Université Mohammed V-Rabat
Faculté des Sciences
Département de physique

TRAVAUX PRATIQUES

MÉCANIQUE DE SOLIDE

SMP & SMA
Semestres 3 et 4

Responsable : Pr. M. OUAHMAN.

Réalisé par : Pr. M. OUAHMAN, Pr. N. TAHIRI Et l'équipe du laboratoire.

SOMMAIRE

GENERALITES

OBJECTIF DES TRAVAUX PRATIQUES

La physique est la science qui étudie les propriétés générales de la matière et permet d'établir de nombreuses lois qui servent très souvent de fondement aux autres sciences.

Ces lois physiques doivent être vérifiées par des expériences reproductibles en vue d'illustrer certains phénomènes physiques traités dans le cours et déterminer les grandeurs physiques avec une bonne précision. **C'est le but essentiel des travaux pratiques.**

Ces travaux permettent aussi d'apprendre à manipuler, tracer des courbes, interpréter les résultats obtenus et en tirer des conclusions.

L'étude expérimentale d'un phénomène physique nécessite l'acquisition d'un ensemble d'appareils pour réaliser des montages, faire des mesures en tenant compte de toutes les erreurs commises et comparer ensuite les résultats obtenus aux valeurs théoriques.

1 - MESURES ET INCERTITUDES

Lors d'une mesure, il est impossible de trouver la valeur exacte d'une grandeur physique x. Mesurer cette grandeur, revient non seulement à chercher sa valeur mais à lui attribuer aussi une autre valeur appelée incertitude absolue pour pouvoir qualifier la qualité de la mesure. Cette incertitude est associée aux erreurs de mesures dues à l'instrument de mesure, à l'opérateur et à la variabilité de la grandeur mesurée.

- **Notions d'erreur et d'incertitude**
  - **L'erreur** sur une mesure est la différence entre la valeur obtenue (Valeur mesurée) et la valeur réelle (valeur exacte).

Erreur = valeur mesurée − valeur exacte.

L'erreur est une grandeur algébrique, positive si la mesure est par excès, négative si la mesure est par défaut.

  - **L'incertitude** de mesure est l'intervalle au sein duquel se trouve probablement la valeur vraie. Elle caractérise la dispersion des valeurs qui peuvent être attribuées à la grandeur mesurée. Elle est positive, de même nature que x et notée Δx.

Le résultat de la mesure de x est notée donc : $x = (x_0 \pm \Delta x)$.

❖ <u>Types d'erreurs de mesures</u>

On distingue deux types d'erreurs :

➢ L'erreur systématique

Lors d'une mesure unique, la précision de l'appareil de mesure, la façon dont il est utilisé et la qualité de la mesure, sont à prendre en compte : l'erreur correspondante est dite systématique ou de biais. Par exemple, un appareil peut être mal étalonné : le zéro peut être mal réglé, l'échelle peut être mal graduée, etc. L'erreur systématique est donc une erreur de méthode (due au matériel, ou à l'expérimentateur). Elle est la plus difficile à détecter et nécessite une vigilance constante.

L'évaluation de celle-ci consiste à considérer alors toutes les erreurs commises.

➢ L'erreur de mesure accidentelle

Lorsqu'un même opérateur répète plusieurs fois, dans les mêmes conditions, la mesure d'une même grandeur, les résultats peuvent être différents. On parle alors d'erreur de mesure accidentelle .Elle est due essentiellement aux réflexes de l'opérateur.

❖ <u>Types d'incertitudes</u>

➢ Incertitude systématique

L'incertitude systématique est associée aux erreurs systématiques.

Incertitude systématique = la plus petite grandeur mesurée avec un instrument.

➢ Incertitude accidentelle

Cette incertitude est due à l'opérateur, lorsqu'il fait n mesures (g_1, g_2,..., g_n) d'une même grandeur physique **G** dans les mêmes conditions. Pour la calculer, on prend la valeur moyenne: g_m =valeur moyenne de g = $g_1 + g_2 + g_3$...../n = $\sum g_i$ /n avec i=1,2…….n. Plus le nombre de mesures « n » est grand, plus g_m est proche de g_o.

L'incertitude accidentelle est la valeur la plus grande entre les écarts $|g_m - g_i|$.

