

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Mohammed V

Cours Algèbre V

SMA-S4

Année universitaire 2020-2021

Nadia Boudi

Table des matières

1	Formes linéaires et dualité	4
1.1	Dual et bidual d'un espace vectoriel	4
1.2	Orthogonalité et Equations d'un sous espace vectoriel en dimension finie	6
1.3	Applications transposées	8
2	Formes bilinéaires et formes quadratiques	10
2.1	Formes bilinéaires	10
2.2	Formes bilinéaires en dimension finie	12
2.3	Formes quadratiques	14
2.3.1	Cas général	14
2.3.2	Cas dimension finie	16
2.3.3	Orthogonalité	17
2.3.4	Cas où $\dim E < \infty$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$	23
2.3.5	Méthode de Gauss pour la décomposition des formes quadratiques	25
3	Espaces Euclidiens	29
3.1	Notions de base	29
3.2	Orthonormalisation de Gram-Schmidt	32
3.3	Adjoint d'un endomorphisme	36
3.4	Endomorphismes spéciaux	40
3.4.1	Endomorphismes orthogonaux et groupe orthogonal . .	40
3.4.2	Endomorphismes symétriques et groupe symétrique . .	43
3.5	Deux notions géométriques	46
4	Espaces Hermitiens	47
4.1	Formes sesquilinéaires et formes hermitiennes	47

4.2	Matrices et orthogonalité pour les formes hermitiennes	49
4.2.1	Matrices.	49
4.2.2	Orthogonalité	52
4.3	Notions de base sur les espaces hermitiens	53
4.4	Orthonormalisation de Gram-Schmidt	55
4.5	Adjoint d'un endomorphisme	57
4.6	Endomorphismes spéciaux	60
4.6.1	Endomorphismes unitaires et groupe unitaire	60
4.6.2	Endomorphismes hermitiens et groupe hermitien	62

Chapitre 1

Formes linéaires et dualité

Dans tout ce cours, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et si E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, nous désignons par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires définies de E dans F . Si $n, m \in \mathbb{N}^*$, $M_{n,m}(\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel formé des matrices rectangulaires définies sur $\mathbb{K}$ et $M_n(\mathbb{K})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$.

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1.1 Dual et bidual d'un espace vectoriel

Définition 1.1.1. *Une forme linéaire sur E est une application linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{K}$. L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est appelé dual de E et est noté E^* .*

Exemples 1.1.2. 1) Les applications suivantes sont des formes linéaires :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y; \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$\text{tr} : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad A \mapsto \text{tr}(A)$$

2) Soit $[a, b]$ un compact de $\mathbb{R}$. Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Désignons par $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues définies de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$. Alors l'application

$$h : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x) \, dx$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

L'exemple abstrait suivant est fondamental :

Exemple 1.1.3. Supposons que E est de dimension finie et soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Pour tout j , désignons par e_j^* l'application linéaire définie par $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$). Alors e_j^* est une forme linéaire. Remarquons que e_j^* dépend de la base B . Donc s'il y'a un risque d'ambiguïté, on peut noter $e_j^* = e_{j,B}^*$. Retenons aussi que pour tout $x \in E$, $x = \sum_{j=1}^n e_j^*(x)e_j$. Les applications e_j^* correspondent donc aux coordonnées dans la base B .

Théorème 1.1.4. *Supposons que E est de dimension finie et soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Alors la famille $B^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est une base de E^* .*

Idées pour la preuve : Rappelons que si E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, alors $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \dim F$. Donc $\dim E^* = \dim E$ et il suffit de montrer que B^* est libre. Par suite, le reste de la preuve est automatique. $\square$

Notations et Vocabulaire. 1) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire. Alors on note $f(x) = \langle f, x \rangle$ pour tout $x \in E$.

2) L'espace dual de E^* est noté E^{**} et est appelé bidual de E .

3) Si $\dim E < \infty$ et B est une base de E alors la base B^* est appelée base duale de B .

Théorème 1.1.5. *Supposons que E est de dimension finie. Pour tout $x \in E$, désignons par $\tilde{x}$ l'élément de E^{**} défini par $\tilde{x}(f) = f(x)$ pour tout $f \in E^*$. Alors l'application $J : E \rightarrow E^{**}$ définie par $x \mapsto \tilde{x}$ est un isomorphisme.*

Idées pour la preuve : Il est clair que J est bien définie et est linéaire. Comme E et E^{**} sont de même dimension, il suffit de montrer l'injectivité ou la surjectivité de J . Soit $x \in E$ et supposons que $\tilde{x} = 0$. Supposons que $x \neq 0$. Posons $x = e_1$ et complétons e_1 en une base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E . Alors $e_1^*(e_1) = 1$, c'est une contradiction. $\square$

Remarques 1.1.6. Supposons que $\dim E < \infty$.

1) Soient $x \in E$ et $f \in E^*$, alors $J(x)(f) = f(x)$.

2) Soient $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $B^{**} = \{e_1^{**}, \dots, e_n^{**}\}$ la base duale de B^* . Alors pour tout $x = \sum_i \lambda_i e_i \in E$, où $\lambda_i \in \mathbb{K}$, on a $J(x) = \sum_i \lambda_i e_i^{**}$.

Définition 1.1.7. Supposons que E est de dimension finie et soit B' une base de E^* . Supposons qu'il existe une base B de E tel que $B' = B^*$. Alors B est appelée base antéduale de B' .

Théorème 1.1.8. Supposons que E est de dimension finie. Alors toute base de E^* admet une base antéduale.

Idées pour la preuve : Soit $D = \{f_1, \dots, f_n\}$ une base de E^* . Posons $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, où $e_j = J^{-1}(f_j^*)$. Alors on vérifie que $B^* = D$. $\square$

Exemple 1.1.9. $E = \mathbb{R}^2$. Soit $B = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Posons $f = 2e_1^* + e_2^*$ et $g = -e_1^* - e_2^*$. On vérifie que $D = \{f, g\}$ est une base de E^* . On calcule sa base antéduale B' , on trouve

$$B' = \{e_1 - e_2, e_1 - 2e_2\}.$$

1.2 Orthogonalité et Equations d'un sous espace vectoriel en dimension finie

Définition 1.2.1. Soient $f \in E^*$ et $x \in E$. On dit que x et f sont orthogonaux si $\langle f, x \rangle = 0$. Si $A \subseteq E$ et $B \subseteq E^*$, on définit $A^\perp$ l'orthogonal de A et B° l'orthogonal de B par

$$A^\perp = \{f \in E^* : \langle f, x \rangle = 0, \forall x \in A\}, \quad B^\circ = \{x \in E : \langle f, x \rangle = 0, \forall f \in B\}$$

Proposition 1.2.2. Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq E^*$. Alors $A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E^* et B° est un sous espace vectoriel de E . De plus, on a les propriétés suivantes :

- (i) Si $A' \subseteq E$ et $A \subseteq A'$ alors $A'^\perp \subseteq A^\perp$.
- (ii) Si $B' \subseteq E^*$ et $B \subseteq B'$ alors $B'^\circ \subseteq B^\circ$.
- (iii) $A^\perp = (\text{Vec}A)^\perp$ et $B^\circ = (\text{Vec}B)^\circ$.

Démonstration. La preuve est automatique. $\square$

Théorème 1.2.3. Supposons que E est de dimension finie et soient F un sous espace vectoriel de E et G un sous espace vectoriel de E^* . Alors

- (i) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $F^{\perp\circ} = F$.

(ii) $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$ et $G^{\circ\perp} = G$.

Idées pour la preuve : (i) Soit $B' = \{e_1, \dots, e_r\}$ une base de F . Complétons B' en une base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E . On vérifie que $F^\perp = \text{Vec}\{e_{r+1}^*, \dots, e_n^*\}$. D'autre part, d'après la proposition précédente, $F^{\perp\circ} = \{e_{r+1}^*, \dots, e_n^*\}^\circ$, et on déduit l'égalité désirée.

(ii) La preuve est analogue en utilisant le fait que la base antéduale d'une base de E^* existe toujours. $\square$

Définition 1.2.4. Soit H un sous espace vectoriel de E . On dit que H est un hyperplan de E si $\dim(E/H) = 1$.

Rappelons que si H est un sous espace vectoriel de E , la codimension de H est $\text{codim} H = \dim(E/H)$.

Théorème 1.2.5. Soit H un sous espace vectoriel de E . Alors H est un hyperplan de E si, et seulement si il existe $f \in E^*$ tel que $f \neq 0$ et $\text{Ker} f = H$.

Idées pour la preuve : Supposons que H est un hyperplan et soit $x \in E$ tel que $x \notin H$. Alors $H \oplus \mathbb{K}x = E$. Soit f définie sur E par $f(u + \lambda x) = \lambda$ pour tous $u \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $f \in E^*$ et $\text{Ker} f = H$. Réciproquement, si $f \in E^*$ et $f \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$. Alors pour tout $y \in E$, Il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f(y) = \alpha f(x)$. Donc $y - \alpha x \in \text{Ker} f$. Par suite, $E = \mathbb{K}x + \text{Ker} f$. D'autre part, il est facile de vérifier que la dernière somme est directe. D'où la conclusion désirée. $\square$

Théorème 1.2.6. Supposons que E est de dimension finie n et soit $F \subseteq E$. Alors F est un sous espace vectoriel de E de dimension $n - r$ si, et seulement si il existe $\{f_1, \dots, f_r\} \subseteq E^*$ linéairement indépendante tel que $F = \bigcap_{i=1}^r \text{Ker} f_i$.

Idées pour la preuve : Supposons qu'il existe $B_1 = \{f_1, \dots, f_r\} \subseteq E^*$, libre tel que $F = \bigcap_{i=1}^r \text{Ker} f_i$. Complétons B_1 en une base $B' = \{f_1, \dots, f_n\}$ de E^* et soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base antéduale de B' . Alors on vérifie que $F = \text{Vec}\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$. Réciproquement, supposons que F est un sous espace vectoriel de E de dimension $n - r$ et soit $B_1 = \{e_1, \dots, e_{n-r}\}$ une base de F . Complétons B_1 en une base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E . Alors on vérifie que $F = \bigcap_{i=n-r+1}^n \text{Ker} e_i^*$. $\square$

Théorème 1.2.7. *Supposons que $\dim E < \infty$ et soient A_1 et A_2 deux sous espaces vectoriels de E et C_1 et C_2 deux sous espaces vectoriels de E^* . Alors $J(C_1^\circ) = C_1^\perp$,*

$$(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp, \quad (A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$$

$$(C_1 + C_2)^\circ = C_1^\circ \cap C_2^\circ, \quad (C_1 \cap C_2)^\circ = C_1^\circ + C_2^\circ$$

Preuve. TD. □

1.3 Applications transposées

Dans toute cette section, F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.3.1. *Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire. La transposée de φ est l'application définie par*

$${}^t\varphi : F^* \rightarrow E^*, \quad g \mapsto g \circ \varphi$$

Proposition 1.3.2. *L'application ${}^t\varphi$ est bien définie, elle est linéaire et $\text{Ker}({}^t\varphi) = (\text{Im } \varphi)^\perp$. De plus, si $\dim E < \infty$ alors $\text{rang}(\varphi) = \text{rang}({}^t\varphi)$ et $\text{Im } {}^t\varphi = (\text{Ker } \varphi)^\perp$.*

Idées pour la preuve : La première partie de la preuve (Cas général) est automatique. Supposons que $\dim E < \infty$. On applique Théorème 1.2.3 pour le calcul des dimensions et on vérifie facilement que $\text{Im } {}^t\varphi \subseteq (\text{Ker } \varphi)^\perp$. □

Théorème 1.3.3. *Supposons que E et F sont de dimensions finies et soit $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soient B une base de E et B' une base de F . Alors la matrice de ${}^t\varphi$ dans les bases B'^* et B^* est*

$$M({}^t\varphi, B'^*, B^*) = (M(\varphi, B, B'))^t$$

Idées pour la preuve : Automatique. □

Corollaire 1.3.4. *Supposons que $\dim E < \infty$ et soient B_1 et B_2 deux bases de E . Désignons par $P = P_{B_1 B_2}$ la matrice de passage de B_1 à B_2 . Alors la matrice de passage de B_1^* à B_2^* est $P_{B_1^* B_2^*} = (P^t)^{-1}$.*

Idées pour la preuve : Rappelons que $P = M(\text{id}, B_2, B_1)$. Donc on applique le théorème précédent à l'application identité et on obtient l'égalité désirée. □

Proposition 1.3.5. *Soit G un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F), \psi \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors ${}^t(\psi \circ \varphi) = {}^t\varphi \circ {}^t\psi$. De plus, si φ est un isomorphisme, alors ${}^t\varphi^{-1} = ({}^t\varphi)^{-1}$.*

Preuve. Exercice. □

Chapitre 2

Formes bilinéaires et formes quadratiques

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2.1 Formes bilinéaires

Définition 2.1.1. Une forme bilinéaire sur E est une application $f : E \times E \rightarrow K$ qui est linéaire pour chaque variable, c'est à dire pour tous $x, y, z \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z), \quad f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$$

$$f(\alpha x, y) = f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$$

L'ensemble des applications bilinéaires définies sur E sera noté $\mathcal{L}_2(E)$.

Exemples 2.1.2. 1) Les applications suivantes sont des formes bilinéaires :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad (A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$$

$$M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad (A, B) \mapsto \text{tr}(A) \text{tr}(B)$$

2) Les applications suivantes ne sont pas des formes bilinéaires :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy + 2y; \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy^2 \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

3) Plus généralement, considérons l'exemple suivant de forme bilinéaire sur E . Soient h_1, h_2 deux éléments fixés dans E^* , l'application

$$h : E \times E \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto h_1(x) h_2(y)$$

est une forme bilinéaire.

Remarque 2.1.3. Soit $f \in \mathcal{L}_2(E)$. Alors pour tout $x \in E$,

$$f(x, 0) = f(0, x) = 0$$

Proposition 2.1.4. On munit $\mathcal{L}_2(E)$ des opérations "+" et "." définies de manière naturelle par les relations suivantes pour tous $f, g \in \mathcal{L}_2(E)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$

$$[f + g](x, y) = f(x, y) + g(x, y), \quad [\alpha f](x, y) = \alpha f(x, y)$$

Alors $(\mathcal{L}_2(E), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Idées pour la preuve. L'ensemble $\mathcal{F}(E \times E, \mathbb{K})$, des applications définies de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel pour les mêmes relations. On peut donc juste vérifier que $\mathcal{L}_2(E)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(E \times E, \mathbb{K})$. $\square$

Définition 2.1.5. Soit $f : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.

- 1) On dit que f est symétrique si $f(x, y) = f(y, x)$ pour tous $x, y \in E$. L'ensemble des formes bilinéaires symétriques définies sur E sera noté $\mathcal{S}_2(E)$.
- 2) On dit que f est alternée si $f(x, x) = 0$ pour tout $x \in E$. L'ensemble des formes bilinéaires alternées définies sur E sera noté $\mathcal{A}_2(E)$.

Exemples 2.1.6. 1) Soit $h_1 \in E^*$. Alors la forme bilinéaire

$$h : E \times E \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto h_1(x)h_1(y)$$

est symétrique.

