

- La table de vérité de l'implication $p \Rightarrow q$ est :

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

et ainsi l'implication $p \Rightarrow q$ n'est fausse que si p est vraie et q est fausse.

Remarques 2.8

- La table de vérité de l'implication $p \Rightarrow q$ est :

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

  et ainsi l'implication $p \Rightarrow q$ n'est fausse que si p est vraie et q est fausse.
- L'implication $p \Rightarrow q$ se lit aussi : *"si p, alors q"*

Remarques 2.8

- La table de vérité de l'implication $p \Rightarrow q$ est :

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

  et ainsi l'implication $p \Rightarrow q$ n'est fausse que si p est vraie et q est fausse.
- L'implication $p \Rightarrow q$ se lit aussi : *"si p, alors q"* ou *"p est une condition suffisante pour avoir q"* .

Remarques 2.8

- La table de vérité de l'implication $p \Rightarrow q$ est :

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

  et ainsi l'implication $p \Rightarrow q$ n'est fausse que si p est vraie et q est fausse.
- L'implication $p \Rightarrow q$ se lit aussi : *"si p, alors q"* ou *"p est une condition suffisante pour avoir q"* .On dit aussi que p est l'hypothèse et que q est la conclusion.

Remarques 2.8

- La table de vérité de l'implication $p \Rightarrow q$ est :

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

  et ainsi l'implication $p \Rightarrow q$ n'est fausse que si p est vraie et q est fausse.
- L'implication $p \Rightarrow q$ se lit aussi : *"si p, alors q"* ou *"p est une condition suffisante pour avoir q"* .On dit aussi que p est l'hypothèse et que q est la conclusion.
- L'implication $q \Rightarrow p$ est appelée la réciproque de l'implication $p \Rightarrow q$.

Eléments de logique

Implication et équivalence

Remarques 2.8

- La table de vérité de l'implication $p \Rightarrow q$ est :

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

  et ainsi l'implication $p \Rightarrow q$ n'est fausse que si p est vraie et q est fausse.
- L'implication $p \Rightarrow q$ se lit aussi : *"si p, alors q"* ou *"p est une condition suffisante pour avoir q"* .On dit aussi que p est l'hypothèse et que q est la conclusion.
- L'implication $q \Rightarrow p$ est appelée la réciproque de l'implication $p \Rightarrow q$.
- L'implication $\neg q \Rightarrow \neg p$ est appelée la contraposée de l'implication $p \Rightarrow q$.

Exemple 2.9

On considère les deux propositions suivantes : p : "ABC est un triangle équilatéral",

Eléments de logique

Implication et équivalence

Exemple 2.9

On considère les deux propositions suivantes : p : "ABC est un triangle équilatéral",q : "ABC est un triangle isocèle".

Exemple 2.9

On considère les deux propositions suivantes : p : "ABC est un triangle équilatéral",q : "ABC est un triangle isocèle". l'assertion : $p \Rightarrow q$, i.e., "Si ABC est un triangle équilatéral, alors ABC est un triangle isocèle" est une assertion vraie.

Définition 2.10

Soit p et q deux assertions.

Définition 2.10

Soit p et q deux assertions. On appelle **équivalence** de p et q l'assertion $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Définition 2.10

Soit p et q deux assertions. On appelle **équivalence** de p et q l'assertion $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Cette assertion est notée $p \Leftrightarrow q$ et se lit p **est équivalent à** q.

Remarques 2.11

Remarques 2.11

1. La table de vérité de l'équivalence $p \Leftrightarrow q$ est :

Remarques 2.11

1. La table de vérité de l'équivalence $p \Leftrightarrow q$ est :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarques 2.11

1. La table de vérité de l'équivalence $p \Leftrightarrow q$ est :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

et ainsi l'équivalence $p \Leftrightarrow q$ n'est fausse que si l'une des assertions p, q est vraie et l'autre est fausse.

Remarques 2.11

1. La table de vérité de l'équivalence $p \Leftrightarrow q$ est :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

et ainsi l'équivalence $p \Leftrightarrow q$ n'est fausse que si l'une des assertions p, q est vraie et l'autre est fausse.

2. L'équivalence $p \Leftrightarrow q$ se lit aussi : *" p est vraie si, et seulement si, q est vraie"*

Remarques 2.11

1. La table de vérité de l'équivalence $p \Leftrightarrow q$ est :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

et ainsi l'équivalence $p \Leftrightarrow q$ n'est fausse que si l'une des assertions p, q est vraie et l'autre est fausse.

2. L'équivalence $p \Leftrightarrow q$ se lit aussi : *" p est vraie si, et seulement si, q est vraie"*ou *"pour avoir p, il faut et il suffit d'avoir q"*

Remarques 2.11

1. La table de vérité de l'équivalence $p \Leftrightarrow q$ est :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

et ainsi l'équivalence $p \Leftrightarrow q$ n'est fausse que si l'une des assertions p, q est vraie et l'autre est fausse.

2. L'équivalence $p \Leftrightarrow q$ se lit aussi : *" p est vraie si, et seulement si, q est vraie"* ou *"pour avoir p, il faut et il suffit d'avoir q"* ou *"p est une condition nécessaire et suffisante pour avoir q"*

Remarques 2.11

1. La table de vérité de l'équivalence $p \Leftrightarrow q$ est :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

et ainsi l'équivalence $p \Leftrightarrow q$ n'est fausse que si l'une des assertions p, q est vraie et l'autre est fausse.