$\Delta g = \sup|g_m - g_i|$ avec i =1,2…….n.

Cas où 2 mesures g_1 et g_2 sont effectuées:

$$\Delta g = \left|\frac{g_1 - g_2}{2}\right|$$

- **Incertitude absolue**

L'incertitude absolue Δx est l'erreur maximale que l'on peut commettre dans l'évaluation de x. L'incertitude absolue est la somme des deux incertitudes précédentes :

$$\Delta g = \Delta g_{\text{systématique}} + \Delta g_{\text{accidentelle}}.$$

C'est une quantité toujours positive et de même unité que g. La valeur exacte de g est telle que : $g_{moyen} - \Delta g \leq g \leq g_{moyen} + \Delta g$.

Avec : $\Delta g << g$, $\Delta g \geq 0$

$\Delta g = (\Delta g)_{\text{systématique}}$ si une seule mesure est effectuée.

Si la grandeur G est affectée de plusieurs incertitudes $(\Delta g)_1$,$(\Delta g)_2$….. l'incertitude absolue totale est: $(\Delta g)_{Totale} = (\Delta g)_1 + (\Delta g)_2 + \ldots$..

- Si dans une série de mesures, une valeur est trop écartée de la moyenne, elle doit être refaite.
- Le résultat d'une mesure g doit être toujours accompagné de son incertitude absolue Δg et de son unité exprimée, en général, dans le système international [S.I].

$$g = \left(g_m \pm \Delta g\right) Unit\acute{e}.$$

- Il faut donner la valeur de **<u>l'incertitude absolue avec un seul chiffre significatif</u>.**

*<u>**Présentation de résultats:**</u>

Lors de la présentation finale d'un résultat il est important d'accorder le nombre de chiffres significatif à la précision déterminée.

Si une incertitude n'est pas donnée, le niveau du dernier chiffre significatif est admis comme ordre de grandeur de l'incertitude.

<u>**Exemple**</u> **:**

On veut mesurer le temps t nécessaire pour un tour à l'aide d'un chronomètre.

L'incertitude systématique dans ce cas est : $\Delta t_\ell = 0,01s$ (appelée incertitude de lecture).

Pour déterminer l'incertitude accidentelle, on fait trois mesures successives de t.

On trouve alors les valeurs suivantes : t_1 = 6,24 s, t_2= 6,34 s et t_3 = 6,29 s.

La valeur moyenne de $t_m = \dfrac{t_1 + t_2 + t_3}{3} = 6,29s$.

$\Delta t_{acc} = \sup |t_m - t_i| = 0,05s$

$\Delta t_{Totale} = \Delta t_\ell + \Delta t_{acc}$ AN : Δt_{Total} = 0,06 s d'où t = (6,29 ± 0,06) s.

***Comparaison de deux résultats**

Comparer deux résultats ($g_1 \pm \Delta g_1$), ($g_2 \pm \Delta g_2$) revient à vérifier l'inégalité :

Théorème de comparaison : $|g_1 - g_2| \leq (\Delta g)_1 + (\Delta g)_2$

Qui traduit le chevauchement des intervalles [g_1 - Δg_1, g_1 + Δg_1] et [g_2 - Δg_2, g_2 + Δg_2].

Conclusion : Si l'inégalité est vérifiée, on peut dire que la différence entre g_1 et g_2 n'a pas de signification physique.

- **Incertitude relative**

On appelle incertitude relative (ou précision) sur G, la quantité Δg /g. Elle est positive, sans unité et souvent exprimée en pourcentage (%). Elle renseigne mieux que l'incertitude absolue sur le degré d'exactitude d'une mesure. Une mesure est d'autant plus précise que son incertitude relative est faible.

Exemple:

Une masse est mesurée avec une précision de 5 % cela signifie que $\Delta m/m = 2$ %.

Si : m=500g $\Delta m = m\times 2\% = 10$g. D'où m = (500 ±10) g.

Comparaison de deux méthodes

La grandeur G est mesurée par deux méthodes différentes qui donnent les résultats $(g_1 \pm \Delta g_2)$ et $(g_2 \pm \Delta g_2)$.

La mesure la plus précise correspond à celle dont l'incertitude relative est la plus faible. Si : $\frac{\Delta g_1}{g_1} < \frac{\Delta g_2}{g_2}$: la première méthode est la plus précise.