- 2) $f_1 : M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad (A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$. Alors $f_1 \in \mathcal{S}_2(E)$.
- 3) $f_2 : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad ((a, b), (c, d)) \mapsto ad - bc, \quad f \in \mathcal{A}_2(\mathbb{C}^2)$

Une forme bilinéaire sur E est dite antisymétrique si

$$f(y, x) = -f(x, y), \quad \forall x, y \in E$$

Proposition 2.1.7. (1) $\mathcal{S}_2(E)$ et $\mathcal{A}_2(E)$ sont deux sous espaces vectoriels de $\mathcal{L}_2(E)$.

(2) Supposons que $\text{car } \mathbb{K} \neq 2$ et soit $f \in \mathcal{L}_2(E)$. Alors f est alternée si, et seulement si elle est antisymétrique.

Idées pour la preuve. La preuve de (1) est automatique. Pour (2), si $f \in \mathcal{A}_2(E)$, alors pour tous $x, y \in E$, $f(x+y, x+y) = 0 = f(x, y) + f(y, x)$, d'où f est antisymétrique.

Si f est antisymétrique, pour tout $x \in E$, $f(x, x) = -f(x, x)$. Donc $2f(x, x) = 0$. D'après notre hypothèse sur la caractéristique de $\mathbb{K}$, on peut conclure. $\square$

Théorème 2.1.8. Supposons que $\text{car } \mathbb{K} \neq 2$. Alors

$$\mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}_2(E) \oplus \mathcal{A}_2(E)$$

Idées pour la preuve. Soit $f \in \mathcal{S}_2(E) \cap \mathcal{A}_2(E)$. Soient $x, y \in E$. Alors $f(x, y) = -f(y, x) = f(y, x)$. Donc $f(x, y) = 0$. Ainsi $f = 0$. D'autre part, soit $f \in \mathcal{L}_2(E)$. Considérons l'application $g : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $g(x, y) = f(y, x)$. Alors $g \in \mathcal{L}_2(E)$. On vérifie que

$$f_1 = \frac{1}{2}(f + g) \in \mathcal{S}_2(E), f_2 = \frac{1}{2}(f - g) \in \mathcal{A}_2(E), \text{ et } f = f_1 + f_2$$

D'où la conclusion souhaitée. $\square$

Exemple 2.1.9. Considérons la forme bilinéaire suivante

$$h : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto f(0) \int_0^1 g(t) dt$$

On vérifie que $h \notin \mathcal{S}_2(E)$, aussi $h \notin \mathcal{A}_2(E)$.

Exercice. Ecrire h sous la forme $h = h_1 + h_2$, où $h_1 \in \mathcal{S}_2(E)$ et $h_2 \in \mathcal{A}_2(E)$.

2.2 Formes bilinéaires en dimension finie

Supposons dans ce paragraphe que E est de dimension finie et soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Soit $f \in \mathcal{L}_2(E)$.

Définition 2.2.1. On appelle matrice de f dans la base B et on note $M(f, B)$ l'élément de $M_n(\mathbb{K})$ défini par

$$M(f, B) = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

Exemples 2.2.2. 1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1$. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$. Alors $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. De plus, dans la base canonique $B = \{1\}$ de $\mathbb{R}$, on a $M(g, B) = (1)$.

Lemme 2.2.3. Soient $x = \sum_i x_i e_i$ et $y = \sum_i y_i e_i$ deux éléments of E . Désignons par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

les matrices colonnes associées respectivement à x et y dans la base B . Alors

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j f(e_i, e_j) = X^t M(f, B) Y$$

Preuve. Automatique. □

Théorème 2.2.4. L'application $\psi : \mathcal{L}_2(E) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ définie par $\psi(f) = M(f, B)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus, on a $\dim \mathcal{L}_2(E) = n^2$.

Idées pour la preuve. Soit $f \in \mathcal{L}_2(E)$. Comme f est bilinéaire, f est déterminée de manière unique par les valeurs $f(e_i, e_j)$ où $1 \leq i, j \leq n$. Donc l'application ψ est bijective. On vérifie facilement la linéarité de ψ . Pour la dernière assertion, remarquons que comme ψ est un isomorphisme, alors $\dim \mathcal{L}_2(E) = \dim M_n(\mathbb{K})$. □

Théorème 2.2.5. Soit B' une autre base de E et posons $P = P_{BB'}$ (la matrice de passage de B à B'). Alors

$$M(f, B') = P^t M(f, B) P$$

Preuve. Soient x, y deux éléments de E . Désignons par X et Y les vecteurs colonnes qui représentent respectivement x et y dans la base B . D'autre part soient X' et Y' les vecteurs colonnes qui représentent respectivement x et y dans la base B' . Alors $X = P X'$ et $Y = P Y'$. Donc

$$f(x, y) = X^t M(f, B) Y = X'^t P^t M(f, B) P Y' = X'^t M(f, B') Y'$$

Donc les deux matrices $M(f, B')$ et $P^t M(f, B) P$ déterminent f . D'après le théorème ci-dessus, ces deux matrices doivent être égales. $\square$

Remarque 2.2.6. Retenons de cette preuve que si M et M' sont deux éléments de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant $X^t M Y = X^t M' Y$ pour tous $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ alors $M = M'$. On peut aussi démontrer ce résultat directement en donnant des valeurs adéquates à X et Y .

Exemple 2.2.7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Alors

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posons $B' = \{e_1 + e_2, e_2\}$. Alors

$$P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(f, B') = P_{BB'}^t M(f, B) P_{BB'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.2.8. Soit $f \in \mathcal{L}_2(E)$. Alors f est symétrique si et seulement si $M(f, B)$ est symétrique.

Preuve. Soit $g : E \times E \rightarrow E$ définie par $g(x, y) = f(y, x)$. Alors $g(e_i, e_j) = f(e_j, e_i)$ donc $M(g, B) = M(f, B)^t$. Donc on peut conclure facilement. $\square$

2.3 Formes quadratiques

Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose que $\text{car } \mathbb{K} \neq 2$.

2.3.1 Cas général

Définition 2.3.1. Soit $f \in \mathcal{S}_2(E)$. On lui associe une application

$$q : E \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto f(x, x)$$

q est appelée la forme quadratique associée à f , et f est appelée la forme polaire de q . Désignons par $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E .

Cette définition est tout à fait légitime grâce au résultat suivant

Lemme 2.3.2. Soient f_1 et f_2 deux éléments de $\mathcal{S}_2(E)$. Supposons que les formes quadratiques associées q_1 et q_2 sont égales. Alors $f_1 = f_2$.

Preuve. Pour tous $x, y \in E$ et $j = 1, 2$, on a

$$q_j(x + y) = f_j(x + y, x + y) = q_j(x) + q_j(y) + 2f_j(x, y).$$

D'où $f_1 = f_2$. □

Théorème 2.3.3. Soit $q : E \rightarrow \mathbb{K}$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) q est quadratique.

(2) Pour tous $x \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$ et l'application $g : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $g(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$ est bilinéaire symétrique.

Preuve. Supposons que (1) est vérifié et montrons (2). Soit f la forme polaire de q . Alors pour tous $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$,

$$q(\alpha x) = f(\alpha x, \alpha x) = \alpha^2 q(x)$$

D'autre part,

$$q(x + y) - q(x) - q(y) = f(x + y, x + y) - f(x, x) - f(y, y) = 2f(x, y)$$

Donc $g = 2f \in \mathcal{S}_2(E)$.

Pour la réciproque, supposons que (2) est vérifié. Alors $g \in \mathcal{S}_2(E)$, et $q(x) = \frac{1}{2}(q(2x) - 2q(x)) = \frac{1}{2}g(x, x)$. Donc q est quadratique. □

Théorème 2.3.4. $\mathcal{Q}(E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et l'application $\varphi : \mathcal{S}_2(E) \rightarrow \mathcal{Q}(E)$ définie par

$$\varphi(f)(x) = f(x, x), \quad f \in \mathcal{S}_2(E), \quad x \in E$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. De plus, pour tout $q \in \mathcal{Q}(E)$, sa forme polaire f est définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)), \quad x, y \in E.$$

Preuve. Automatique. □

2.3.2 Cas dimension finie

Supposons dans ce paragraphe que E est de dimension finie et soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$ et soit f sa forme polaire.

Définition 2.3.5. *La matrice de q dans la base B est*

$$M(q, B) = M(f, B) = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Exemple 2.3.6. Posons $E = \mathbb{K}^n$. Soit $(a_{ij})_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$. Considérons $q : E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$. Alors on vérifie que q est une forme quadratique sur E . On trouve pour sa forme polaire

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i y_j + \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_j y_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij} + a_{ji}) x_i y_j$$

Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors on a

$$f(e_k, e_k) = a_{kk}, \quad f(e_k, e_l) = \frac{1}{2}(a_{kl} + a_{lk}), \quad k \neq l$$

Appliquons le résultat de l'exemple théorique précédent à l'exemple suivant

Exemple 2.3.7.

$$q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_1x_2$$

Alors si B est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a

$$M(q, B) = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.3.8. *Soit $x = \sum_i x_i e_i$ un élément de E . Désignons par X le vecteur colonne qui représente x dans la base B . Alors*

$$q(x) = X^t M(q, B) X = \sum_i x_i^2 q(e_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j f(e_i, e_j)$$

Preuve. $q(x) = f(x, x) = X^t M(f, B) X = \sum_{ij} x_i x_j f(e_i, e_j)$. En utilisant la symétrie de f , on déduit l'égalité désirée. $\square$

Lemme 2.3.9. Soient $f \in \mathcal{L}_2(E)$ et B' une autre base de E . Alors les matrices $M(f, B)$ et $M(f, B')$ ont le même rang.

Preuve. On a $M(f, B') = P_{BB'}^t M(f, B) P_{BB'}$. Or $P_{BB'}$ est inversible donc sa transposée est aussi inversible. D'où la conclusion. $\square$

Définition 2.3.10. 1) Le rang de q est $\text{rg } q = \text{rg } M(f, B)$.
2) Le discriminant de q dans la base B est la quantité notée $\Delta_B(q)$ et définie par $\Delta_B(q) = \det M(q, B)$.

Exemple 2.3.11. $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec $q(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 2x_1^2$. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$M(q, B) = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_B(q) = -\frac{1}{4}, \quad \text{rg } q = 2$$

Remarque 2.3.12. Soit B' une autre base de E . Alors on vérifie que $\Delta'_B(q) = \det P_{BB'}^2 \Delta_B(q)$.

2.3.3 Orthogonalité

Dans tout ce paragraphe, $q \in \mathcal{Q}(E)$ et f est sa forme polaire.

Définition 2.3.13. (1) Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux et on note $x \perp y$ si $f(x, y) = 0$.

(2) Soit $B_1 = \{x_1, \dots, x_r\} \subset E$. On dit que B_1 est orthogonale si $x_i \perp x_j$ pour tous $i \neq j$. On dit que B_1 est orthonormale si $f(x_i, x_j) = \delta_{ij}$ pour tous i, j .

(3) Soit $x \in E$. On dit que x est isotrope si $q(x) = 0$. L'ensemble des éléments isotropes pour q est noté $\mathcal{C}(q)$.

Exemples 2.3.14. $E = \mathbb{R}^2$. Soit $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2.$$

On vérifie que $f \in \mathcal{S}_2(E)$, que $(1, 2) \perp (2, 1)$, $(1, 1) \in \mathcal{C}(q)$ et que $\{(1, 2), (2, 1)\}$ est une famille orthogonale qui n'est pas orthonormale. Observons aussi que $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ est une famille orthogonale.

Lemme 2.3.15. Soit $B_1 = \{x_1, \dots, x_r\}$ une famille orthogonale de E telle que $B_1 \cap \mathcal{C}(q) = \emptyset$. Alors B_1 est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Preuve. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_i \alpha_i x_i = 0$. Alors pour tout j , $f(\sum \alpha_i x_i, x_j) = \alpha_j q(x_j) = 0$. Puisque $q(x_j) \neq 0$, on déduit que $\alpha_j = 0$. $\square$

Définition 2.3.16. Soient $A, B \subset E$.

(1) On dit que A et B sont orthogonales et on note $A \perp B$ si $f(x, y) = 0$ pour tous $x \in A, y \in B$.

(2) L'orthogonal de A est l'ensemble noté $A^\perp$, défini par

$$A^\perp = \{y \in E : f(x, y) = 0 \text{ pour tous } x \in A\}$$

(3) Le noyau de q (ou de f) est l'ensemble $E^\perp$, on le note aussi par $\mathcal{N}(q)$ (ou $\mathcal{N}(f)$).

(4) On dit que q (ou f) est non dégénérée si $\mathcal{N}(q) = \{0\}$. Sinon, on dit que q (ou f) est dégénérée.

Exemple 2.3.17. $E = \mathbb{C}^2$. Soit $f : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_2 y_2.$$

Alors $f \in \mathcal{S}_2(E)$. Observons que $(1, 0) \in \mathcal{N}(f)$ et que $\{(0, 1)\}^\perp = \text{Vec}\{(1, 0)\}$.

Proposition 2.3.18. (1) Soient A et B deux parties de E avec $A \subset B$. Alors $B^\perp \subset A^\perp$.

(2) Soit $A \subset E$. Alors $A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E , $A^\perp = (\text{Vec} A)^\perp$ et $A \subset A^{\perp\perp}$.

(3) $\mathcal{N}(q) \subset \mathcal{C}(q)$.

Preuve. Automatique. $\square$

Théorème 2.3.19. Supposons que $\dim E < \infty$ et soit B une base de E .

(1) Soit $x \in E$ et soit X le vecteur colonne qui représente x dans la base B . Alors $x \in \mathcal{N}(q)$ si, et seulement si $M(q, B)X = 0$.

(2) $\text{rg } q + \dim \mathcal{N}(q) = \dim E$.

(3) q est non dégénérée si et seulement si $\text{rg } q = \dim E$. Ceci est équivalent à $\Delta_B(q) \neq 0$.

Preuve. (1) Soit $x \in E$. Supposons que $x \in \mathcal{N}(q)$. Alors pour tout $y \in E$ on a $f(x, y) = 0$. Donc pour tout vecteur colonne $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $Y^t M(f, B) X = 0$. En considérant en particulier les vecteurs colonnes Y associés à la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on déduit que $M(f, B) X = 0$. La réciproque est évidente.

(2) Posons $r = \text{rg } q$. Si $r = \dim E$, alors $M(q, B)$ est inversible et donc d'après (1), $\mathcal{N}(q) = \{0\}$. Donc on a l'égalité (2) dans ce cas. Supposons maintenant que $r < \dim E = n$. Posons $B = \{e_1, \dots, e_n\}$. Alors $M(f, B)$ est formée des vecteurs colonnes $f(., e_j)$, où

$$f(., e_j) = \begin{pmatrix} f(e_1, e_j) \\ \vdots \\ f(e_n, e_j) \end{pmatrix},$$

Quitte à changer les indices, on peut supposer que la famille des vecteurs colonnes $\{f(., e_1), \dots, f(., e_r)\}$ est libre et pour tout $l \geq r+1$, on peut écrire

$$f(., e_l) = \sum_{j=1}^r \lambda_j^l f(., e_j)$$

Donc on déduit que $f(., e_l - \sum_{j=1}^r \lambda_j^l e_j) = 0$. Ainsi, $e_l - \sum_{j=1}^r \lambda_j^l e_j$ est un élément de $\mathcal{N}(q)$. D'autre part, observons que la famille

$$B_2 = \{e_{r+1} - \sum_{j=1}^r \lambda_j^{r+1} e_j, \dots, e_n - \sum_{j=1}^r \lambda_j^n e_j\}$$

est libre et $\{e_1, \dots, e_r\} \cup B_2$ est une base de E . Donc $\dim \mathcal{N}(q) \geq n - r$. Posons $e'_l = e_l - \sum_{j=1}^r \lambda_j^l e_j$ pour tout $l \geq r+1$. Soit $x \in \mathcal{N}(q)$. Ecrivons $x = \sum_{j=1}^r \alpha_j e_j + \sum_{j=r+1}^n \beta_j e'_j$. Alors

$$f(., x) = 0 = \sum_{j=1}^r \alpha_j f(., e_j).$$

Comme $\{f(., e_1), \dots, f(., e_r)\}$ est libre, on déduit que $\alpha_j = 0$ pour tout j . Ainsi $\mathcal{N}(q) = E^\perp$ est le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs e'_j , où $j \geq r+1$. En particulier, $\dim \mathcal{N}(q) = n - r$.