2. L'équivalence $p \Leftrightarrow q$ se lit aussi : *" p est vraie si, et seulement si, q est vraie"*ou *"pour avoir p, il faut et il suffit d'avoir q"*ou *"p est une condition nécessaire et suffisante pour avoir q"*

3. Une **assertion composée** est une assertion formée par une combinaison de plusieurs assertions en utilisant des connecteurs logiques.

Exemple 2.12

Exemple 2.12

En considérant les assertions p, q de l'exemple précédent,

Exemple 2.12

En considérant les assertions p, q de l'exemple précédent, l'assertion : $p \Leftrightarrow q$, i.e., " ABC est un triangle équilatéral si et seulement si ABC est un triangle isocèle" est une assertion fausse.

Définitions 2.13

- Une **tautologie** est une assertion composée qui est toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité des assertions qui la composent.

Définitions 2.13

- Une **tautologie** est une assertion composée qui est toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité des assertions qui la composent.
- Une **contradiction** est une assertion composée qui est toujours fausse quelles que soient les valeurs de vérité des assertions qui la composent.

Exemples 2.14

Soit p une assertion.

Exemples 2.14

Soit p une assertion.

1. $p \vee (\neg p)$ *est une tautologie.*

Exemples 2.14

Soit p une assertion.

1. $p \vee (\neg p)$ *est une tautologie.*
2. $p \wedge (\neg p)$ *est une contradiction.*

Proposition 2.15

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p, \;\; (p \vee p) \Leftrightarrow p.$

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p, \;\; (p \vee p) \Leftrightarrow p.$
2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Commutativité de* ***et****).*

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p, \ \ (p \vee p) \Leftrightarrow p.$
2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Commutativité de **et**).*
3. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *(Commutativité de **ou**).*

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p, \quad (p \vee p) \Leftrightarrow p.$
2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Commutativité de* ***et****).*
3. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *(Commutativité de* ***ou****).*
4. $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(associativité de* ***et****).*

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p, \;\; (p \vee p) \Leftrightarrow p.$
2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Commutativité de **et**).*
3. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *(Commutativité de **ou**).*
4. $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(associativité de **et**).*
5. $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ *(associativité de **ou**).*

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p, \quad (p \vee p) \Leftrightarrow p.$
2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Commutativité de **et**).*
3. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *(Commutativité de **ou**).*
4. $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(associativité de **et**).*
5. $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ *(associativité de **ou**).*
6. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ *(distributivité de **et** par rapport à **ou**).*

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p, \quad (p \vee p) \Leftrightarrow p.$
2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Commutativité de **et**).*
3. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *(Commutativité de **ou**).*
4. $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(associativité de **et**).*
5. $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ *(associativité de **ou**).*
6. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ *(distributivité de **et** par rapport à **ou**).*
7. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *(distributivité de **ou** par rapport à **et**).*

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p, \quad (p \vee p) \Leftrightarrow p.$
2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Commutativité de **et**).*
3. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *(Commutativité de **ou**).*
4. $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(associativité de **et**).*
5. $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ *(associativité de **ou**).*
6. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ *(distributivité de **et** par rapport à **ou**).*
7. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *(distributivité de **ou** par rapport à **et**).*
8. $[\neg(\neg p)] \Leftrightarrow p.$

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$, $(p \vee p) \Leftrightarrow p$.
2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Commutativité de **et**).*
3. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *(Commutativité de **ou**).*
4. $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(associativité de **et**).*
5. $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ *(associativité de **ou**).*
6. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ *(distributivité de **et** par rapport à **ou**).*
7. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *(distributivité de **ou** par rapport à **et**).*
8. $[\neg(\neg p)] \Leftrightarrow p$.
9. $[\neg(p \wedge q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)]$.

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p, \;\; (p \vee p) \Leftrightarrow p.$
2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Commutativité de **et**).*
3. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *(Commutativité de **ou**).*
4. $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(associativité de **et**).*
5. $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ *(associativité de **ou**).*
6. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ *(distributivité de **et** par rapport à **ou**).*
7. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *(distributivité de **ou** par rapport à **et**).*
8. $[\neg(\neg p)] \Leftrightarrow p.$
9. $[\neg(p \wedge q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)].$
10. $[\neg(p \vee q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)].$

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p, \quad (p \vee p) \Leftrightarrow p.$
2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Commutativité de* ***et****).*
3. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *(Commutativité de* ***ou****).*
4. $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(associativité de* ***et****).*
5. $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ *(associativité de* ***ou****).*
6. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ *(distributivité de* ***et*** *par rapport à* ***ou****).*
7. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *(distributivité de* ***ou*** *par rapport à* ***et****).*
8. $[\neg(\neg p)] \Leftrightarrow p.$
9. $[\neg(p \wedge q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)].$
10. $[\neg(p \vee q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)].$
11. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\neg q) \Rightarrow (\neg p)]$ *(principe de la contraposition).*

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p, \ \ (p \vee p) \Leftrightarrow p.$
2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Commutativité de **et**).*
3. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *(Commutativité de **ou**).*
4. $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(associativité de **et**).*
5. $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ *(associativité de **ou**).*
6. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ *(distributivité de **et** par rapport à **ou**).*
7. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *(distributivité de **ou** par rapport à **et**).*
8. $[\neg(\neg p)] \Leftrightarrow p.$
9. $[\neg(p \wedge q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)].$
10. $[\neg(p \vee q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)].$
11. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\neg q) \Rightarrow (\neg p)]$ *(principe de la contraposition).*
12. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ *(transitivité de l'implication).*