Calcul d'incertitude

En général, la détermination d'une grandeur G s'effectue par la mesure d'autres grandeurs physiques intermédiaires X, Y, Z, ...

La grandeur G est alors définie par sa valeur g telle que : g = f(x, y, z, ...).

Connaissant les incertitudes Δx, Δy, Δz, …des mesures x, y, z, …, on détermine alors l'incertitude absolue Δg en fonction de Δx, Δy, Δz, … en faisant un calcul d'incertitudes.

1ère étape : Calcul des différentielles partielles.

2ème étape : Regroupement des coefficients de dx, dy, dz..

3ème étape : Majoration physique.

- **Cas simples d'une seule variable : G= f(x)**

On calcule la différentielle de g soit : dg = f '(x) dx.

Par majoration physique, on obtient: $\Delta g = |f\,'(x)|.\Delta x$.

Cas de plusieurs variables indépendantes: g = f (x,y,z….).

Pour faire ce calcul, on suit les étapes suivantes :

- On calcule séparément les dérivées partielles puis dg totale.
- On fait la majoration physique pour calculer Δg (d est remplacé par Δ et les coefficients de dx, dy,…sont pris en valeur absolue).

$$\Delta g = |f\,'(x)|.\Delta x + |f\,'(\mathrm{y})|.\Delta y + |f\,'(\mathrm{z})|.\Delta \mathrm{z} + ...$$

- **Cas de plusieurs variables liées**
  - ✓ **Premier cas :** la fonction est donnée sous forme de sommes, différences, produits ou quotients.

Exemple:

g (x,y,z) = 2xy + 1/y – yz^3

Calcul de dg :
dg = 2y dx + 2x dy – 1/y^2 dy - 3yz ^{2} dz - z^3 dy.

Regroupement des coefficients
dg = 2y dx + (2x – 1/y ^{2} - z ^{3}) dy - 3yz ^{2} dz.

Majoration physique

$$\Delta g = |2y|\,\Delta x + \left|\left(2x - \frac{1}{y^2} - z^3\right)\right|\Delta y + \left|-3yz^2\right|\Delta z$$

- ✓ **Deuxième cas**

Lorsque l'expression de g comporte seulement des produits et des quotients, on peut simplifier les calculs en utilisant la "méthode des logarithmes", comme dans l'exemple suivant :

Exemple :

g (x,y,z) =2 x ^{2}y / x-y .

On passe par le Log :

Log (g) = Log 2 + 2Log (x) +Log (y) – Log (x-y).

On différencie le Log :

$$\frac{dg}{g} = 2\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - \frac{d(x-y)}{x-y} = 2\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x-y} + \frac{dy}{x-y}$$

On regroupe :

$$\frac{dg}{g} = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-y}\right)dx + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-y}\right)dy$$

On majore :

$$\frac{\Delta g}{g} = \left|\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-y}\right)\right|\Delta x + \left|\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-y}\right)\right|\Delta y$$

$$\Delta g = g\left[\left|\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-y}\right)\right|\Delta x + \left|\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-y}\right)\right|\Delta y\right]$$

2- REPRESENTATION GRAPHIQUE

En physique, il est courant de passer par une représentation graphique pour essayer de vérifier une loi.

La droite étant la représentation la plus simple, on cherche à exprimer la loi à tester sous la forme y =ax+b.

Les rectangles d'incertitudes (ou barres d'erreurs) sont portés sur le graphe pour juger de la validité de l'interprétation.

La représentation graphique de la fonction y = f(x) = ax + b est une droite.

Considérons deux points $A_1 (x_1, y_1)$ et $A_2 (x_2, y_2)$ de la droite D (figure ci-dessous). On appelle pente de cette droite, le rapport $p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;

On montre que p = a = tg (α).