(3) est une conséquence directe de (2). $\square$

Supposons que $\dim E < \infty$ et soit B une base de E . Observons qu'on peut associer à f une application linéaire de E dans E^* qui a la même matrice que f . Plus précisément, désignons par Γ_f l'application définie par

$$\Gamma_f : E \rightarrow E^*, \quad x \mapsto f(x, \cdot).$$

Alors on vérifie facilement que Γ_f est linéaire et que $\text{Ker } \Gamma_f = \mathcal{N}(f)$. De plus, $M(\Gamma_f, B, B^*) = M(f, B)$; en effet,

$$\Gamma_f(e_j) = \sum_{i=1}^n (\Gamma_f(e_j))(e_i) e_i^* = \sum_{i=1}^n f(e_i, e_j) e_i^*$$

Ainsi, la colonne j de $M(\Gamma_f, B, B^*)$ est

$$\begin{pmatrix} f(e_1, e_j) \\ \vdots \\ f(e_n, e_j) \end{pmatrix},$$

elle coïncide avec la colonne j de $M(f, B)$.

Appliquons le théorème du rang à Γ_f , on obtient $\text{rg } \Gamma_f + \dim \text{Ker } \Gamma_f = \dim E$ et on retrouve l'égalité $\text{rg } q + \dim \mathcal{N}(q) = \dim E$.

Si $a \in E$, nous utiliserons souvent la notation $a^\perp$ au lieu de $\{a\}^\perp$.

Théorème 2.3.20. *Supposons que $\dim E < \infty$ et soit $a \notin \mathcal{N}(q)$. Alors $a^\perp$ est un hyperplan de E .*

Preuve. Comme $a \notin \mathcal{N}(q)$, alors il existe $y \in E$ tel que $f(a, y) \neq 0$. Considérons l'application

$$f(a, \cdot) : E \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto f(a, x).$$

Alors $f(a, \cdot) \in E^*$ et $f(a, \cdot) \neq 0$. D'après le chapitre 1, $\text{Ker } f(a, \cdot)$ est un hyperplan de E . $\square$

Théorème 2.3.21. *Supposons que $\dim E < \infty$. Alors il existe une base orthogonale dans E (pour q).*

Preuve. Raisonnons par récurrence sur la dimension n de E . Si $n = 1$, alors tout élément non nul de E forme une base orthogonale. Supposons que le théorème est vrai pour $\dim E = k$, $k \leq n - 1$.

Pour $\dim E = n$. Si $q = 0$, alors $f = 0$ et toute base de E est orthogonale. Supposons que $q \neq 0$. Donc $\text{rg } q \geq 1$ et $\dim \mathcal{N}(q) \leq n - 1$. Choisissons $e_1 \in E$ avec $e_1 \notin \mathcal{C}(q)$. Alors $e_1^\perp$ est un hyperplan de E (d'après le résultat précédent). Posons $q' = q|_{e_1^\perp}$. Appliquons l'hypothèse de récurrence donc à q' et à $e_1^\perp$. Il existe une base orthogonale B' de $e_1^\perp$. Il est clair que $B' \cup \{e_1\}$ est une base orthogonale de E . $\square$

Les deux résultats suivants, qui sont faciles à établir, soulignent l'importance des bases orthonormales et orthogonales.

Proposition 2.3.22. *Supposons que $\dim E < \infty$ et soit B une base de E .*

- (1) $M(q, B)$ est diagonale si et seulement si B est orthogonale.
- (2) $M(q, B) = I_n$ si et seulement si B est orthonormale.

Preuve. Remarquons que $M(q, B)$ est diagonale si et seulement si $f(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$, et $M(q, B) = I_n$ si et seulement si $f(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. $\square$

Théorème 2.3.23. *Supposons que $\dim E < \infty$. Alors il existe une base B de E pour laquelle $M(q, B)$ est diagonale. Ecrivons $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, alors pour tout $x = \sum x_i e_i \in E$, on a $q(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2$ où $M(q, B) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.*

Preuve. Automatique. $\square$

Exemple 2.3.24. Posons $E = \mathbb{R}^2$. Soit $B = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Posons $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Alors $q \in \mathcal{Q}(E)$ et

$$M(q, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

en particulier, $f(e_1, e_2) = -1$. Trouvons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_1, e_2 + \alpha e_1) = 0$. Alors on trouve $\alpha = 1$. Donc $B' = \{e_1, e_1 + e_2\}$ est une base orthogonale de E .

$$M(f, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Observons que $e_1 + e_2 \in \mathcal{N}(q)$.

Définition 2.3.25. *Soit H un sous espace vectoriel de E avec $H \neq \{0\}$.*

- (1) On dit que H est isotrope si $H \cap H^\perp \neq \{0\}$.

(2) On dit que H est totalement isotrope si pour tout $x \in H$, $q(x) = 0$.

Remarque 2.3.26. Si H est un sous espace vectoriel totalement isotrope, alors $H \subset H^\perp$.

Théorème 2.3.27. Supposons que $\dim E < \infty$ et soit H un sous espace vectoriel de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $q|_H$ est non dégénérée.

(2) $H \cap H^\perp = \{0\}$

(3) $H \oplus H^\perp = E$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) : Supposons que (1) est vérifiée. Soit $y \in H \cap H^\perp$. Alors pour tout $x \in H$, $f(x, y) = 0$ donc $y = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Soit $\{u_1, \dots, u_r\}$ une base orthogonale de H pour $q|_H$. Supposons qu'il existe i tel que $q(u_i) = 0$. Alors pour tout $x = \sum_j \alpha_j u_j \in H$, on a

$$f(x, u_i) = \sum \alpha_j f(u_j, u_i) = \alpha_i q(u_i) = 0$$

Donc $u_i \in H^\perp \cap H$, ce qui est absurde. Donc pour tout i , $q(u_i) \neq 0$. Posons $\alpha_i = q(u_i)$. Soit $x \in E$, posons $\beta_i = f(x, u_i)$. Alors

$$f(x - \sum_{i=1}^r \beta_i \alpha_i^{-1} u_i, u_j) = f(x, u_j) - \sum_{i=1}^r \beta_i \alpha_i^{-1} f(u_i, u_j) = f(x, u_j) - \beta_j \alpha_j^{-1} q(u_j) = 0$$

Posons $x' = \sum_{i=1}^r \beta_i \alpha_i^{-1} u_i$, alors $x' \in H$, $x - x' \in H^\perp$ et $x = x' + x - x'$. Ainsi, $E = H + H^\perp$. Or $H \cap H^\perp = \{0\}$. Donc $E = H \oplus H^\perp$.

Pour (3) $\Rightarrow$ (1) : Posons $q' = q|_H$. Comme $H \cap H^\perp = \{0\}$, alors $\mathcal{N}(q') = \{0\}$. $\square$

Théorème 2.3.28. Supposons que $\dim E < \infty$ et que q est non dégénérée. Soit H un sous espace vectoriel de E . Alors

(1) $\dim H + \dim H^\perp = \dim E$.

(2) $(H^\perp)^\perp = H$.

Preuve. (1) : Pour tout $x \in E$, désignons par $f(x, \cdot)$ l'élément g de E^* défini par $g(y) = f(x, y)$ pour tout $y \in E$. Considérons encore une fois l'application linéaire $T \equiv \Gamma_f : E \rightarrow E^*$ définie par $Tx = f(x, \cdot)$. Alors

$$TH = \{f(x, \cdot) : x \in H\}.$$

En particulier, observons que $(TH)^\circ = H^\perp$. Rappelons que d'après le chapitre 1, $\dim(TH)^\circ + \dim TH = \dim E$. D'autre part, comme f est non dégénérée, $\text{Ker} T = \{0\}$. Donc $\dim TH = \dim H$. D'où l'égalité souhaitée.

(2) : On sait que $H \subset H^{\perp\perp}$. D'autre part,

$$\dim H^\perp + \dim H^{\perp\perp} = \dim E = \dim H + \dim H^\perp.$$

Donc $\dim H = \dim H^{\perp\perp}$. D'où l'égalité. $\square$

Exemple 2.3.29. Posons $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soit $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(P) = P(0)P(1)$. Montrons que $q \in \mathcal{Q}(E)$. Soient $P, R \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$q(\alpha P) = \alpha^2 P(0)P(1) = \alpha^2 q(P).$$

Posons

$$g(P, R) = q(P + R) - q(P) - q(R).$$

Alors $g(P, R) = P(0)R(1) + R(0)P(1)$. En particulier $g(P, R) = g(R, P)$. Si $R' \in E$ alors on vérifie que

$$g(\alpha R + R', P) = \alpha g(R, P) + g(R', P).$$

Donc $q \in \mathcal{Q}(E)$. Considérons la base canonique de E , $B = \{1, X, X^2\}$. Alors

$$M(q, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Donnons une base orthogonale de E pour q . Posons $u_1 = 1$. On a $f(1, X) = 1/2$, donc comme $q(1) = 1$, on déduit que $f(1, X - 1/2) = 0$. Posons $u_2 = X - 1/2$. $\{u_1, u_2\}$ est orthogonale. Trouvons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $f(X^2 + \alpha u_1 + \beta u_2, u_j) = 0$ pour $j = 1, 2$. On a $f(X^2, u_1) = 1/2$, donc $\alpha = -1/2$. Après un petit calcul, on trouve $\beta = -1$. Posons $u_3 = X^2 - 1/2 - (X - 1/2) = X^2 - X$, alors la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est orthogonale.

On peut aussi remarquer que la famille $\{X, X^2\}$ est une famille orthogonale et compléter par un vecteur convenable.

2.3.4 Cas où $\dim E < \infty$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$

Supposons dans ce paragraphe que E est de dimension finie n . Soient $q \in \mathcal{Q}(E)$ et soit f sa forme polaire. Dans la suite nous appliquerons les résultats qu'on a montré, principalement le fait que E admet une base orthogonale pour q , pour écrire q sous une forme simple.

Théorème 2.3.30. *Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $\text{rg } q = r$. Alors il existe une base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E tel que q s'écrit comme somme de r carrés dans la base B , c'est à dire si $x = \sum_j x_j e_j \in E$, alors $q(x) = \sum_{j=1}^r x_j^2$.*

Preuve. Soit $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ une base orthogonale de E . Alors $M(q, B_1)$ est diagonale. Ecrivons $M(q, B_1) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Comme $\text{rg } q = r$, alors il y'a exactement r valeurs de j pour lesquelles $\lambda_j \neq 0$. Quitte à permuter les u_j , on peut supposer que $\lambda_j \neq 0$ pour $1 \leq j \leq r$ et $\lambda_j = 0$ pour $j > r$ (il se peut que $r = n$ et donc un tel j n'existera pas). Soit $x \in E$. Ecrivons $x = \sum_j y_j u_j$. Alors $q(x) = \sum_{j=1}^r \lambda_j y_j^2$. Pour tout $1 \leq j \leq r$, soit $\alpha_j \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha_j^2 = \lambda_j$. Comme $\lambda_j \neq 0$ alors $\alpha_j \neq 0$. On a $q(x) = \sum_{j=1}^r (\alpha_j y_j)^2$. Posons $x_j = \alpha_j y_j$, alors

$$x = \sum_{j=1}^r x_j \frac{u_j}{\alpha_j} + \sum_{j=r+1}^n y_j u_j$$

Posons

$$e_j = \frac{u_j}{\alpha_j}, \quad e_k = u_k, \quad 1 \leq j \leq r, \quad r+1 \leq k \leq n$$

Alors il est clair que $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E et que si $x = \sum_j x_j e_j$, $q(x) = \sum_{j=1}^r x_j^2$. $\square$

Corollaire 2.3.31. *Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que q est non dégénérée, alors il existe une base orthonormale dans E pour q .*

Preuve. Comme $\mathcal{N}(q) = \{0\}$, alors $\text{rg } q = n$. Appliquons le théorème ci-dessus, donc il existe une base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E telle que si $x = \sum_j x_j e_j$ est un élément de E , $q(x) = \sum_{j=1}^n x_j^2$. Il est clair que la matrice $M(q, B) = I_n$. D'où B est orthonormale. $\square$

Théorème 2.3.32. *Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $\text{rg } q = r$. Alors il existe une base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E et un entier p tels que : $0 \leq p \leq r$, si $x = \sum_j x_j e_j \in E$, alors $q(x) = \sum_{j=1}^p x_j^2 - \sum_{j=p+1}^r x_j^2$. De plus, p ne dépend pas de la base B .*

Preuve. Comme dans la preuve du théorème 2.3.30, Soit $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ une base orthogonale de E ; si $x = \sum_j y_j u_j$, alors $q(x) = \sum_{j=1}^r \lambda_j y_j^2$, où $M(q, B) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Si $\lambda_j < 0$ pour tout $1 \leq j \leq r$, posons $p = 0$. S'il existe des $\lambda_j > 0$, encore une fois, on peut permuter les u_j pour $1 \leq j \leq r$ et supposer que $\lambda_j > 0$ pour $1 \leq j \leq p$ et $\lambda_j < 0$ pour $p+1 \leq j \leq r$ (il se peut

que $p = r$ et donc un tel j n'existera pas). Soient $\alpha_j \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_j = \sqrt{\lambda_j}$ si $\lambda_j > 0$ et $\alpha_j = \sqrt{-\lambda_j}$ si $\lambda_j < 0$, où $1 \leq j \leq r$. Alors

$$q(x) = \sum_{j=1}^p (\alpha_j y_j)^2 - \sum_{j=p+1}^r (\alpha_j y_j)^2$$

En procédant comme dans la preuve du théorème 2.3.30, on pose

$$e_j = \frac{u_j}{\alpha_j}, \quad e_k = u_k, \quad 1 \leq j \leq r, r+1 \leq k \leq n$$

Dans la base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, q a la forme désirée.

Montrons maintenant que p ne dépend pas de la base B . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une autre base $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ et il existe $0 \leq p' \leq r$ tel que $p' \neq p$ et si $x = \sum_j z_j e'_j \in E$, alors $q(x) = \sum_{j=1}^{p'} z_j^2 - \sum_{j=p'+1}^r z_j^2$. Supposons par exemple que $p' > p$. Posons $G = \text{Vec}\{e'_1, \dots, e'_{p'}\}$ et $F = \text{Vec}\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$. Si $x \in F$ et $x \neq 0$ alors $q(x) < 0$ et si $x \in G$ et $x \neq 0$, alors $q(x) > 0$. Donc $F \cap G = \{0\}$, par suite $\dim F + \dim G \leq \dim E$. Or $\dim F = n - p$ et $\dim G = p'$, donc $\dim F + \dim G \geq n + 1$, contradiction. Ainsi, $p = p'$. $\square$

Vocabulaire. Avec les notations du théorème ci-dessus, le couple $(p, r - p)$ est appelé signature de la forme quadratique q .