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p, \quad (p \vee p) \Leftrightarrow p.$
2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Commutativité de **et**).*
3. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *(Commutativité de **ou**).*
4. $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(associativité de **et**).*
5. $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ *(associativité de **ou**).*
6. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ *(distributivité de **et** par rapport à **ou**).*
7. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *(distributivité de **ou** par rapport à **et**).*
8. $[\neg(\neg p)] \Leftrightarrow p.$
9. $[\neg(p \wedge q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)].$
10. $[\neg(p \vee q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)].$
11. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\neg q) \Rightarrow (\neg p)]$ *(principe de la contraposition).*
12. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ *(transitivité de l'implication).*
13. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)] \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \wedge (p \Leftrightarrow r)].$

Proposition 2.15

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$, $(p \vee p) \Leftrightarrow p$.
2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *(Commutativité de **et**).*
3. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *(Commutativité de **ou**).*
4. $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *(associativité de **et**).*
5. $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ *(associativité de **ou**).*
6. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ *(distributivité de **et** par rapport à **ou**).*
7. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *(distributivité de **ou** par rapport à **et**).*
8. $[\neg(\neg p)] \Leftrightarrow p$.
9. $[\neg(p \wedge q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \vee (\neg q)]$.
10. $[\neg(p \vee q)] \Leftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)]$.
11. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\neg q) \Rightarrow (\neg p)]$ *(principe de la contraposition).*
12. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ *(transitivité de l'implication).*
13. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)] \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \wedge (p \Leftrightarrow r)]$.
14. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ *(principe de la déduction).*

Remarque 2.16

Remarque 2.16

Au lieu de dire qu'une assertion p est vraie, on dit : "on a p".

Remarque 2.16

Au lieu de dire qu'une assertion p est vraie, on dit : "on a p". Aussi, au lieu de dire que $p \Leftrightarrow q$ est une tautologie, on dit simplement que "les assertions p et q sont équivalentes".

Remarque 2.16

Au lieu de dire qu'une assertion p est vraie, on dit : "on a p". Aussi, au lieu de dire que $p \Leftrightarrow q$ est une tautologie, on dit simplement que "les assertions p et q sont équivalentes".

Intuitivement, on appelle **ensemble** une collection E d'objets.

Intuitivement, on appelle **ensemble** une collection E d'objets. Ces objets s'appellent les **éléments** de l'ensemble E.

Intuitivement, on appelle **ensemble** une collection E d'objets. Ces objets s'appellent les **éléments** de l'ensemble E. Généralement, on note les ensembles avec des lettres majuscules (par exemple, $E, F, \dots$) et les éléments avec des lettres minuscules (par exemple, $x, y, \dots$).

Intuitivement, on appelle **ensemble** une collection E d'objets. Ces objets s'appellent les **éléments** de l'ensemble E. Généralement, on note les ensembles avec des lettres majuscules (par exemple, $E, F, \ldots$) et les éléments avec des lettres minuscules (par exemple, $x, y, \ldots$).
Soit x, y deux éléments d'un ensemble E.
$x = y$ exprime que x et y représente le même objet ou élément de E.

Intuitivement, on appelle **ensemble** une collection E d'objets. Ces objets s'appellent les **éléments** de l'ensemble E. Généralement, on note les ensembles avec des lettres majuscules (par exemple, $E, F, \ldots$) et les éléments avec des lettres minuscules (par exemple, $x, y, \ldots$).
Soit x, y deux éléments d'un ensemble E.
$x = y$ exprime que x et y représente le même objet ou élément de E.
$x \neq y$ signifie $[\neg(x = y)]$.

Intuitivement, on appelle **ensemble** une collection E d'objets. Ces objets s'appellent les **éléments** de l'ensemble E. Généralement, on note les ensembles avec des lettres majuscules (par exemple, $E, F, \ldots$) et les éléments avec des lettres minuscules (par exemple, $x, y, \ldots$).
Soit x, y deux éléments d'un ensemble E.
$x = y$ exprime que x et y représente le même objet ou élément de E.
$x \neq y$ signifie $[\neg(x = y)]$.
$x \in E$ exprime que x est un élément de E.

Intuitivement, on appelle **ensemble** une collection E d'objets. Ces objets s'appellent les **éléments** de l'ensemble E. Généralement, on note les ensembles avec des lettres majuscules (par exemple, $E, F, \dots$) et les éléments avec des lettres minuscules (par exemple, $x, y, \dots$).
Soit x, y deux éléments d'un ensemble E.
$x = y$ exprime que x et y représente le même objet ou élément de E.
$x \neq y$ signifie $[\neg(x = y)]$.
$x \in E$ exprime que x est un élément de E.
$x \notin E$ signifie que $[\neg(x \in E)]$.

Intuitivement, on appelle **ensemble** une collection E d'objets. Ces objets s'appellent les **éléments** de l'ensemble E. Généralement, on note les ensembles avec des lettres majuscules (par exemple, $E, F, \ldots$) et les éléments avec des lettres minuscules (par exemple, $x, y, \ldots$).

Soit x, y deux éléments d'un ensemble E.

$x = y$ exprime que x et y représente le même objet ou élément de E.

$x \neq y$ signifie $[\neg(x = y)]$.

$x \in E$ exprime que x est un élément de E.

$x \notin E$ signifie que $[\neg(x \in E)]$.

Un ensemble est dit **vide** s'il n'a aucun élément.

Intuitivement, on appelle **ensemble** une collection E d'objets. Ces objets s'appellent les **éléments** de l'ensemble E. Généralement, on note les ensembles avec des lettres majuscules (par exemple, $E, F, \dots$) et les éléments avec des lettres minuscules (par exemple, $x, y, \dots$).
Soit x, y deux éléments d'un ensemble E.
$x = y$ exprime que x et y représente le même objet ou élément de E.
$x \neq y$ signifie $[\neg(x = y)]$.
$x \in E$ exprime que x est un élément de E.
$x \notin E$ signifie que $[\neg(x \in E)]$.
Un ensemble est dit **vide** s'il n'a aucun élément. On note $\emptyset$ l'ensemble vide.

Intuitivement, on appelle **ensemble** une collection E d'objets. Ces objets s'appellent les **éléments** de l'ensemble E. Généralement, on note les ensembles avec des lettres majuscules (par exemple, $E, F, \dots$) et les éléments avec des lettres minuscules (par exemple, $x, y, \dots$).

Soit x, y deux éléments d'un ensemble E.

$x = y$ exprime que x et y représente le même objet ou élément de E.

$x \neq y$ signifie $[\neg(x = y)]$.

$x \in E$ exprime que x est un élément de E.

$x \notin E$ signifie que $[\neg(x \in E)]$.

Un ensemble est dit **vide** s'il n'a aucun élément. On note $\emptyset$ l'ensemble vide.

Un ensemble qui n'a qu'un seul élément x est noté $\{x\}$ et appelé **singleton**.

Eléments de logique

Quantificateurs et prédicats

En mathématiques, on utilise, souvent, des expressions de la forme : "pour tout ...", "quelque soit ...", "il existe au moins ...", "il existe un, et un seul ...", ... Ces expressions précisent comment les éléments d'un ensemble peuvent vérifier une certaine propriété.

En mathématiques, on utilise, souvent, des expressions de la forme : "pour tout . . .", "quelque soit . . .", "il existe au moins . . .", "il existe un, et un seul . . .", ... Ces expressions précisent comment les éléments d'un ensemble peuvent vérifier une certaine propriété. Ces expressions sont appelées des quantificateurs.

En mathématiques, on utilise, souvent, des expressions de la forme : "pour tout ...", "quelque soit ...", "il existe au moins ...", "il existe un, et un seul ...", ... Ces expressions précisent comment les éléments d'un ensemble peuvent vérifier une certaine propriété. Ces expressions sont appelées des quantificateurs.
On distingue deux types de quantificateurs :

En mathématiques, on utilise, souvent, des expressions de la forme : "pour tout . . .", "quelque soit . . .", "il existe au moins . . .", "il existe un, et un seul . . .", ... Ces expressions précisent comment les éléments d'un ensemble peuvent vérifier une certaine propriété. Ces expressions sont appelées des quantificateurs.

On distingue deux types de quantificateurs :

- Le quantificateur universel, noté $\forall$, se lit "quel que soit", "pour tout",. . ..

En mathématiques, on utilise, souvent, des expressions de la forme : "pour tout ...", "quelque soit ...", "il existe au moins ...", "il existe un, et un seul ...", ... Ces expressions précisent comment les éléments d'un ensemble peuvent vérifier une certaine propriété. Ces expressions sont appelées des quantificateurs.

On distingue deux types de quantificateurs :

- Le quantificateur universel, noté $\forall$, se lit "quel que soit", "pour tout",....
- Le quantificateur existentiel, noté $\exists$, se lit "il existe". La notation $\exists!$ signifie "il existe un, et un seul".

Exemple 2.17

Soit $E = \{n \in \mathbb{N} / n > 2\}$.

Exemple 2.17

Soit $E = \{n \in \mathbb{N} / n > 2\}$. *L'assertion : "Pour tout x élément de* E, *x est supérieur strictement à 2" peut être représentée par :*

$$\forall x \in E, x > 2 \text{ ou par } \forall x \in E, P(x), \text{ avec } P(x) \text{ est l'expression "x est supérieur strictement à 2".}$$

Exemple 2.17

Soit $E = \{n \in \mathbb{N}/n > 2\}$. *L'assertion : "Pour tout x élément de E, x est supérieur strictement à 2" peut être représentée par :*

$$\forall x \in E, x > 2 \text{ ou par } \forall x \in E, P(x), \text{ avec } P(x) \text{ est l'expression "x est supérieur strictement à 2".}$$

L'assertion : $\forall x \in E, x > 2$ *est une assertion vraie ;*

Exemple 2.17

Soit $E = \{n \in \mathbb{N} / n > 2\}$. *L'assertion : "Pour tout x élément de E, x est supérieur strictement à 2" peut être représentée par :*

$\forall x \in E, x > 2$ *ou par* $\forall x \in E, P(x)$, *avec* $P(x)$ *est l'expression "x est supérieur strictement à 2".*

L'assertion : $\forall x \in E, x > 2$ *est une assertion vraie ; cependant, l'assertion :* $\exists x \in E : x \leq 2$ *est une assertion fausse.*

Dans l'exemple précédent, l'expression "$x > 2$" est formée de deux parties : x qui est le sujet et la deuxième partie est "> 2", i.e., la propriété que le sujet x peut vérifié ;

Dans l'exemple précédent, l'expression "$x > 2$" est formée de deux parties : x qui est le sujet et la deuxième partie est "> 2", i.e., la propriété que le sujet x peut vérifié ; cette expression est appelée un **prédicat**.