2.3.5 Méthode de Gauss pour la décomposition des formes quadratiques

On suppose dans ce paragraphe que E est de dimension finie n . Deux matrices carrées M_1 et M_2 dans $M_n(\mathbb{K})$ sont dites congruentes s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $M_2 = P^t M_1 P$. Autrement dit, d'après Théorème 2.2.5, M_1 et M_2 sont congruentes si elles représentent une même forme bilinéaire dans deux bases différentes. Comme à toute matrice symétrique on associe une forme quadratique, d'après Théorème 2.3.21 et Proposition 2.3.22, on peut énoncer le résultat suivant

Théorème 2.3.33. *Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale.*

Lemme 2.3.34. Soient $\{h_1, \dots, h_r\} \subset E^*$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, r éléments non nuls de $\mathbb{K}$. Alors la forme quadratique q définie sur E par

$$q(x) = \lambda_1 h_1(x)^2 + \dots + \lambda_r h_r(x)^2$$

est de rang r si et seulement si la famille $\{h_1, \dots, h_r\}$ est libre.

Preuve. Voir TD. □

Dans les exemples qui suivent, nous utiliserons la méthode de Gauss pour décomposer les formes quadratiques. Ensuite, nous décrirons théoriquement cette méthode. Observons qu'elle permet en particulier de décomposer une forme quadratique sous forme de combinaison linéaire de r carrés, où r est exactement le rang de q .

Exemple 2.3.35. Traitons les cas $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ pour : $q(x) = x_1 x_2$. Alors $q(x) = \frac{1}{4}[(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2]$. Donc dans $\mathbb{C}$, on a :

$$q(x) = \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right)^2 + \left(\frac{i}{2}(x_1 - x_2)\right)^2.$$

”Le raisonnement suivant permet de retrouver la base dans laquelle on a décomposé q sous forme diagonale : Posons $x'_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ et $x'_2 = \frac{i}{2}(x_1 - x_2)$. Alors

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ i/2 & -i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Soit B' la base de $\mathbb{C}^2$ telle que

$$P_{B'B} = P_{BB'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ i/2 & -i/2 \end{pmatrix}.$$

Alors $M(q, B')$ est diagonale. B' correspond à la base décrite dans le théorème 2.3.30.”

Dans $\mathbb{R}$, on a

$$q(x) = \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(x_1 - x_2)\right)^2.$$

Observons que dans les deux cas le rang de q est égal à 2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la signature de q est donc égale à $(1, 1)$.

Dans la suite, si $q(x)$ est donnée en fonctions des coordonnées $x_1, \dots, x_n$ de x dans une base B , on écrira la forme finale en utilisant ces mêmes coordonnées. La méthode de Gauss garantit qu'on obtient la forme désirée avec le rang exact de q . Si on utilise une autre méthode, il faut vérifier à la fin que la décomposition obtenue a la forme $q(x) = x_1'^2 + \dots + x_r'^2$, où r est bien le rang de q .

Exemple 2.3.36. Observons encore une fois l'exemple suivant : $q(x) = x_1x_2$ dans $\mathbb{C}^3$.

$$q(x) = x_1x_2 = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)\right)^2 + \left(\frac{i}{\sqrt{2}}x_1\right)^2 + \left(\frac{i}{\sqrt{2}}x_2\right)^2$$

Mais on ne peut pas déduire que le rang de q est égal à 3 puisque les formes linéaires utilisées dans la décomposition ne forment pas une famille libre.

Exemple 2.3.37. $q(x) = x_1^2 - x_1x_2$. Alors

$$q(x) = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2.$$

Exemple 2.3.38. Dans $\mathbb{R}^4$, soit $q(x) = x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_4$. Alors

$$q(x) = \left(x_2 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \frac{1}{4}x_4^2 + x_1x_3$$

Donc, comme dans le premier exemple

$$q(x) = \left(x_2 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \frac{1}{4}x_4^2 + \frac{1}{4}[(x_1 + x_3)^2 - (x_1 - x_3)^2]$$

Enfin, on conclut que

$$q(x) = \left(x_2 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x_4\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_3)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(x_1 - x_3)\right)^2$$

Observons les trois exemples ci-dessus, nous pouvons remarquer ce qui suit : Une forme quadratique est donnée par sa forme dans une base initiale B , les coordonnées de x sont $x_1, \dots, x_n$. En appliquant la procédure de Gauss, on écrit q comme combinaison linéaire de carrés $x_1'^2, \dots, x_r'^2$. Écrivons $x_i' = h_i(x_1, \dots, x_n)$, alors $h_i \in E^*$ et on a $\{h_1, \dots, h_r\}$ est libre.

Réduction de Gauss. La méthode de Gauss est un algorithme qui permet

de décomposer toute forme quadratique $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{K}^n)$ en combinaison linéaire de carrés. On procède par récurrence descendante. Soit

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

une forme quadratique non nulle sur $\mathbb{K}^n$, où $a_i, a_{ij} \in \mathbb{K}$; q est exprimée dans la base B de $\mathbb{K}^n$. Nous distinguons deux cas :

Cas 1 : Supposons qu'il existe i tel que $a_i \neq 0$. Quitte à permuter les variables, on peut supposer que $a_1 \neq 0$. Alors

$$q(x) = a_1(x_1 + \frac{1}{2a_1}P)^2 + Q,$$

où P et Q sont des polynômes homogènes en $x_2, \dots, x_n$. P est de degré 1 et Q est de degré 2.

Cas 2 : Supposons maintenant que $a_i = 0$ pour tout i . Soit j tel que $a_{ij} \neq 0$. Sans perdre la généralité, on peut supposer que $a_{12} \neq 0$ (puisqu'on peut réordonner les éléments de la base B). Alors

$$q(x) = a_{12}x_1x_2 + x_1P + x_2Q + R,$$

où les polynômes P, Q et R sont dans $\mathbb{K}[X_3, \dots, X_n]$; P et Q sont de degré 1 et R est de degré 2. Donc

$$q(x) = a_{12}(x_1 + \frac{1}{a_{12}}Q)(x_2 + \frac{1}{a_{12}}P) - \frac{1}{a_{12}}PQ + R$$

En procédant comme dans l'exemple 2.3.35, on obtient

$$q(x) = \frac{a_{12}}{4}[(x_1 + \frac{1}{a_{12}}Q + x_2 + \frac{1}{a_{12}}P)^2 - (x_1 + \frac{1}{a_{12}}Q - x_2 - \frac{1}{a_{12}}P)^2] + R - \frac{1}{a_{12}}PQ$$

Ensuite, on itère le procédé. Enfin, en appliquant le Lemme 4.2.10, on déduit que le nombre de carrés dans la combinaison linéaire obtenue coïncide avec le rang.

Remarques. (1) Une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$ est un polynôme homogène de degré 2 à n variables sur $\mathbb{K}$.

(2) Le Théorème 2.3.32 est dû à Sylvester. Il est souvent appelé loi d'inertie de Sylvester. On peut l'énoncer comme suit, en utilisant juste le vocabulaire commun des polynômes : ' Tout polynôme à n variables, homogène de degré 2 et à coefficients réels peut s'écrire comme sommes et différences de carrés. Le nombre de signes "+" et de signes "-" ne dépend pas de la décomposition.'

Chapitre 3

Espaces Euclidiens

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

3.1 Notions de base

Définition 3.1.1. Soit q une forme quadratique sur E . On dit que q est **définie positive** sur E si $q(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. La forme polaire f de q est appelée **produit scalaire associé** à q . Dans ce cas, on note $f(x, y) := \langle x, y \rangle$ pour tous $x, y \in E$ et on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (ou juste E s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté) est un **espace euclidien**.

Exemples 3.1.2. (1) Rappelons la structure euclidienne classique de $\mathbb{R}^n$:

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

(2) Posons $E = \mathbb{R}_3[X]$. Soit $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$q\left(\sum_{i=0}^3 a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^3 a_i^2.$$

Observons que q est une forme quadratique sur E pour laquelle la base canonique $\{1, X, X^2, X^3\}$ de E est une base orthonormale. Il est clair que q est définie positive. Cette structure est appelée **structure euclidienne canonique** de E . On peut généraliser cet exemple à $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 3.1.3. (*Inégalité de Cauchy Schwartz*), Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Alors pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve. Soit q la forme quadratique associée au produit scalaire de E . Fixons $x, y \in E$ et considérons $P(t) = q(x + ty)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique, on déduit l'égalité

$$P(t) = t^2 q(y) + 2t \langle x, y \rangle + q(x)$$

En particulier, $P(t)$ peut être vu comme un polynôme en t qui est toujours de signe positif. Donc son discriminant est négatif, c'est à dire

$$\Delta' = \langle x, y \rangle^2 - q(x)q(y) \leq 0.$$

D'où l'inégalité. Supposons maintenant que $\Delta' = 0$. Alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $q(x + ty) = 0$. Autrement dit, $x + ty = 0$, c'est à dire x et y doivent être liés. La réciproque est évidente. $\square$

Dans un espace euclidien, la notion de produit scalaire nous permet de définir une distance sur E , de parler de longueurs, et de définir une structure géométrique. Rappelons d'abord la définition suivante de norme qui généralise les concepts de valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et de module sur $\mathbb{C}$:

Définition 3.1.4. Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $N : F \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application. On dit que N est une norme sur F si pour tous $x, y \in F$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

- (i) $N(x) = 0$ si, et seulement si $x = 0$,
- (ii) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,
- (iii) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (*Inégalité triangulaire*).

Lemme 3.1.5. Supposons que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien. Pour tout $x \in E$, posons $N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, alors N est une norme sur E . Elle est dite norme euclidienne associée au produit scalaire de E .

Preuve. Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$. Alors $\langle x, x \rangle > 0$, donc N est bien définie et $N(x) \neq 0$. La condition (i) pour la définition de norme est clairement vérifiée. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$N(\lambda x) = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| N(x).$$

Donc la condition (ii) est vérifiée. Enfin, pour (iii), utilisons encore une fois la bilinéarité du produit scalaire et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$N(x + y)^2 \leq N(x)^2 + N(y)^2 + 2N(x)N(y) = (N(x) + N(y))^2$$

D'où la conclusion désirée. $\square$

Une caractéristique importante des espaces euclidiens est l'absence des éléments isotropes. Dans la suite de ce premier paragraphe, nous exploitons cette propriété et nous déduisons des résultats importants.

Ainsi, le lemme 3.14 du chapitre 2 devient

Lemme 3.1.6. *Soit $B = \{u_1, \dots, u_r\}$ une famille orthogonale telle que $u_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$, alors la famille B est libre.*

Notation. Si E est un espace euclidien, on note par $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire de E . Ainsi, pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Remarque 3.1.7. On sait que si E est muni d'une forme quadratique q , alors tout sous espace vectoriel H de E est naturellement muni d'une forme quadratique de manière naturelle. En particulier, si E est un espace euclidien, tout sous espace vectoriel est un espace euclidien via le produit scalaire induit.

Théorème 3.1.8. *Supposons que E est un espace euclidien. Alors on a les assertions suivantes :*

- (1) *E admet une base orthonormale.*
- (2) *Si H est un sous espace vectoriel de E , alors $H \oplus H^\perp = E$ et $H^{\perp\perp} = H$.*
- (3) *Toute famille orthonormale de E est libre et peut être complétée en une base orthonormale de E .*

Preuve. Désignons par q la forme quadratique associée au produit scalaire de E , $q(x) = \langle x, x \rangle$.

(i) D'après le chapitre précédent, on sait qu'il existe une base orthogonale $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E associée à q . On a $q(x) = \|x\|^2$ pour tout x et $q(e_i) \neq 0$ pour tout i . Posons $u_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$. Alors

$$\|u_i\| = 1 = \langle u_i, u_i \rangle$$

En particulier, $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une base orthonormale de E .

(ii) La forme quadratique induite sur H est non dégénérée, puisque $\mathcal{N}(q|_H) \subseteq \mathcal{C}(q|_H)$, et on sait que $\mathcal{C}(q|_H) = \{0\}$. Donc d'après le chapitre 2, $H \oplus H^\perp = E$. D'autre part, comme q est non dégénérée, en utilisant encore une fois le chapitre 2, on déduit que, $H^{\perp\perp} = H$.

(iii) Soit B_1 une famille orthonormale de E . Alors tous les vecteurs qui la constituent sont non nuls et donc d'après le lemme 4.2.10, B_1 est libre. Posons $H = \text{Vec}(B_1)$ et soit B_2 une base orthonormale de l'espace euclidien $H^\perp$. Alors d'après (ii), $H \oplus H^\perp = E$. Donc il est clair que $B_1 \cup B_2$ est une base orthonormale de E . $\square$

3.2 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose que E est un espace euclidien.

Soient $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de E et soit $x \in E$. Ecrivons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Alors $x_i = \langle x, e_i \rangle$. Donc

$$(3.1) \quad x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

Ainsi, si $x, y \in E$, on a

$$(3.2) \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$$

En particulier,

$$(3.3) \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$$

Exercice élémentaire. Dans $\mathbb{R}^2$, trouver les coordonnées de $(5, -12)$ dans la base $B = \{(\frac{9}{5}, 1), (-3, \frac{6}{13})\}$.

Il est clair que dans l'exercice ci-dessus, la base B n'est pas orthonormale. Donc vous ne pouvez pas utiliser la formule (3.1) pour calculer les coordonnées et il faut y aller directement. En particulier, vous réaliserez qu'il est beaucoup plus facile de calculer les coordonnées dans une base orthonormale qu'une base quelconque (voir aussi TD, Série 3). Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'associer à chaque base de E une base orthonormale, qui lui soit proche dans un certain sens.

Exemple 3.2.1. Dans $\mathbb{R}^2$, considérons la base $B = \{e_1, e_2\}$ avec

$$e_1 = (1, 1), \quad e_2 = (1, 2).$$

Trouvons une base orthonormale $\{u_1, u_2\}$ qui soit proche de B dans le sens suivant : e_1 et u_1 engendrent la même droite. Trouvons λ de sorte que $u_1 = \lambda e_1$ et $\|u_1\| = 1$. Observons que $\|e_1\| = \sqrt{2}$.

$$\|\lambda e_1\| = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \lambda = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Prenons par exemple

$$u_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1)$$

Trouvons maintenant u_2 de sorte que

$$\langle u_1, u_2 \rangle = 0 \text{ et } \|u_2\| = 1$$

Ecrivons $u_2 = \lambda e_2 + \alpha u_1$. Alors

$$\langle u_2, u_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda \langle e_2, u_1 \rangle + \alpha \|u_1\|^2 = 0$$

Donc on déduit que

$$\alpha = -\lambda \langle e_2, u_1 \rangle = \frac{-3\lambda}{\sqrt{2}}$$

Maintenant

$$u_2 = \lambda(e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1) = \frac{\lambda}{2} (-1, 1)$$

Posons $u'_2 = e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1 = \frac{1}{2}(-1, 1)$, alors $u_2 = \lambda u'_2$ et comme $\|u_2\| = 1$, il faut avoir $|\lambda| = \frac{1}{\|u'_2\|}$. Donc on a deux choix pour λ ,

$$\lambda = \frac{1}{\|u'_2\|} \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{-1}{\|u'_2\|}.$$

Ainsi, nous avons deux choix pour u_2 . Les deux choix possibles sont

$$u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1), \quad \text{ou} \quad u_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2}(-1, 1).$$

Dans la suite, on va généraliser l'exemple élémentaire ci-dessus, et imposer plus de conditions pour avoir une unique base orthonormale associée à une base donnée. La procédure qu'on suit ici est due à Gram et Schmidt.