Exemples 2.18

1. *Soit* $P(x)$ *l'expression* $x > 4$. $P(5)$ *est l'assertion* $5 > 4$ *qui est vraie tandis que* $P(3)$ *est l'assertion fausse :* $3 > 4$.

Exemples 2.18

1. *Soit* $P(x)$ *l'expression* $x > 4$. $P(5)$ *est l'assertion* $5 > 4$ *qui est vraie tandis que* $P(3)$ *est l'assertion fausse :* $3 > 4$.
2. *Soit* $P(x, y, z)$ *l'expression* $z = x + y$, *alors* $P(1, 3, 4)$ *est l'assertion :* $4 = 1 + 3$.

Remarque 2.19

Remarque 2.19

$P(x)$ n'est pas une assertion ; cependant, en attribuant une valeur à x, on obtient une assertion.

Proposition 2.20

Soit E un ensemble, P et Q des prédicats. Alors, on a les équivalences suivantes :

Proposition 2.20

Soit E un ensemble, P et Q des prédicats. Alors, on a les équivalences suivantes :

1. $[\neg(\forall x \in E, P(x))] \Leftrightarrow \exists x \in E, \neg(P(x))$.

Proposition 2.20

Soit E un ensemble, P et Q des prédicats. Alors, on a les équivalences suivantes :

1. $[\neg(\forall x \in E, P(x))] \Leftrightarrow \exists x \in E, \neg(P(x)).$
2. $[\neg(\exists x \in E, P(x))] \Leftrightarrow \forall x \in E, \neg(P(x)).$

Proposition 2.20

Soit E un ensemble, P et Q des prédicats. Alors, on a les équivalences suivantes :

1. $[\neg(\forall x \in E, P(x))] \Leftrightarrow \exists x \in E, \neg(P(x))$.
2. $[\neg(\exists x \in E, P(x))] \Leftrightarrow \forall x \in E, \neg(P(x))$.
3. $[\forall x \in E, (P(X) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow [(\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))]$.

Proposition 2.20

Soit E un ensemble, P et Q des prédicats. Alors, on a les équivalences suivantes :

1. $[\neg(\forall x \in E, P(x))] \Leftrightarrow \exists x \in E, \neg(P(x))$.
2. $[\neg(\exists x \in E, P(x))] \Leftrightarrow \forall x \in E, \neg(P(x))$.
3. $[\forall x \in E, (P(X) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow [(\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))]$.
4. $[\exists x \in E, (P(X) \vee Q(x))] \Leftrightarrow [(\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x))]$.

Exemple 2.21

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*

Exemple 2.21

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*

- (u_n) *est convergente* $\Leftrightarrow (\exists l \in \mathbb{R})$ *tel que* $(\forall \varepsilon > 0), (\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N})$
$$n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Exemple 2.21

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- (u_n) *est convergente* $\Leftrightarrow (\exists l \in \mathbb{R})$ *tel que* $(\forall \varepsilon > 0), (\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall n \in \mathbb{N})$
$$n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$
- (u_n) *est divergente* $\Leftrightarrow (\forall l \in \mathbb{R}), (\exists \varepsilon > 0) : (\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})$
$$n \geq N \textbf{ et } |u_n - l| > \varepsilon.$$

Remarques 2.22

Remarques 2.22

1. L'ordre des quantificateurs dans une assertion est très important. Par exemple, l'assertion : $\forall x \in \mathbb{R}^\star, \exists y \in \mathbb{R}^\star : xy = 1$ est vraie

Remarques 2.22

1. L'ordre des quantificateurs dans une assertion est très important. Par exemple, l'assertion : $\forall x \in \mathbb{R}^\star, \exists y \in \mathbb{R}^\star : xy = 1$ est vraie tandis que l'assertion : $\exists y \in \mathbb{R}^\star : \forall x \in \mathbb{R}^\star, xy = 1$ est fausse.

Remarques 2.22

1. L'ordre des quantificateurs dans une assertion est très important. Par exemple, l'assertion : $\forall x \in \mathbb{R}^\star, \exists y \in \mathbb{R}^\star : xy = 1$ est vraie tandis que l'assertion : $\exists y \in \mathbb{R}^\star : \forall x \in \mathbb{R}^\star, xy = 1$ est fausse.
2. Dans un prédicat $P(x)$, la lettre x est une variable muette ; on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre à condition qu'elle ne soit pas utilisée, auparavant, pour désigner un autre objet.

Méthodes de démonstration

Démonstration directe

Méthodes de démonstration

Démonstration directe

Une démonstration directe de $p \Rightarrow q$

Méthodes de démonstration

Démonstration directe

Une démonstration directe de $p \Rightarrow q$ consiste à supposer que p est vraie

Méthodes de démonstration

Démonstration directe

Une démonstration directe de $p \Rightarrow q$ consiste à supposer que p est vraie et utiliser la transitivité de l'implication pour prouver que q est vraie,

Méthodes de démonstration

Démonstration directe

Une démonstration directe de $p \Rightarrow q$ consiste à supposer que p est vraie et utiliser la transitivité de l'implication pour prouver que q est vraie,i.e., en supposant que p est vraie et si les implications $p \Rightarrow r_1, r_1 \Rightarrow r_2, \ldots, r_n \Rightarrow q$ sont vraies, où $r_1, \ldots, r_n$ sont des assertions, alors q est vraie.

Exemple 3.1

Montrons que si m et n sont des entiers impairs, alors mn est un entier impair :

Exemple 3.1

Montrons que si m et n sont des entiers impairs, alors mn est un entier impair :supposons que n et m sont des entiers impairs,

Exemple 3.1

Montrons que si m et n sont des entiers impairs, alors mn est un entier impair :supposons que n et m sont des entiers impairs,alors il existe $k, h \in \mathbb{Z}$ *tels que* $m = 2h + 1$ *et* $n = 2k + 1$

Exemple 3.1

Montrons que si m et n sont des entiers impairs, alors mn est un entier impair :supposons que n et m sont des entiers impairs,alors il existe $k, h \in \mathbb{Z}$ *tels que* $m = 2h+1$ *et* $n = 2k+1$ *d'où*

$mn = (2h+1)(2k+1)$

Méthodes de démonstration

Démonstration directe

Exemple 3.1

Montrons que si m et n sont des entiers impairs, alors mn est un entier impair :supposons que n et m sont des entiers impairs,alors il existe $k,h \in \mathbb{Z}$ *tels que* $m = 2h+1$ *et* $n = 2k+1$ *d'où*
$mn = (2h+1)(2k+1) = 2(2hk+h+k)+1$ *et ainsi mn est un entier impair.*

Méthodes de démonstration

Démonstration par disjonction de cas

Pour montrer que r est vraie, il suffit de montrer que :

Méthodes de démonstration

Démonstration par disjonction de cas

Pour montrer que r est vraie, il suffit de montrer que :$p \vee q$ est vraie

Méthodes de démonstration

Démonstration par disjonction de cas

Pour montrer que r est vraie, il suffit de montrer que :$p \vee q$ est vraie et que les implications $p \Rightarrow r$ et $q \Rightarrow r$ sont vraies.

Exemple 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. *Montrons que* $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ *:*

Méthodes de démonstration

Démonstration par disjonction de cas

Exemple 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$: puisque $n \in \mathbb{N}$, alors n est pair ou n est impair, ainsi on distingue les deux cas suivants :

Exemple 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$: puisque $n \in \mathbb{N}$, alors n est pair ou n est impair, ainsi on distingue les deux cas suivants :

- *Si n est pair,*

Méthodes de démonstration

Démonstration par disjonction de cas

Exemple 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. *Montrons que* $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ *: puisque* $n \in \mathbb{N}$, *alors* n *est pair ou* n *est impair, ainsi on distingue les deux cas suivants :*

- *Si* n *est pair,alors* $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ *et ainsi* $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}(n+1) \in \mathbb{N}$.

Méthodes de démonstration

Démonstration par disjonction de cas

Exemple 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$: puisque $n \in \mathbb{N}$, alors n est pair ou n est impair, ainsi on distingue les deux cas suivants :

- *Si n est pair,alors $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ et ainsi $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}(n+1) \in \mathbb{N}$.*
- *Si n est impair,*

Méthodes de démonstration

Démonstration par disjonction de cas

Exemple 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$: puisque $n \in \mathbb{N}$, alors n est pair ou n est impair, ainsi on distingue les deux cas suivants :

- *Si n est pair,alors $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ et ainsi $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}(n+1) \in \mathbb{N}$.*
- *Si n est impair,alors $n+1$ est pair d'où $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$ et ainsi $\frac{n(n+1)}{2} = n\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$.*

Méthodes de démonstration

Démonstration par contraposition

Puisque l'implication $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg q \Rightarrow \neg p$, une démonstration par contraposition de $p \Rightarrow q$ consiste à donner une démonstration directe de $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Exemple 3.3

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Montrons que si $a = mn$, alors $m \leq \sqrt{a}$ ou $n \leq \sqrt{a}$:

Méthodes de démonstration

Démonstration par contraposition

Exemple 3.3

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Montrons que si $a = mn$, alors $m \leq \sqrt{a}$ ou $n \leq \sqrt{a}$:
supposons que $m > \sqrt{a}$ et $n > \sqrt{a}$,

Exemple 3.3

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Montrons que si $a = mn$, alors $m \leq \sqrt{a}$ ou $n \leq \sqrt{a}$: supposons que $m > \sqrt{a}$ et $n > \sqrt{a}$,alors $mn > \sqrt{a}\sqrt{a} = a$ et ainsi $a \neq mn$.

Méthodes de démonstration

Démonstration par contre-exemple

Méthodes de démonstration

Démonstration par contre-exemple

Si l'assertion est : "tout élément d'un ensemble E vérifie la proriété P", **l'existence d'un seul élément de E qui ne vérifie pas P <u>montre</u> que l'assertion est fausse**.

Exemple 3.4

Soit $E = \{n \in \mathbb{N} / n > 1\}$*. L'assertion : "*$\forall n \in E, n-1 \in E$*" est fausse*

Exemple 3.4

Soit $E = \{n \in \mathbb{N} / n > 1\}$. *L'assertion : "*$\forall n \in E, n-1 \in E$*" est fausse car il existe* $k = 2 \in E$ *tel que* $k - 1 = 1 \notin E$.

Méthodes de démonstration

Démonstration par l'absurde

Pour montrer, par l'absurde, qu'une assertion p est vraie,

Méthodes de démonstration

Démonstration par l'absurde

Pour montrer, par l'absurde, qu'une assertion p est vraie,on suppose que $\neg p$ est vraie

Pour montrer, par l'absurde, qu'une assertion p est vraie,on suppose que $\neg p$ est vraieet on montre qu'on obtient alors une contradiction.