Théorème 3.2.2. *Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Alors il existe une unique base orthonormale $\{u_1, \dots, u_n\}$ de E vérifiant les conditions suivantes :*

- (i) *Pour tout i , $\text{Vec}\{u_1, \dots, u_i\} = \text{Vec}\{e_1, \dots, e_i\}$.*
- (ii) *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\langle u_i, e_i \rangle > 0$.*

Preuve. Construisons $\{u_1, \dots, u_n\}$ par récurrence. Pour u_1 , il faut trouver λ de sorte que $\|\lambda e_1\| = 1$ et $\langle u_1, e_1 \rangle > 0$. Il est clair que $\lambda = \frac{1}{\|e_1\|}$. Donc on

pose $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.

Supposons qu'on a construit une famille orthonormale $\{u_1, \dots, u_r\}$, $r < n$, qui vérifie les conditions (i) et (ii) du théorème, et que cette famille est unique. Construisons u_{r+1} . On doit avoir

$$u_{r+1} = \lambda e_{r+1} + \sum_{k=1}^r \lambda'_k e_k, \quad \lambda, \lambda'_k \in \mathbb{R},$$

avec

$$\langle u_{r+1}, u_i \rangle = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq r; \quad \langle u_{r+1}, e_{r+1} \rangle > 0; \quad \|u_{r+1}\| = 1$$

D'après la condition (i) du théorème, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tel que $\sum_{k=1}^r \lambda'_k e_k = \sum_{k=1}^r \lambda_k u_k$. Donc

$$u_{r+1} = \lambda e_{r+1} + \sum_{k=1}^r \lambda_k u_k.$$

Soit $i \in \{1, \dots, r\}$ fixé. Alors

$$\langle u_{r+1}, u_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda \langle e_{r+1}, u_i \rangle + \sum_{k=1}^r \lambda_k \langle u_k, u_i \rangle = 0$$

Comme la famille $\{u_1, \dots, u_r\}$ est orthonormale, on obtient

$$\langle u_{r+1}, u_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = -\lambda \langle e_{r+1}, u_i \rangle$$

Ainsi,

$$u_{r+1} = \lambda(e_{r+1} - \sum_{k=1}^r \langle e_{r+1}, u_k \rangle u_k)$$

Posons $u'_{r+1} = e_{r+1} - \sum_{k=1}^r \langle e_{r+1}, u_k \rangle u_k$. Les deux conditions qui restent à satisfaire sont

$$\|\lambda u'_{r+1}\| = 1, \quad \langle u_{r+1}, e_{r+1} \rangle > 0$$

On déduit donc que $|\lambda| = \frac{1}{\|u'_{r+1}\|}$, et le signe de λ est déterminé par la propriété $\langle u_{r+1}, e_{r+1} \rangle > 0$. On a

$$1 = \langle u_{r+1}, u_{r+1} \rangle = \langle u_{r+1}, \lambda e_{r+1} \rangle - \lambda \sum_{k=1}^r \langle e_{r+1}, u_k \rangle \langle u_{r+1}, u_k \rangle$$

Or, u_{r+1} est orthogonal à u_k pour tout $k \leq r$. Donc

$$1 = \lambda \langle u_{r+1}, e_{r+1} \rangle,$$

par suite, $\lambda > 0$. Ainsi, on a construit u_{r+1} et il est unique.

Ceci montre l'existence et l'unicité de la famille $\{u_1, \dots, u_n\}$. □

Résumé de la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

De la preuve ci-dessus, on déduit les étapes suivantes, pour orthonormaliser une base quelconque de E . Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Construisons son orthonormalisée de Gram-Schmidt $\{u_1, \dots, u_n\}$.

Etape 1. Posons $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$

Etape 2. Posons

$$u'_2 = e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1, \quad u_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|}$$

Supposons qu'on a construit $\{u_1, \dots, u_r\}$.

Etape $r+1$. Posons

$$u'_{r+1} = e_{r+1} - \sum_{k=1}^r \langle e_{r+1}, u_k \rangle u_k, \quad u_{r+1} = \frac{u'_{r+1}}{\|u'_{r+1}\|}$$

3.3 Adjoint d'un endomorphisme

Désormais, nous désignerons par $\text{GL}(E)$ le groupe formé des automorphismes de l'espace vectoriel E . Comme E est de dimension finie n , pour tout choix de base de E , nous obtenons un isomorphisme (de groupes) entre $\text{GL}(E)$ et le groupe des matrices inversibles d'ordre n , qu'on notera par $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de E .

Théorème 3.3.1. *Soit $T : E \rightarrow E$ un endomorphisme. Alors il existe un unique endomorphisme $T^* : E \rightarrow E$ qui vérifie*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \quad \forall x, y \in E$$

Preuve. Soit $x \in E$. Alors on a

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \langle T(\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i), y \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle Te_i, y \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, \langle Te_i, y \rangle e_i \rangle \\ &= \langle x, \sum_{i=1}^n \langle Te_i, y \rangle e_i \rangle \end{aligned}$$

Posons $T^*y = \sum_{i=1}^n \langle Te_i, y \rangle e_i$, alors de la bilinéarité du produit scalaire on déduit que $T^* \in \mathcal{L}(E)$. De plus, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

Pour l'unicité, supposons qu'il existe $S \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$ pour tous $x, y \in E$. Alors $\langle x, Sy \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ pour tous $x, y \in E$. Fixons

$y \in E$. Alors, $\langle x, (S - T)y \rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Comme le produit scalaire est une forme bilinéaire non dégénérée, on déduit que $Sy = Ty$. $\square$

Vocabulaire. Avec les notations du théorème ci-dessus, l'endomorphisme T^* est appelé adjoint de T .

Exemples 3.3.2. 1) L'adjoint de l'endomorphisme identité $\text{id} : E \rightarrow E$ est lui même.

2) Soient $u, v \in E$. Désignons par $T_{u,v}$ l'application définie par :

$$T_{u,v} : E \rightarrow E, \quad x \mapsto \langle x, u \rangle v$$

Alors $T_{u,v}$ est linéaire. En effet, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tous $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} T_{u,v}(\alpha x + y) &= \langle \alpha x + y, u \rangle v \\ &= (\alpha \langle x, u \rangle + \langle y, u \rangle) v \\ &= \alpha \langle x, u \rangle v + \langle y, u \rangle v \\ &= \alpha T_{u,v}(x) + T_{u,v}(y) \end{aligned}$$

Dans la preuve du théorème 4.5.1, nous avons donné une méthode générale qui permet de trouver l'adjoint d'un endomorphisme quelconque de E , en utilisant une base orthonormale. Retrouvons l'adjoint de $T_{u,v}$, directement. Soient $x, y \in E$. Alors

$$\begin{aligned} \langle T_{u,v}x, y \rangle &= \langle \langle x, u \rangle v, y \rangle \\ &= \langle x, u \rangle \langle v, y \rangle \\ &= \langle x, \langle v, y \rangle u \rangle \end{aligned}$$

Ainsi, $T_{u,v}^*(y) = \langle y, v \rangle u = T_{v,u}(y)$.

Théorème 3.3.3. La matrice de l'adjoint T^* de T dans la base orthonormale B vérifie

$$M(T^*, B) = M(T, B)^t.$$

Preuve. Comme B est une base orthonormale, alors

$$(3.4) \quad T^*e_j = \sum_{i=1}^n \langle T^*e_j, e_i \rangle e_i \quad \text{et} \quad Te_j = \sum_{i=1}^n \langle Te_j, e_i \rangle e_i$$

Utilisons maintenant la définition de l'adjoint pour la première relation dans (4.4), on déduit

$$T^*e_j = \sum_{i=1}^n \langle e_j, Te_i \rangle e_i$$

Donc la j ème colonne de $M(T^*, B)$ est

$$\begin{pmatrix} \langle Te_1, e_j \rangle \\ \vdots \\ \langle Te_n, e_j \rangle \end{pmatrix}$$

D'autre part, de la seconde relation de (4.4), on déduit que La j ème colonne de $M(T, B)$ est

$$\begin{pmatrix} \langle Te_j, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Te_j, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

Par suite, la i ème ligne de $M(T, B)$ est

$$(\langle Te_1, e_i \rangle, \dots, \langle Te_n, e_i \rangle).$$

Ainsi, $M(T^*, B) = M(T, B)^t$. □

Dans la proposition qui suit, nous donnons les propriétés basiques vérifiées par l'adjoint d'un endomorphisme. Nous utiliserons la notation $(T^*)^* = T^{**}$ pour tout $T \in \mathcal{L}(E)$.

Proposition 3.3.4. *Soient $T, S \in \mathcal{L}(E)$. Alors on a les assertions suivantes :*

- (i) *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*$.*
- (ii) *Pour tous $x, y \in E$, $\langle T^*x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$, et $T^{**} = T$.*
- (iii) *$\text{Ker} T^* = (\text{Im } T)^\perp$ et $\text{Im } T^* = (\text{Ker } T)^\perp$.*
- (iv) *$(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$*
- (v) *$T \in \text{GL}(E) \Leftrightarrow T^* \in \text{GL}(E)$ et $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*
- (vi) *Le polynôme caractéristique de T vérifie $P_T(X) = P_{T^*}(X)$.*
- (vii) *T est diagonalisable si et seulement si T^* l'est.*

Preuve. (i) : Soient α et β deux éléments fixés de $\mathbb{R}$. Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned}\langle (\alpha T + \beta S)x, y \rangle &= \alpha \langle Tx, y \rangle + \beta \langle Sx, y \rangle \\ &= \alpha \langle x, T^*y \rangle + \beta \langle x, S^*y \rangle \\ &= \langle x, (\alpha T^* + \beta S^*)y \rangle\end{aligned}$$

D'où, l'assertion (i) est vérifiée.

(ii) : On utilise la symétrie du produit scalaire. Pour tous $x, y \in E$, on a $\langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle$. Donc d'après l'unicité de l'adjoint, on a $T^{**} = T$.

(iii) Soit $x \in E$. Alors en utilisant le fait que le produit scalaire est une forme bilinéaire non dégénérée et que $T^{**} = T$ on déduit les propositions suivantes :

$$\begin{aligned}x \in \text{Ker} T^* &\Leftrightarrow T^*x = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle T^*x, y \rangle = 0, \forall y \in E \\ &\Leftrightarrow \langle x, T^{**}y \rangle = \langle x, Ty \rangle = 0, \forall y \in E \\ &\Leftrightarrow \langle x, z \rangle = 0, \forall z \in \text{Im } T\end{aligned}$$

D'où l'égalité $\text{Ker} T^* = (\text{Im } T)^\perp$. Maintenant appliquons cette relation à T^* , on obtient :

$$\begin{aligned}\text{Im } T^* &= (\text{Im } T^*)^{\perp\perp} \\ &= ((\text{Im } T^*)^\perp)^\perp \\ &= (\text{Ker } T^{**})^\perp = (\text{Ker } T)^\perp.\end{aligned}$$

(iv) : Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle (T \circ S)x, y \rangle = \langle Sx, T^*y \rangle = \langle x, S^* \circ T^*y \rangle.$$

Donc, d'après l'unicité de l'adjoint, on déduit que $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

(v) : Appliquons le théorème 4.5.4, alors dans la base orthonormale B , on a $M(T^*, B) = M(T, B)^t$. Or, T est inversible si et seulement si $\det M(T, B) \neq 0$, d'autre part $\det M(T, B) = \det(M(T, B)^t)$, donc T est inversible si et seulement si T^* est inversible. Supposons maintenant que T est inversible, alors

$$M(T^*, B)^{-1} = (M(T, B)^t)^{-1} = (M(T, B)^{-1})^t = M(T^{-1}, B)^t$$

D'où,

$$M((T^*)^{-1}, B) = (M(T^*, B))^{-1} = M(T^{-1}, B)^t = M((T^{-1})^*, B)$$

Ainsi, on a l'égalité $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

(vi) On sait que si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors le polynôme caractéristique de A vérifie $P_A(X) = P_{A^t}(x)$. Donc en appliquant le Théorème 4.5.4, on déduit que $P_T(X) = P_{T^*}(X)$.

(vii) Cette propriété découle aussi du théorème 4.5.4. $\square$

3.4 Endomorphismes spéciaux

Dans tout ce paragraphe, on suppose que $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormale quelconque de E .

3.4.1 Endomorphismes orthogonaux et groupe orthogonal

Définition 3.4.1. Soit T un automorphisme de E . On dit que T est orthogonal si $T^* = T^{-1}$. L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E est noté $O(E)$, et est appelé groupe orthogonal de E .

Exemples 3.4.2. (1) Il est clair que $\text{id} \in O(E)$.

(2) Posons $E = \mathbb{R}^2$ et considérons l'endomorphisme de E qui correspond à la rotation du plan d'angle θ et de centre O . Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Alors $A^t A = I_2$. Donc A correspond à un endomorphisme orthogonal.

Voir TD, Série 3 pour un rappel et plus de détails sur les rotations.

Remarques 3.4.3. 1) $O(E)$ est un groupe. En effet, il suffit de vérifier que $O(E)$ est un sous groupe de $\text{GL}(E)$: $\text{id} \in O(E)$; si $T, S \in O(E)$, $T^{-1} = T^* \in O(E)$ puisque $T^{**} = T$. De plus, $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1} = S^*T^*$, donc $TS \in O(E)$.

2) Soit $T \in O(E)$. D'après Théorème 4.5.4, T et T^* ont le même déterminant. Comme $TT^* = \text{id}$, on déduit

$$\det(TT^*) = 1 \Rightarrow \det T^2 = 1 \Rightarrow \det T \in \{-1, 1\}.$$

Vocabulaire. L'ensemble

$$SO(E) = \{T \in O(E) : \det T = 1\}$$

est appelé groupe spécial orthogonal de E .

La proposition suivante découle directement du théorème 4.5.4.

Proposition 3.4.4. *Soit T un endomorphisme de E . Posons $M = M(T, B)$. Alors T est un endomorphisme orthogonal si et seulement si $M^t M = I_n$.*

Théorème 3.4.5. *Soit T un endomorphisme de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) $T \in O(E)$.
- (ii) Pour tous $x, y \in E$, $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$.
- (iii) Pour tout $x \in E$, $\|Tx\| = \|x\|$.
- (iv) $TB = \{Te_1, \dots, Te_n\}$ est une base orthonormale de E .
- (v) Pour toute base B' de E , on a

$$[M(T, B')]^t M(\langle \cdot, \cdot \rangle, B') M(T, B') = M(\langle \cdot, \cdot \rangle, B').$$

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons que (i) est vérifiée, donc T est inversible et $T^* = T^{-1}$. Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, T^* Ty \rangle = \langle x, y \rangle.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Supposons que l'assertion (ii) est vérifiée. Alors pour tout $x \in E$,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons (iii) et montrons (ii). Soient $x, y \in E$. Comme $\|\cdot\|^2$ est la forme quadratique associée au produit scalaire, on a

$$\langle Tx, Ty \rangle = \frac{1}{2}(\|Tx + Ty\|^2 - \|Tx\|^2 - \|Ty\|^2)$$

Par suite, en appliquant le fait que $Tx + Ty = T(x + y)$ et (iii), on déduit que

$$\langle Tx, Ty \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \langle x, y \rangle.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iv) : Supposons que (ii) est vérifiée. On a

$$\langle Te_i, Te_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

donc TB est une base orthonormale.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Supposons (iv) vérifiée. Fixons $x \in E$, comme B et TB sont des bases orthonormales, alors

$$x = \sum_j \langle x, e_j \rangle e_j, \quad Tx = \sum_j \langle Tx, Te_j \rangle Te_j$$

comme T est linéaire, on déduit de la première relation que

$$Tx = \sum_j \langle x, e_j \rangle Te_j$$

Par suite,

$$\langle x, e_j \rangle = \langle Tx, Te_j \rangle = \langle x, T^*Te_j \rangle, \quad \forall j$$

Ainsi, pour tout $y \in E$, on a

$$\langle x, y \rangle = \langle x, T^*Ty \rangle$$

D'où, $T^*T = \text{id}$.

(i) $\Rightarrow$ (v) : Posons $P = P_{BB'}$. Alors d'après les formules de changement de base pour les formes bilinéaires, on a

$$M(\langle \cdot, \cdot \rangle, B') = P^t M(\langle \cdot, \cdot \rangle, B) P$$

Or, B est une base orthonormale, donc $M(\langle \cdot, \cdot \rangle, B) = I_n$, par suite $M(\langle \cdot, \cdot \rangle, B') = P^t P$. D'autre part, on a $M(T, B') = P^{-1} M(T, B) P$. Donc $M(T, B')^t = P^t M(T, B)^t (P^{-1})^t$. Par suite,

$$M(T, B')^t M(\langle \cdot, \cdot \rangle, B') = P^t M(T, B)^t (P^{-1})^t P^t P = P^t M(T, B)^t P$$

Enfin, comme $M(T, B)^{-1} = M(T, B)^t$, on obtient

$$\begin{aligned} M(T, B')^t M(\langle \cdot, \cdot \rangle, B') M(T, B') &= P^t M(T, B)^t P P^{-1} M(T, B) P \\ &= P^t P \\ &= M(\langle \cdot, \cdot \rangle, B') \end{aligned}$$

(v) $\Rightarrow$ (i) : Supposons que $B' = B$. Comme $M(\langle \cdot, \cdot \rangle) = I_n$, on déduit que $M(T, B)^t M(T, B) = I_n$. D'où $T^*T = I_n$. $\square$

Exemple 3.4.6. Soit u un élément fixé de E de norme $\|u\| = 1$. Considérons l'endomorphisme de E défini par

$$Tv = v - 2\langle u, v \rangle u$$

Comme $\|u\| = 1$, on peut le compléter en une base orthonormale de E . Soit donc $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de E avec $e_1 = u$. Pour tout $j \geq 2$, on a $Te_j = e_j$ et $Te_1 = -e_1$. Ainsi, TB est une base orthonormale de E . D'après Théorème 3.4.5, $T \in O(E)$.

En considérant les matrices correspondantes aux endomorphismes orthogonaux, nous avons les définitions suivantes

Définition 3.4.7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est orthogonale si $M^t M = I_n$. L'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ est noté $O_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des éléments de $O_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 est noté $SO_n(\mathbb{R})$.

De la proposition 3.4.4, on déduit facilement le résultat suivant

Proposition 3.4.8. L'ensemble des matrices orthogonales $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$. De plus, les groupes $O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont isomorphes via l'application

$$O(E) \rightarrow O_n(\mathbb{R}), \quad T \mapsto M(T, B)$$

3.4.2 Endomorphismes symétriques et groupe symétrique

Définition 3.4.9. Soit T un endomorphisme de E . On dit que T est symétrique s'il est égal à son adjoint, c'est à dire

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle, \quad \forall u, v \in E$$

L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est noté $S(E)$.

Exemples 3.4.10. (1) Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, alors $T + T^*$ est symétrique. En effet,

$$(T + T^*)^* = T^* + T^{**} = T^* + T.$$

(2) Soit $u \in E$ avec $u \neq 0$. Alors l'endomorphisme T de E défini par $T(v) = \langle u, v \rangle u$ est symétrique. En effet, avec la notation de l'exemple 3.3.2-(2), $T = T_{u,u}$ et $T^* = T$.

De la proposition 4.5.4, on déduit immédiatement le résultat suivant

Proposition 3.4.11. *Soit T un endomorphisme de E . Alors T est symétrique si et seulement si $M(T, B)$ est symétrique.*

Proposition 3.4.12. *$S(E)$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble des endomorphismes de E , $\mathcal{L}(E)$. De plus, $S(E)$ est isomorphe à $S_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n sur $\mathbb{R}$ via*

$$\Gamma : S(E) \rightarrow S_n(\mathbb{R}), \quad T \mapsto M(T, B)$$

Preuve. Il est clair que l'endomorphisme trivial $0 \in S(E)$. Soient T_1 et T_2 deux éléments de $S(E)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \alpha T_1^* + \beta T_2^* = \alpha T_1 + \beta T_2$$

Donc $\alpha T_1 + \beta T_2 \in S(E)$. D'où, $S(E)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. D'après Proposition 4.6.12, Γ est une application bijective. La linéarité de Γ découle des propriétés des matrices. $\square$

Théorème 3.4.13. *Soit T un endomorphisme symétrique de E . Alors le polynôme caractéristique de T , $P_T(X)$ est scindé (sur $\mathbb{R}$).*

Preuve. On sait que $P_T(X)$ est un polynôme scindé sur $\mathbb{C}$. Montrons donc que toute valeur propre de T est réelle. Posons $M = M(T, B)$, alors $M^t = M$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P_T(\lambda) = 0$. Alors λ est une valeur propre de la matrice M considérée comme élément de $M_n(\mathbb{C})$. Soit donc $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$. Nous utiliserons dans la suite la notation $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})_{ij}$ pour toute matrice $A = (a_{ij})_{ij}$ de $M_k(\mathbb{C})$, où $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\overline{MX} = \overline{\lambda X} \Rightarrow M\bar{X} = \bar{\lambda} \bar{X}$$

Par suite, en multipliant à gauche par le vecteur ligne X^t , on déduit

$$\begin{aligned} X^t M \bar{X} &= \bar{\lambda} X^t \bar{X} \Rightarrow \\ (MX)^t \bar{X} &= \bar{\lambda} X^t \bar{X} \Rightarrow \\ \lambda X^t \bar{X} &= \bar{\lambda} X^t \bar{X} \end{aligned}$$

Posons $X^t = (x_1, \dots, x_n)$, où $x_j \in \mathbb{C}$. Alors

$$X^t X = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$$

Donc $\lambda = \bar{\lambda}$. $\square$

Proposition 3.4.14. *Soit $T \in S(E)$. Alors*

(i) *Les sous espaces propres de T sont orthogonaux deux à deux.*

(ii) *Si H est un sous espace vectoriel de E invariant par T (c'est à dire $TH \subset H$) alors $TH^\perp \subset H^\perp$.*

Preuve. (i) : Supposons que λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de T et désignons par E_{λ_j} le sous espace propre associé à λ_j . Choisissons $u_j \in E_{\lambda_j}$ avec $u_j \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}\langle u_1, Tu_2 \rangle &= \langle Tu_1, u_2 \rangle \Rightarrow \\ \lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle &= \lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle\end{aligned}$$

Or $\lambda_1 \neq \lambda_2$, donc on doit avoir $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$. Ceci montre (i).

(ii) Soit H un sous espace vectoriel de E tel que $TH \subset H$. Soit $u \in H^\perp$. Alors pour tout $v \in H$, on a

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle = 0$$

Donc $Tu \in H^\perp$. □

Théorème 3.4.15. *Soit T un endomorphisme symétrique de E . Alors T est diagonalisable. De plus, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de E .*

Preuve. Faisons la preuve par récurrence sur la dimension n de E . Si $n = 1$, il est clair que T est diagonalisable. Si $u \in E$ et $u \neq 0$, alors $\{\|u\|^{-1}u\}$ forme une base orthonormale de E .

Hypothèse de récurrence : Supposons que le théorème est vrai pour tout espace euclidien de dimension $k \leq n - 1$.

Pour E : Comme $P_T(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ qui soit une valeur propre de T . Soit e_1 un vecteur propre de E pour λ . Quitte à multiplier e_1 par $\|e_1\|^{-1}$, on peut supposer que e_1 est de norme 1. D'autre part, puisque $\text{Vec}\{e_1\}$ est invariant par T , en utilisant Proposition 4.6.14, on déduit que $(\text{Vec}\{e_1\})^\perp$ est aussi invariant par T . Appliquons l'hypothèse de récurrence à $H = (\text{Vec}\{e_1\})^\perp$ et à $T|_H$. Comme $E = \text{Vec}\{e_1\} \oplus H$, on déduit le résultat souhaité pour E et on peut conclure. □

Donnons la version matricielle du théorème ci-dessus.

Corollaire 3.4.16. *Soit A une matrice carrée réelle symétrique d'ordre n . Alors il existe une matrice orthogonale P de $M_n(\mathbb{R})$ tel que la matrice $P^t A P$ est diagonale.*

Preuve. Considérons l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ et sa base canonique B . Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'endomorphisme défini par $M(T, B) = A$. Alors d'après le théorème ci-dessus, il existe une base orthonormale B' de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de T . Autrement dit, $M(T, B')$ est diagonale. Posons $P = P_{BB'}$. Comme la base canonique B est orthonormale pour le produit scalaire usuel, d'après Théorème 3.4.5, P est une matrice orthogonale. En particulier, $P^{-1} = P^t$. Ainsi,

$$M(T, B') = P^{-1} M(T, B) P = P^t A P$$

□

Nous terminons ce chapitre en donnant la définition de deux concepts géométriques.

3.5 Deux notions géométriques

Les propriétés du produit scalaire nous permettent de définir deux concepts géométriques dans un espace euclidien E , une distance et un angle entre deux vecteurs.

Soient $x, y \in E$. Posons

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Alors d vérifie toutes les propriétés connues de la distance. Plus exactement, si $z \in E$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad d(x, y) = d(y, x), \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwartz, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

Le nombre θ est appelé écart angulaire ou angle non orienté entre x et y .

Chapitre 4

Espaces Hermitiens

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

4.1 Formes sesquilinéaires et formes hermitiennes

Exemple 4.1.1. Si $h : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est la forme bilinéaire définie par

$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

alors la forme quadratique associée q admet des éléments isotropes et nous n'avons pas $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{C}^2$. Remarquons que nous pouvons avoir des propriétés analogues à celles du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$ si on n'exige plus la bilinéarité, et on considère l'application suivante

$$f : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$$

Alors pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$f((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = |x_1|^2 + |x_2|^2.$$

Donc

$$f((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = 0_{\mathbb{C}^2}$$

De plus, $f((x_1, x_2), (x_1, x_2)) > 0$ pour tout $(x_1, x_2) \neq 0$. Plus généralement, l'application $g : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$g((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

vérifie les mêmes propriétés.

Le but de ce chapitre est d'étudier les applications $l : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient des propriétés analogues aux applications f et g définies ci-dessus. En particulier, l sera linéaire d'un côté, antilinéaire de l'autre.

Définition 4.1.2. Soit $f : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ une application. On dit que f est une forme sesquilinéaire si pour tous $x, y, z \in E$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a

$$(i) \quad f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z),$$

$$(ii) \quad f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z),$$

$$(iii) \quad f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y),$$

$$(iv) \quad f(x, \alpha y) = \overline{\alpha} f(x, y).$$

On dit que f est une forme hermitienne si c'est une forme sesquilinéaire et si de plus, elle vérifie la propriété

$$(v) \quad f(x, y) = \overline{f(y, x)} \text{ pour tous } x, y \in E.$$

Remarque 4.1.3. Supposons que $f : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est une application qui vérifie la propriété (v) de la définition ci-dessus, alors pour les autres propriétés, on a (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).

Exemple 4.1.4. Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et posons $E = \mathbb{C}^2$. Alors l'application

$$f : E \times E \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto a_1 x_1 \overline{y_1} + a_2 x_2 \overline{y_2}$$

est une forme hermitienne. En effet, vérifions d'abord (v) de la définition ci-dessus. Comme les $\overline{a_j} = a_j$, on a

$$f(y, x) = a_1 y_1 \overline{x_1} + a_2 y_2 \overline{x_2} = \overline{f(x, y)}$$

Donc il suffit de vérifier (i) et (iii). On a

$$\begin{aligned} f(x, y + z) &= a_1 x_1 \overline{(y_1 + z_1)} + a_2 x_2 \overline{(y_2 + z_2)} \\ &= a_1 x_1 \overline{y_1} + a_2 x_2 \overline{y_2} + a_1 x_1 \overline{z_1} + a_2 x_2 \overline{z_2} \\ &= f(x, y) + f(x, z) \end{aligned}$$

donc (i) est vérifiée. D'autre part,

$$f(\alpha x, y) = \alpha a_1 x_1 \overline{y_1} + \alpha a_2 x_2 \overline{y_2} = \alpha f(x, y).$$

Donc (iii) est aussi vérifiée.

Maintenant, adaptons des exemples classiques que l'on connaît sur les formes bilinéaires symétriques au cas sesquilinéaire. La vérification est un simple exercice.

Exemples 4.1.5. (1) : Soient $h_1, h_2 \in E^*$. Alors l'application

$$h : E \times E \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto h_1(x) \overline{h_2(y)}$$

est sesquilinéaire. D'autre part, l'application

$$h' : E \times E \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto h_1(x) \overline{h_1(y)}$$

est une forme hermitienne.

(2) : L'application $f : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (A, B) \mapsto \text{tr}(A) \text{tr}(\overline{B})$ est une forme hermitienne. Cette application est un cas particulier de l'exemple (1).

(3) : L'application $g : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (A, B) \mapsto \text{tr}(A\overline{B})$ est une forme hermitienne.

4.2 Matrices et orthogonalité pour les formes hermitiennes

Désignons par $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble des formes hermitiennes sur E . Dans la suite de ce paragraphe, soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et soit $f \in \mathcal{H}(E)$.

4.2.1 Matrices.

Rappelons que si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$, alors $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{1 \leq i, j \leq n}$. Notons $A^* = \overline{A}^t$.

Définition 4.2.1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que A est une matrice hermitienne si $A^* = A$. Désignons par $H_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées hermitiennes d'ordre n .

Remarque 4.2.2. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$. $A \in H_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $A^t = \overline{A}$.

Définition 4.2.3. La matrice de f dans la base B , notée par $M(f, B)$ est l'élément de $M_n(\mathbb{C})$ défini par

$$M(f, B) = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

Remarque 4.2.4. Puisque $f(e_i, e_j) = \overline{f(e_j, e_i)}$, alors $M(f, B)^* = M(f, B)$.