Pour montrer, par l'absurde, qu'une assertion p est vraie,on suppose que $\neg p$ est vraieet on montre qu'on obtient alors une contradiction. Ainsi, pour montrer, par l'absurde, l'implication $q \Rightarrow r$, Pour montrer, par l'absurde, qu'une assertion p est vraie,on suppose que $\neg p$ est vraieet on montre qu'on obtient alors une contradiction. Ainsi, pour montrer, par l'absurde, l'implication $q \Rightarrow r$,on suppose que r est fausse et que q est vraie (i.e., $q \Rightarrow r$ est fausse) et on montre que l'on aboutit à une contradiction.

Méthodes de démonstration

Démonstration par l'absurde

Exemples 3.5

1. *Montrons que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel :*

Méthodes de démonstration

Démonstration par l'absurde

Exemples 3.5

1. *Montrons que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel :supposons que* $\sqrt{2}$ *est rationnel,*

Exemples 3.5

1. *Montrons que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel :supposons que* $\sqrt{2}$ *est rationnel,alors il existe* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^{\star}$ *:* $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$*, avec m et n sans facteur commun (i.e.,* $\frac{m}{n}$ *est irréductible)*

Méthodes de démonstration

Démonstration par l'absurde

Exemples 3.5

1. *Montrons que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel :supposons que* $\sqrt{2}$ *est rationnel,alors il existe* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^\star$: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, *avec m et n sans facteur commun (i.e.,* $\frac{m}{n}$ *est irréductible) d'où* $2n^2 = m^2$

Méthodes de démonstration

Démonstration par l'absurde

Exemples 3.5

1. *Montrons que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel :supposons que* $\sqrt{2}$ *est rationnel,alors il existe* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^\star$: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, *avec m et n sans facteur commun (i.e.,* $\frac{m}{n}$ *est irréductible) d'où* $2n^2 = m^2$ *ainsi* m^2 *est pair*

Méthodes de démonstration

Démonstration par l'absurde

Exemples 3.5

1. *Montrons que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel :supposons que* $\sqrt{2}$ *est rationnel,alors il existe* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^\star$: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, *avec m et n sans facteur commun (i.e.,* $\frac{m}{n}$ *est irréductible) d'où* $2n^2 = m^2$ *ainsi* m^2 *est pair et par suite m est pair*

Méthodes de démonstration

Démonstration par l'absurde

Exemples 3.5

1. *Montrons que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel :supposons que* $\sqrt{2}$ *est rationnel,alors il existe* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^\star$: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, *avec m et n sans facteur commun (i.e.,* $\frac{m}{n}$ *est irréductible) d'où* $2n^2 = m^2$ *ainsi* m^2 *est pair et par suite m est pair d'où il existe* $k \in \mathbb{N} : m = 2k$,

Exemples 3.5

1. *Montrons que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel :supposons que* $\sqrt{2}$ *est rationnel,alors il existe* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^\star$: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$*, avec m et n sans facteur commun (i.e.,* $\frac{m}{n}$ *est irréductible) d'où* $2n^2 = m^2$ *ainsi* m^2 *est pair et par suite m est pair d'où il existe* $k \in \mathbb{N}$: $m = 2k$*,alors* $2n^2 = 4k^2$

Exemples 3.5

1. *Montrons que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel :supposons que* $\sqrt{2}$ *est rationnel,alors il existe* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^\star$: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, *avec m et n sans facteur commun (i.e.,* $\frac{m}{n}$ *est irréductible) d'où* $2n^2 = m^2$ *ainsi* m^2 *est pair et par suite m est pair d'où il existe* $k \in \mathbb{N}$: $m = 2k$*,alors* $2n^2 = 4k^2$ *ainsi* n^2 *est pair*

Méthodes de démonstration

Démonstration par l'absurde

Exemples 3.5

1. *Montrons que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel :supposons que* $\sqrt{2}$ *est rationnel,alors il existe* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^{\star}$: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, *avec m et n sans facteur commun (i.e.,* $\frac{m}{n}$ *est irréductible) d'où* $2n^2 = m^2$ *ainsi* m^2 *est pair et par suite m est pair d'où il existe* $k \in \mathbb{N} : m = 2k$*,alors* $2n^2 = 4k^2$ *ainsi* n^2 *est paird'où n est aussi pair*

Exemples 3.5

1. *Montrons que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel :supposons que* $\sqrt{2}$ *est rationnel,alors il existe* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^\star$: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, *avec m et n sans facteur commun (i.e.,* $\frac{m}{n}$ *est irréductible) d'où* $2n^2 = m^2$ *ainsi* m^2 *est pair et par suite m est pair d'où il existe* $k \in \mathbb{N} : m = 2k$*,alors* $2n^2 = 4k^2$ *ainsi* n^2 *est paird'où n est aussi pairet ainsi* 2 *est un facteur commun de m et n, contradiction.*
2. *Soit n un entier naturel. Montrons par l'absurde que si* $3n+2$ *est impair, alors n est impair :*

Méthodes de démonstration

Démonstration par l'absurde

Exemples 3.5

1. *Montrons que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel :supposons que* $\sqrt{2}$ *est rationnel,alors il existe* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^\star$: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, *avec m et n sans facteur commun (i.e.,* $\frac{m}{n}$ *est irréductible) d'où* $2n^2 = m^2$ *ainsi* m^2 *est pair et par suite m est pair d'où il existe* $k \in \mathbb{N} : m = 2k$*,alors* $2n^2 = 4k^2$ *ainsi* n^2 *est paird'où n est aussi pairet ainsi* 2 *est un facteur commun de m et n, contradiction.*
2. *Soit n un entier naturel. Montrons par l'absurde que si* $3n+2$ *est impair, alors n est impair :supposons alors que n est pair et que* $3n+2$ *est impair ;*

Exemples 3.5

1. *Montrons que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel :supposons que* $\sqrt{2}$ *est rationnel,alors il existe* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^\star$: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, *avec m et n sans facteur commun (i.e.,* $\frac{m}{n}$ *est irréductible) d'où* $2n^2 = m^2$ *ainsi* m^2 *est pair et par suite m est pair d'où il existe* $k \in \mathbb{N} : m = 2k$*,alors* $2n^2 = 4k^2$ *ainsi* n^2 *est paird'où n est aussi pairet ainsi 2 est un facteur commun de m et n, contradiction.*
2. *Soit n un entier naturel. Montrons par l'absurde que si* $3n+2$ *est impair, alors n est impair :supposons alors que n est pair et que* $3n+2$ *est impair ;puisque n est pair,* $3n+2$ *est pair*

Exemples 3.5

1. *Montrons que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel :supposons que* $\sqrt{2}$ *est rationnel,alors il existe* $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^{\star}$: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$*, avec m et n sans facteur commun (i.e.,* $\frac{m}{n}$ *est irréductible) d'où* $2n^2 = m^2$ *ainsi* m^2 *est pair et par suite m est pair d'où il existe* $k \in \mathbb{N} : m = 2k$*,alors* $2n^2 = 4k^2$ *ainsi* n^2 *est paird'où n est aussi pairet ainsi* 2 *est un facteur commun de m et n, contradiction.*
2. *Soit n un entier naturel. Montrons par l'absurde que si* $3n+2$ *est impair, alors n est impair :supposons alors que n est pair et que* $3n+2$ *est impair ;puisque n est pair,* $3n+2$ *est pair et on obtient ainsi que* $3n+2$ *est pair et* $3n+2$ *est impair, contradiction.*

Méthodes de démonstration

Démonstration par analyse et synthèse

Ce raisonnement est utilisé lors de la recherche des solutions d'un problème. Il est composé de deux étapes :

Ce raisonnement est utilisé lors de la recherche des solutions d'un problème. Il est composé de deux étapes :

1. Etape d'analyse : consiste à supposer que le problème est résolu et on cherche les conditions nécessaires.

Ce raisonnement est utilisé lors de la recherche des solutions d'un problème. Il est composé de deux étapes :

1. Etape d'analyse : consiste à supposer que le problème est résolu et on cherche les conditions nécessaires.
2. Etape de synthèse : on suppose que ces conditions trouvées dans l'étape d'analyse sont satisfaites et on vérifie qu'elles sont suffisantes.

Exemple 3.6

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que f est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

Exemple 3.6

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que f est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :
Etape d'analyse : On suppose qu'il existe une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paire et une fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaire telles que $f = g + h$,

Exemple 3.6

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Montrons que f est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :*
Etape d'analyse : On suppose qu'il existe une fonction g de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *paire et une fonction h de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *impaire telles que* $f = g + h$*,alors*
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x)$

Exemple 3.6

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que f est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :
Etape d'analyse : On suppose qu'il existe une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paire et une fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaire telles que $f = g + h$,alors
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x)$ *d'où* $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = g(-x) + h(-x)$

Exemple 3.6

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Montrons que f est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :*
Etape d'analyse : On suppose qu'il existe une fonction g de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *paire et une fonction h de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *impaire telles que* $f = g + h$*,alors* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x)$ *d'où* $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = g(-x) + h(-x)$ *et comme g est paire et h est impaire,* $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = g(x) - h(x)$

Exemple 3.6

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrons que f est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :
Etape d'analyse : On suppose qu'il existe une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paire et une fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaire telles que $f = g + h$,alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x)$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = g(-x) + h(-x)$ et comme g est paire et h est impaire, $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = g(x) - h(x)$ ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Méthodes de démonstration

Démonstration par analyse et synthèse

Etape de synthèyse : Vérifions que g définie ci-dessus est paire :

Méthodes de démonstration

Démonstration par analyse et synthèse

Etape de synthèyse : Vérifions que g définie ci-dessus est paire :Soit $x \in \mathbb{R}$.

Etape de synthèyse : Vérifions que g définie ci-dessus est paire :Soit $x \in \mathbb{R}$.On a $g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$.

Etape de synthèyse : Vérifions que g définie ci-dessus est paire :Soit $x \in \mathbb{R}$.On a $g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$. De la même façon, on vérifie facilement que h est impaire.

Etape de synthèyse : Vérifions que g définie ci-dessus est paire :Soit $x \in \mathbb{R}$.On a $g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$. De la même façon, on vérifie facilement que h est impaire.Aussi, on a $\forall x \in \mathbb{R}$,
$g(x) + h(x) =$

Méthodes de démonstration

Démonstration par analyse et synthèse

Etape de synthèyse : Vérifions que g définie ci-dessus est paire :Soit $x \in \mathbb{R}$.On a $g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$. De la même façon, on vérifie facilement que h est impaire.Aussi, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) + h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$ et ainsi les fonctions g et h sont des solutions de nôtre problème.

Etape de synthèyse : Vérifions que g définie ci-dessus est paire :Soit $x \in \mathbb{R}$.On a $g(-x) = \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$. De la même façon, on vérifie facilement que h est impaire.Aussi, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) + h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$ et ainsi les fonctions g et h sont des solutions de nôtre problème.On conclut qu'il existe un couple (g, h) tel que $f = g + h$, avec g paire et h impaire.