Théorème 4.2.5. $\mathcal{H}(E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De plus, l'application $\psi : \mathcal{H}(E) \rightarrow H_n(\mathbb{C})$ définie par $\psi(f) = M(f, B)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve. Montrons que $\mathcal{H}(E)$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $\mathcal{F}(E \times E, \mathbb{C})$ des applications définies de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(E)$. Alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et pour tous $x, y, z \in E$,

$$\begin{aligned} (\alpha f_1 + \beta f_2)(x + y, z) &= \alpha f_1(x + y, z) + \beta f_2(x + y, z) \\ &= \alpha f_1(x, z) + \alpha f_1(y, z) + \beta f_2(x, z) + \beta f_2(y, z) \\ &= (\alpha f_1 + \beta f_2)(x, z) + (\alpha f_1 + \beta f_2)(y, z) \end{aligned}$$

Puisque $\alpha = \bar{\alpha}$ et $\beta = \bar{\beta}$, on a

$$\begin{aligned} (\alpha f_1 + \beta f_2)(x, y) &= \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) \\ &= \overline{\alpha f_1(y, x)} + \overline{\beta f_2(y, x)} \\ &= \overline{(\alpha f_1 + \beta f_2)(y, x)} \end{aligned}$$

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{aligned} (\alpha f_1 + \beta f_2)(\lambda x, y) &= \alpha f_1(\lambda x, y) + \beta f_2(\lambda x, y) \\ &= \lambda \alpha f_1(x, y) + \lambda \beta f_2(x, y) \\ &= \lambda (\alpha f_1 + \beta f_2)(x, y) \end{aligned}$$

Donc d'après Remarque 4.1.3, $(\alpha f_1 + \beta f_2) \in \mathcal{H}(E)$. L'application 0 est un élément trivial de $\mathcal{H}(E)$. Donc $\mathcal{H}(E)$ est bien un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(E \times E, \mathbb{C})$.

Pour la seconde assertion, soit $f \in \mathcal{H}(E)$. Comme f est hermitienne, f est déterminée de manière unique par les valeurs $f(e_i, e_j)$ où $1 \leq i, j \leq n$. Donc l'application ψ est bijective. On vérifie facilement la linéarité de ψ . $\square$

Exercice. Pourquoi $\mathcal{H}(E)$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$?

Lemme 4.2.6. Soient $x = \sum_i x_i e_i$ et $y = \sum_i y_i e_i$ deux éléments of E . Désignons par X et Y les matrices colonnes associées respectivement à x et y dans la base B . Alors

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i \bar{y}_j f(e_i, e_j) = X^t M(f, B) \bar{Y} = Y^* \overline{M(f, B)} X$$

Preuve. Avec nos notations usuelles, on a

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Comme f est sesquilinéaire, on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_i x_i f(e_i, \sum_j y_j e_j) \\ &= \sum_i \sum_j x_i \overline{y_j} f(e_i, e_j) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$M(f, B)\overline{Y} = \begin{pmatrix} \sum_j f(e_1, e_j)\overline{y_j} \\ \vdots \\ \sum_j f(e_n, e_j)\overline{y_j} \end{pmatrix}$$

En effectuant le produit $X^t M(f, B)\overline{Y}$, on trouve la formule $f(x, y) = X^t M(f, B)\overline{Y}$. Enfin, comme $f(x, y) \in \mathbb{C}$, on a $f(x, y) = f(x, y)^t$ et par suite $f(x, y) = Y^* \overline{M(f, B)} X$. $\square$

Théorème 4.2.7. Soit B' une autre base de E et posons $P = P_{BB'}$ (la matrice de passage de B à B'). Alors

$$M(f, B') = P^t M(f, B) \overline{P}$$

Preuve. Soient x, y deux éléments de E . Désignons par X et Y les vecteurs colonnes qui représentent respectivement x et y dans la base B . De plus, soient X' et Y' les vecteurs colonnes qui représentent respectivement x et y dans la base B' . Alors $X = PX'$ et $Y = PY'$. Donc

$$f(x, y) = X^t M(f, B) \overline{Y} = X'^t P^t M(f, B) \overline{PY'}$$

D'autre part, si on applique directement le lemme 4.2.6 à f et à la base B' , on obtient

$$f(x, y) = X'^t M(f, B') \overline{Y'}$$

Donc les deux matrices $M(f, B')$ et $P^t M(f, B) \overline{P}$ déterminent f . D'après le théorème 4.2.5, ces deux matrices doivent être égales. $\square$

4.2.2 Orthogonalité

Définition 4.2.8. Soient $A, B \subset E$.

(1) On dit que A et B sont orthogonales et on note $A \perp B$ si $f(x, y) = 0$ pour tous $x \in A, y \in B$.

(2) L'orthogonal de A est l'ensemble noté $A^\perp$, défini par

$$A^\perp = \{y \in E : f(x, y) = 0 \text{ pour tout } x \in A\}$$

(3) Soit $B_1 = \{x_1, \dots, x_r\} \subset E$. On dit que B_1 est orthogonale si $\{x_i\} \perp \{x_j\}$ pour tous $i \neq j$. On dit que B_1 est orthonormale si $f(x_i, x_j) = \delta_{ij}$ pour tous i, j .

Exemple 4.2.9. $E = \mathbb{C}^2$. Alors pour le produit scalaire usuel

$$\text{Vec}\{(1, i)\}^\perp = \text{Vec}\{(i, 1)\}$$

En effet, soient $x, y \in \mathbb{C}$.

$$\langle (1, i), (x, y) \rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{x} + i\bar{y} = 0 \Leftrightarrow x - iy = 0$$

Lemme 4.2.10. Soit $B = \{x_1, \dots, x_r\}$ une famille orthogonale telle que $f(x_i, x_i) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$, alors la famille B est libre.

Preuve. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_i \alpha_i x_i = 0$. Alors pour tout j , $f(\sum_i \alpha_i x_i, x_j) = \alpha_j f(x_j, x_j) = 0$. D'après notre hypothèse, on déduit que $\alpha_j = 0$. $\square$

Comme pour les formes bilinéaires, on vérifie facilement les propriétés suivantes

Proposition 4.2.11. (1) Soient A et B deux parties de E avec $A \subset B$. Alors $B^\perp \subset A^\perp$.

(2) Soit $A \subset E$. Alors $A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E , $A^\perp = (\text{Vec}A)^\perp$ et $A \subset A^{\perp\perp}$.

4.3 Notions de base sur les espaces hermitiens

Définition 4.3.1. Soit f une forme hermitienne sur E . On dit que f est **définie positive** sur E si $f(x, x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. Dans ce cas, f est appelée produit scalaire sur E , on note $f(x, y) := \langle x, y \rangle$ pour tous $x, y \in E$ et on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (ou juste E s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté) est un espace hermitien.

Exemples 4.3.2. (1) Le produit scalaire classique sur $\mathbb{C}^n$ est

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}.$$

(2) Posons $E = \mathbb{C}_n[X]$. Par analogie avec le cas euclidien ou avec le produit scalaire usuel de $\mathbb{C}^n$, soit $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f\left(\sum_{i=0}^n a_i X^i, \sum_{i=0}^n b_i X^i\right) = \sum_{i=0}^n a_i \overline{b_i}.$$

Alors f est une forme hermitienne définie positive. Cette structure est appelée structure hermitienne canonique sur E .

Théorème 4.3.3. (Inégalité de Cauchy Schwartz), Soit E un espace hermitien. Alors pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve. Fixons $x, y \in E$. En écrivant $\langle x, y \rangle$ sous forme polaire $e^{i\theta} |\langle x, y \rangle|$, on remarque que quitte à multiplier x par un nombre complexe de module 1 convenable, on peut supposer que $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$. Considérons $P(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme hermitienne et $t \in \mathbb{R}$, on déduit l'égalité

$$P(t) = t^2 \langle y, y \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle$$

En particulier, $P(t)$ peut être vu comme un polynôme en t qui est toujours de signe positif. Donc son discriminant est négatif, c'est à dire

$$\Delta' = \langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0.$$

D'où l'inégalité. Supposons maintenant que $\Delta' = 0$. Alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\langle x + ty, x + ty \rangle = 0$. Autrement dit, $x + ty = 0$, c'est à dire x et y doivent être liés. La réciproque est évidente. $\square$

Lemme 4.3.4. *Supposons que E est un espace hermitien. Pour tout $x \in E$, posons $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, alors $\|\cdot\|$ est une norme sur E . Elle est dite norme hermitienne associée au produit scalaire de E .*

Démonstration. Vous pouvez adapter facilement la preuve du cas des espaces euclidiens. $\square$

Lemme 4.3.5. *On a les identités suivantes, appelées identités de polarisation :*

(1) *Soient x, y deux éléments de l'espace hermitien E . Alors*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

(2) *Soit F un espace euclidien et soient $x, y \in E$. Alors*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Preuve. La vérification est directe. Voir TD. $\square$

Remarque et vocabulaire : Si $u \in E$ et $\|u\| = 1$, on dit que u est un vecteur unitaire de E . Soit $u \in E$ tel que $u \neq 0$. Si u n'est pas unitaire, alors $\frac{u}{\|u\|}$ est unitaire. Lorsqu'on considère $\frac{u}{\|u\|}$ au lieu de u , on dit qu'on a normalisé u .

Si H est sous espace vectoriel de E , on le munit automatiquement du produit scalaire induit par le produit scalaire de E .

Théorème 4.3.6. *Supposons que E est un espace hermitien. Alors on a les assertions suivantes :*

(1) *E admet une base orthonormale.*

(2) *Si H est un sous espace vectoriel de E , alors $H \oplus H^\perp = E$ et $H^{\perp\perp} = H$.*

(3) *Toute famille orthonormale de E est libre et peut être complétée en une base orthonormale de E .*

Preuve. (1) : Faisons la preuve par récurrence sur la dimension n de E . Si $n = 1$, tout vecteur unitaire u de E forme une base orthonormale. Supposons que tout espace hermitien de dimension $k \leq n - 1$ admet une base orthonormale dans E . Soit e_1 un vecteur unitaire de E . Considérons l'application

$$g : E \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \langle x, e_1 \rangle$$

Alors il est clair que g est linéaire. Donc $g \in E^*$. Comme $\|e_1\| \neq 0$, $e_1 \notin \text{Kerg}$. Donc $g \neq 0$. Par suite, $\dim \text{Kerg} = n - 1$ et c'est un hyperplan de E (d'après Chapitre 1). Or, $\text{Kerg} = (\text{Vec}\{e_1\})^\perp$. Donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à l'espace hermitien Kerg , on déduit que Kerg admet une base orthonormale B' . D'après Lemme 4.2.10, $B = B' \cup \{e_1\}$ est une famille libre de E . Comme elle est de cardinal n , c'est une base de E . Elle est clairement orthonormale. Et on peut conclure.

(ii) Soit $x \in H \cap H^\perp$. Alors $\|x\| = 0$ et par suite $x = 0$. Donc $H \cap H^\perp = \{0\}$. Maintenant soit $\{u_1, \dots, u_r\}$ une base orthonormale de H . Soit x un élément fixé de E . Posons $x' = x - \sum_{i=1}^r \langle u_i, x \rangle u_i$. Alors

$$\langle x', u_j \rangle = \langle x, u_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^r \langle u_i, x \rangle u_i, u_j \right\rangle = 0$$

Donc $x' \in H^\perp$. Or, $x = \sum_{i=1}^r \langle u_i, x \rangle u_i + x'$, donc $x \in H + H^\perp$. Ainsi, $E = H \oplus H^\perp$ et la première assertion de (ii) est établie. Pour la seconde assertion, on a d'après ce qu'on vient de montrer

$$H^\perp \oplus H^{\perp\perp} = E = H \oplus H^\perp$$

Donc en particulier, on déduit que $\dim H = \dim H^{\perp\perp}$. Or, on sait que $H \subset H^{\perp\perp}$. D'où l'égalité souhaitée.

(iii) La preuve est analogue au cas des espaces euclidiens, Théorème 1.8. $\square$

4.4 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Dans toute la suite du chapitre, on suppose que E est un espace hermitien. Soient $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de E et soit $x \in E$. Ecrivons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Alors, il est clair que $x_i = \langle x, e_i \rangle$. Donc

$$(4.1) \quad x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

Ainsi, si $x, y \in E$, on a

$$(4.2) \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$$

En particulier,

$$(4.3) \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$$

Théorème 4.4.1. *Procédé d'Orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Alors il existe une unique base orthonormale $\{u_1, \dots, u_n\}$ de E vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Pour tout i , $\text{Vec}\{u_1, \dots, u_i\} = \text{Vec}\{e_1, \dots, e_i\}$.*

(ii) *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\langle u_i, e_i \rangle > 0$.*

Résumé de preuve. Les détails sont donnés dans la preuve du théorème analogue dans le cas euclidien. Construisons $\{u_1, \dots, u_n\}$ par récurrence. Pour u_1 , il est clair que $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ est l'unique vecteur qui convient.

$$u_{r+1} = \lambda e_{r+1} + \sum_{k=1}^r \lambda_k u_k.$$

Soit $i \in \{1, \dots, r\}$ fixé. Alors

$$\langle u_{r+1}, u_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda \langle e_{r+1}, u_i \rangle + \sum_{k=1}^r \lambda_k \langle u_k, u_i \rangle = 0$$

Comme la famille $\{u_1, \dots, u_r\}$ est orthonormale, on obtient

$$\langle u_{r+1}, u_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = -\lambda \langle e_{r+1}, u_i \rangle$$

Ainsi,

$$u_{r+1} = \lambda(e_{r+1} - \sum_{k=1}^r \langle e_{r+1}, u_k \rangle u_k)$$

Posons $u'_{r+1} = e_{r+1} - \sum_{k=1}^r \langle e_{r+1}, u_k \rangle u_k$. Les deux conditions qui restent à satisfaire sont

$$\|\lambda u'_{r+1}\| = 1, \quad \langle u_{r+1}, e_{r+1} \rangle > 0$$

On déduit donc que $|\lambda| = \frac{1}{\|u'_{r+1}\|}$, et le signe de λ est déterminé par la propriété $\langle u_{r+1}, e_{r+1} \rangle > 0$. On a

$$1 = \langle u_{r+1}, u_{r+1} \rangle = \langle \lambda e_{r+1}, u_{r+1} \rangle - \lambda \sum_{k=1}^r \langle e_{r+1}, u_k \rangle \langle u_k, u_{r+1} \rangle$$

Or, u_{r+1} est orthogonal à u_k pour tout $k \leq r$. Donc

$$1 = \lambda \langle e_{r+1}, u_{r+1} \rangle,$$

par suite, $\lambda > 0$. Ainsi, on a construit u_{r+1} et il est unique.

Ceci montre l'existence et l'unicité de la famille $\{u_1, \dots, u_n\}$. $\square$

La procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est exactement la même que pour le cas réel. (Voir TD)

4.5 Adjoint d'un endomorphisme

Comme dans le cas euclidien, désignons par $\text{GL}(E)$ le groupe formé des automorphismes de l'espace vectoriel E et par $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ le groupe des matrices inversibles d'ordre n sur $\mathbb{C}$. Comme E est de dimension finie n , pour tout choix de base de E , nous obtenons un isomorphisme (de groupes) entre $\text{GL}(E)$ et $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormale de E .

Théorème 4.5.1. *Soit $T : E \rightarrow E$ un endomorphisme. Alors il existe un unique endomorphisme $T^* : E \rightarrow E$ qui vérifie*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \quad \forall x, y \in E$$

Preuve. Soit $x \in E$. Alors on a

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \langle T(\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i), y \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle Te_i, y \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, \overline{\langle Te_i, y \rangle} e_i \rangle \\ &= \langle x, \sum_{i=1}^n \overline{\langle Te_i, y \rangle} e_i \rangle \end{aligned}$$

Posons $T^*y = \sum_{i=1}^n \langle y, Te_i \rangle e_i$, alors comme le produit scalaire est linéaire par rapport à la première variable, on déduit que $T^* \in \mathcal{L}(E)$. De plus, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

Pour l'unicité, supposons qu'il existe $S \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$ pour tous $x, y \in E$. Alors $\langle x, Sy \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ pour tous $x, y \in E$. Fixons $y \in E$. Alors, $\langle x, (S - T^*)y \rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Comme $E^\perp = \{0\}$, on déduit que $Sy = T^*y$. $\square$

Vocabulaire. Avec les notations du théorème ci-dessus, l'endomorphisme T^* est appelé adjoint de T .

Exemples 4.5.2. 1) L'adjoint de l'endomorphisme identité $\text{id} : E \rightarrow E$ est lui même.

2) Soient $u, v \in E$. Désignons par $u \otimes v$ l'application définie par :

$$u \otimes v : E \rightarrow E, \quad x \mapsto \langle x, u \rangle v$$

Alors on vérifie que $u \otimes v$ est linéaire (cette application est l'analogue de $T_{u,v}$ dans le Chapitre 3, Exemple 3.2.). Retrouvons l'adjoint de $u \otimes v$. Soient $x, y \in E$. Alors

$$\begin{aligned} \langle (u \otimes v)x, y \rangle &= \langle \langle x, u \rangle v, y \rangle \\ &= \langle x, u \rangle \langle v, y \rangle \\ &= \langle x, \overline{\langle v, y \rangle} u \rangle \end{aligned}$$

D'où, $(u \otimes v)^*(y) = \langle y, v \rangle u = (v \otimes u)(y)$. Ainsi, $(u \otimes v)^* = v \otimes u$.

Lemme 4.5.3. Soit T un endomorphisme de E . Alors $T^{**} = T$.

Preuve. Vous pouvez adapter facilement la preuve du cas euclidien. $\square$

Théorème 4.5.4. La matrice de l'adjoint T^* de T dans la base orthonormale B vérifie

$$M(T^*, B) = M(T, B)^*.$$

Preuve. Comme B est une base orthonormale, alors

$$(4.4) \quad T^*e_j = \sum_{i=1}^n \langle T^*e_j, e_i \rangle e_i \quad \text{et} \quad Te_j = \sum_{i=1}^n \langle Te_j, e_i \rangle e_i$$

Utilisons maintenant la définition de l'adjoint pour la première relation dans (4.4), on déduit

$$T^*e_j = \sum_{i=1}^n \langle e_j, Te_i \rangle e_i$$

Donc la j ème colonne de $M(T^*, B)$ est

$$\begin{pmatrix} \langle e_j, Te_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle e_j, Te_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\langle Te_1, e_j \rangle} \\ \vdots \\ \overline{\langle Te_n, e_j \rangle} \end{pmatrix}$$

D'autre part, de la seconde relation de (4.4), on déduit que la j ème colonne de $M(T, B)$ est

$$\begin{pmatrix} \langle Te_j, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Te_j, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

Par suite, la j ème ligne de $M(T, B)$ est

$$(\langle Te_1, e_j \rangle, \dots, \langle Te_n, e_j \rangle).$$

Ainsi, $M(T^*, B) = M(T, B)^*$. □

Nous avons les propriétés suivantes, analogues au cas euclidien.

Proposition 4.5.5. *Soient $T, S \in \mathcal{L}(E)$. Alors on a les assertions suivantes :*

(i) *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*$.*

(ii) *$\text{Ker} T^* = (\text{Im } T)^\perp$ et $\text{Im } T^* = (\text{Ker } T)^\perp$.*

(iii) *$(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$*

(iv) *$T \in \text{GL}(E) \Leftrightarrow T^* \in \text{GL}(E)$ et $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

(v) *Le polynôme caractéristique de T vérifie $P_{T^*}(X) = \overline{P_T(X)}$.*

(vi) *T est diagonalisable si et seulement si T^* l'est.*

Preuve. (i) : Soient α et β deux éléments fixés de $\mathbb{C}$. Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} \langle (\alpha T + \beta S)x, y \rangle &= \alpha \langle Tx, y \rangle + \beta \langle Sx, y \rangle \\ &= \alpha \langle x, T^*y \rangle + \beta \langle x, S^*y \rangle \\ &= \langle x, (\bar{\alpha}T^* + \bar{\beta}S^*)y \rangle \end{aligned}$$

D'où, l'assertion (i) est vérifiée.

(ii) et (iii) : La preuve est la même que pour le cas euclidien.

(iv) : Appliquons le théorème 4.5.4, alors dans la base orthonormale B , on a $M(T^*, B) = M(T, B)^*$. Or, T est inversible si et seulement si $\det M(T, B) \neq 0$, d'autre part $\det(M(T, B)^*) = \overline{\det(M(T, B))}$, donc T est inversible si et seulement si T^* est inversible. Supposons maintenant que T est inversible, alors

$$M(T^*, B)^{-1} = (M(T, B)^*)^{-1} = (M(T, B)^{-1})^* = M(T^{-1}, B)^*$$

D'où,

$$M((T^*)^{-1}, B) = (M(T^*, B))^{-1} = M(T^{-1}, B)^* = M((T^{-1})^*, B)$$

Ainsi, on a l'égalité $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

(v) et (vi) découlent du théorème 4.5.4. □

4.6 Endomorphismes spéciaux

Dans tout ce paragraphe, on suppose que $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormale quelconque de E .

4.6.1 Endomorphismes unitaires et groupe unitaire

Définition 4.6.1. Soit T un automorphisme de E . On dit que T est unitaire si $T^* = T^{-1}$. L'ensemble des endomorphismes unitaires de E est noté $U(E)$, et est appelé groupe unitaire de E .

Exemples 4.6.2. (1) Il est clair que $\text{id} \in U(E)$.

(2) Considérons l'endomorphisme T de $\mathbb{C}^2$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

Alors il est facile de voir que T est unitaire.

Lemme 4.6.3. $U(E)$ est un sous groupe de $\text{GL}(E)$. De plus, pour tout $T \in U(E)$, $|\det T| = 1$.

Preuve. On a, $\text{id} \in U(E)$. Si $T, S \in U(E)$, $T^{-1} = T^* \in U(E)$ puisque $T^{**} = T$. De plus,

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1} = S^*T^* = (TS)^*,$$

donc $TS \in U(E)$. Donc $U(E)$ est un sous groupe de $\text{GL}(E)$.

Soit $T \in U(E)$. D'après Théorème 4.5.4, $\det T^* = \overline{\det T}$. Comme $TT^* = \text{id}$, on déduit

$$\det(TT^*) = 1 = \det T \det T^* \Rightarrow |\det T|^2 = 1.$$

□

Vocabulaire. L'ensemble

$$SU(E) = \{T \in U(E) : \det T = 1\}$$

est appelé groupe spécial unitaire de E .

Lemme 4.6.4. *$SU(E)$ est un sous groupe de $U(E)$.*

Démonstration. On peut faire la preuve directement, c'est très simple. Ou bien, remarquons que l'ensemble G des endomorphismes de E de déterminant 1 est un sous groupe de $\text{GL}(E)$, et $SU(E) = U(E) \cap G$. □

La proposition suivante découle directement du théorème 4.5.4.

Proposition 4.6.5. *Soit T un endomorphisme de E . Posons $M = M(T, B)$. Alors T est un endomorphisme unitaire si et seulement si $M^*M = I_n$.*

Définition 4.6.6. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que A est unitaire si $M^*M = I_n$. L'ensemble des matrices unitaires de $M_n(\mathbb{C})$ est noté $U_n(\mathbb{C})$. L'ensemble des éléments de $U_n(\mathbb{C})$ de déterminant 1 est noté $SU_n(\mathbb{C})$.*

De la proposition 4.6.5 et du lemme 4.6.3, on déduit facilement le résultat suivant

Proposition 4.6.7. *L'ensemble des matrices unitaires $U_n(\mathbb{C})$ est un sous groupe de $GL(n, \mathbb{C})$. De plus, les groupes $U(E)$ et $U_n(\mathbb{C})$ sont isomorphes via l'application*

$$U(E) \rightarrow U_n(\mathbb{C}), \quad T \mapsto M(T, B)$$

Théorème 4.6.8. *Soit T un endomorphisme de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) $T \in U(E)$.
- (ii) Pour tous $x, y \in E$, $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$.
- (iii) Pour tout $x \in E$, $\|Tx\| = \|x\|$.
- (iv) $TB = \{Te_1, \dots, Te_n\}$ est une base orthonormale de E .

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) et (ii) $\Rightarrow$ (iii) : Exactement comme dans le cas des endomorphismes orthogonaux.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Comme dans le cas des endomorphismes orthogonaux en appliquant l'identité de polarisation (lemme 4.3.5 : cas hermitien). Pour le reste de la preuve, exactement comme dans le cas euclidien. $\square$

4.6.2 Endomorphismes hermitiens et groupe hermitien

Définition 4.6.9. Soit T un endomorphisme de E . On dit que T est hermitien s'il est égal à son adjoint, c'est à dire

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle, \quad \forall u, v \in E$$

L'ensemble des endomorphismes hermitiens de E sera noté $He(E)$.

Exemples 4.6.10. (1) Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, alors $T + T^*$ est hermitien. En effet,

$$(T + T^*)^* = T^* + T^{**} = T^* + T.$$

(2) Soit $u \in E$ avec $u \neq 0$. Avec la notation de l'exemple 4.5.2 (2), $T = u \otimes u$ est un endomorphisme hermitien.

De la proposition 4.5.4, on déduit immédiatement le résultat suivant

Proposition 4.6.11. Soit T un endomorphisme de E . Alors T est hermitien si et seulement si $M(T, B)$ est hermitienne.

Proposition 4.6.12. $He(E)$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble des endomorphismes de E , $\mathcal{L}(E)$. De plus, $He(E)$ est isomorphe à $H_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices hermitiennes d'ordre n sur $\mathbb{C}$ via

$$\Gamma : He(E) \rightarrow H_n(\mathbb{C}), \quad T \mapsto M(T, B)$$

Théorème 4.6.13. *Soit T un endomorphisme hermitien de E . Alors toutes les valeurs propres de T sont réelles.*

Preuve. Posons $M = M(T, B)$, alors $M^* = M$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P_T(\lambda) = 0$. Soit donc $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$. Alors

$$\overline{MX} = \overline{\lambda X} \Rightarrow M\overline{X} = \overline{\lambda} \overline{X}$$

Par suite, en multipliant à gauche par le vecteur ligne X^t , on déduit

$$\begin{aligned} X^t M \overline{X} &= \overline{\lambda} X^t \overline{X} \Rightarrow \\ (MX)^t \overline{X} &= \overline{\lambda} X^t \overline{X} \Rightarrow \\ \lambda X^t \overline{X} &= \overline{\lambda} X^t \overline{X} \end{aligned}$$

Comme on l'a déjà vu dans le cas euclidien, posons $X^t = (x_1, \dots, x_n)$. Alors

$$X^t X = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$$

Donc $\lambda = \overline{\lambda}$. □

Proposition 4.6.14. *Soit $T \in He(E)$. Alors*

- (i) *Les sous espaces propres de T sont orthogonaux deux à deux.*
- (ii) *Si H est un sous espace vectoriel de E invariant par T alors $TH^\perp \subset H^\perp$.*

Preuve. (i) : Supposons que λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres distinctes de T et désignons par E_{λ_j} le sous espace propre associé à λ_j . Choisissons $u_j \in E_{\lambda_j}$ avec $u_j \neq 0$. Alors comme λ_1 et λ_2 sont réelles, on a

$$\begin{aligned} \langle u_1, Tu_2 \rangle &= \langle Tu_1, u_2 \rangle \Rightarrow \\ \lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle &= \lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle \end{aligned}$$

Or $\lambda_1 \neq \lambda_2$, donc on doit avoir $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$. Ceci montre (i).

(ii) La preuve est exactement la même que pour les endomorphismes symétriques. □

La preuve du théorème suivant est analogue à celle du théorème 4.15 (Chapitre 3), pour les endomorphismes symétriques.

Théorème 4.6.15. *Soit T un endomorphisme hermitien de E . Alors T est diagonalisable. De plus, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de E .*

La version matricielle du théorème ci-dessus est

Corollaire 4.6.16. *Soit A une matrice carrée réelle hermitienne d'ordre n . Alors il existe une matrice unitaire P de $M_n(\mathbb{C})$ tel que la matrice P^*AP est diagonale.*

Preuve. Considérons l'espace hermitien usuel $\mathbb{C}^n$ et sa base canonique B . Soit $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ l'endomorphisme défini par $M(T, B) = A$. Alors d'après le théorème ci-dessus, il existe une base orthonormale B' de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de T . Autrement dit, $M(T, B')$ est diagonale. Posons $P = P_{BB'}$. Comme la base canonique B est orthonormale pour le produit scalaire usuel, d'après Théorème 4.6.8, P est une matrice unitaire. En particulier, $P^{-1} = P^*$. Ainsi,

$$M(T, B') = P^{-1}M(T, B)P = P^*AP$$

□

Culture relative à ce cours

Dans ce paragraphe, j'ajoute surtout du vocabulaire relatif à cette formation, pour que vous puissiez vous repérer dans la littérature mathématique. Ce paragraphe ne sera pas inclus dans le Contrôle.

- 1) Etant donné trois espaces vectoriels E, F et G sur $\mathbb{K}$, on peut définir la notion plus générale d'application bilinéaire $f : E \times F \rightarrow G$: C'est une application qui doit être linéaire de chaque côté.
- 2) Si E est un espace euclidien, son produit scalaire est une forme bilinéaire "définie positive". Il ne faut jamais oublier le mot "définie", car une forme bilinéaire f est dite "positive" si elle vérifie $f(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$. De même, on définit une forme hermitienne "positive".
- 3) Dans la définition d'espace euclidien, si on suppose que E peut aussi avoir la dimension infinie, E est appelé espace préhilbertien réel. Certaines propriétés faites pour les espaces euclidiens restent valables dans les espaces préhilbertiens. Par analogie, on définit aussi les espaces préhilbertiens complexes.
- 4) Pour nos espaces hermitiens, le produit scalaire est linéaire à gauche, et antilinéaire à droite. Dans la littérature mathématique, certains définissent leur espaces hermitiens comme ayant un produit scalaire linéaire à droite, et antilinéaire à gauche. Par exemple, tous les cours pour futur ingénieurs adoptent cette seconde définition, puisque dans la littérature physique, le produit scalaire est antilinéaire à gauche. Cette différence dans la définition reste un petit détail et une fois habitué à une définition, on peut s'habituer à l'autre en peu de temps. Néanmoins, à votre niveau il vaut mieux travailler avec une définition fixe. Les résultats fondamentaux sont les mêmes, mais les formules matricielles sont légèrement différentes. Enfin, je précise que dans la littérature mathématique avancée, où on étudie les espaces d'Hilbert, qui généralisent les espaces euclidiens et les espaces hermitiens, le produit scalaire est linéaire à gauche, antilinéaire à droite, comme dans ce cours.

Références.

Les références utilisées pour ce cours sont :

- 1) *Xavier Gourdon*, Les maths en tête, Algèbre, édition 2. Ellipses, 2009.
- 2) *Michel Queysanne*, Algèbre, MP et Spéciales AA', Collection U-Série Mathématiques, 1964.
- 3) *E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux*, Algèbre et Applications à la Géométrie, Masson, 1990.