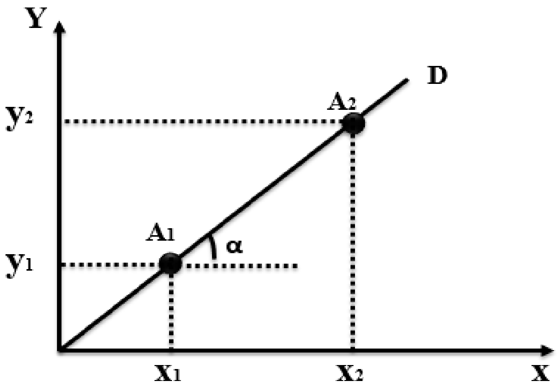


Figure 1. Représentation graphique d'une fonction linéaire

En mathématique, quand le repère xOy est orthonormé, la pente p = tg (α) est un nombre sans unité.

En physique, les grandeurs X et Y ont des unités. Par conséquent **la pente** $p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, a une unité: $p = \frac{[Y]}{[X]}$ et donc $p \neq tg(\alpha)$.

Tracé de courbe

Chaque grandeur X (ou Y) est mesurée avec une certaine incertitude. Les résultats de mesure $(x \pm \Delta x)$ et $(y \pm \Delta y)$ sont en général regroupés dans un tableau :

Pour tracer la courbe Y = f(X), on procède de la manière suivante :

- On commence par tracer les axes des abscisses X et des ordonnées Y sur les bords d'un papier millimétré; les unités de X et de Y doivent être indiquées.
- On choisit les échelles des axes de façon que la courbe occupe le maximum de surface du papier millimétré (la pente d'une droite obtenue à partir de ce graphe sera alors la plus précise).
- On place sur la courbe les points expérimentaux $A_i (x_i, y_i)$. Lorsque la courbe n'est pas une droite, on joint ces points par des traits sans tenir compte des incertitudes.

Comment traduire graphiquement les incertitudes expérimentales ?

Lorsque la courbe est une droite, on tient compte des incertitudes.

La mesure exacte alors de chaque point A_i (x_i, y_i) se trouve dans l'intervalle $[x_i - \Delta x_i, x_i + \Delta x_i]$ pour l'axe des abscisses, et $[y_i - \Delta y_i, y_i + \Delta y_i]$ pour l'axe des ordonnées (Voir figure 2).

Ceci permet de tracer un rectangle d'incertitude de cotés 2 Δx_i et $2\Delta y_i$, centré en A_i (x_i, y_i). Autour de chaque point expérimental on trace un rectangle d'incertitude.

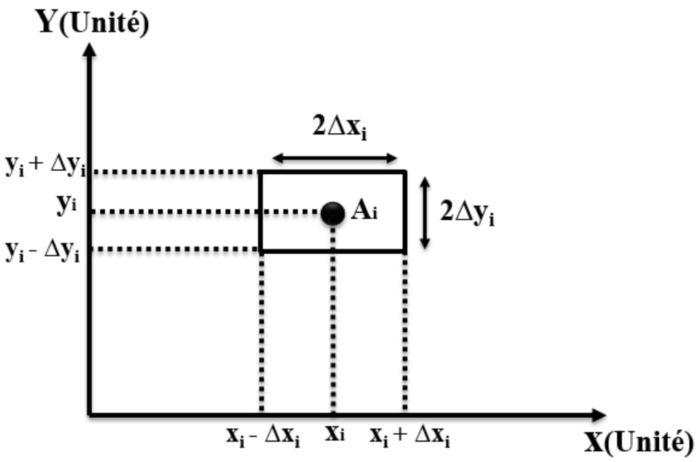


Figure 2: Représentation graphique des incertitudes expérimentales

Remarque : Il se peut que ce rectangle se réduit à un segment ou un point si l'une ou les deux incertitudes sont négligeables ou l'échelle choisie n'est pas bonne.

On trace ensuite deux droites limites D_1 et D_2 ayant respectivement la pente minimale P_1 et la pente maximale P_2.

D_1 et D_2 doivent passer par le maximum de rectangles d'incertitudes (exemple ci-dessous). Ceci permet de calculer la pente moyenne $P_{moyenne}$ et son incertitude $\Delta P_{moyenne}$ comme suit :

$$P_{moyenne} = \frac{P_1 + P_2}{2} \quad \text{Et} \quad \Delta P_{moyenne} = \frac{|P_1 - P_2|}{2}$$

L'échelle ainsi que le titre de la courbe doivent être mentionnés sur le papier millimétré. Les unités indiquées sur les deux axes sont les unités réelles des grandeurs X et Y.

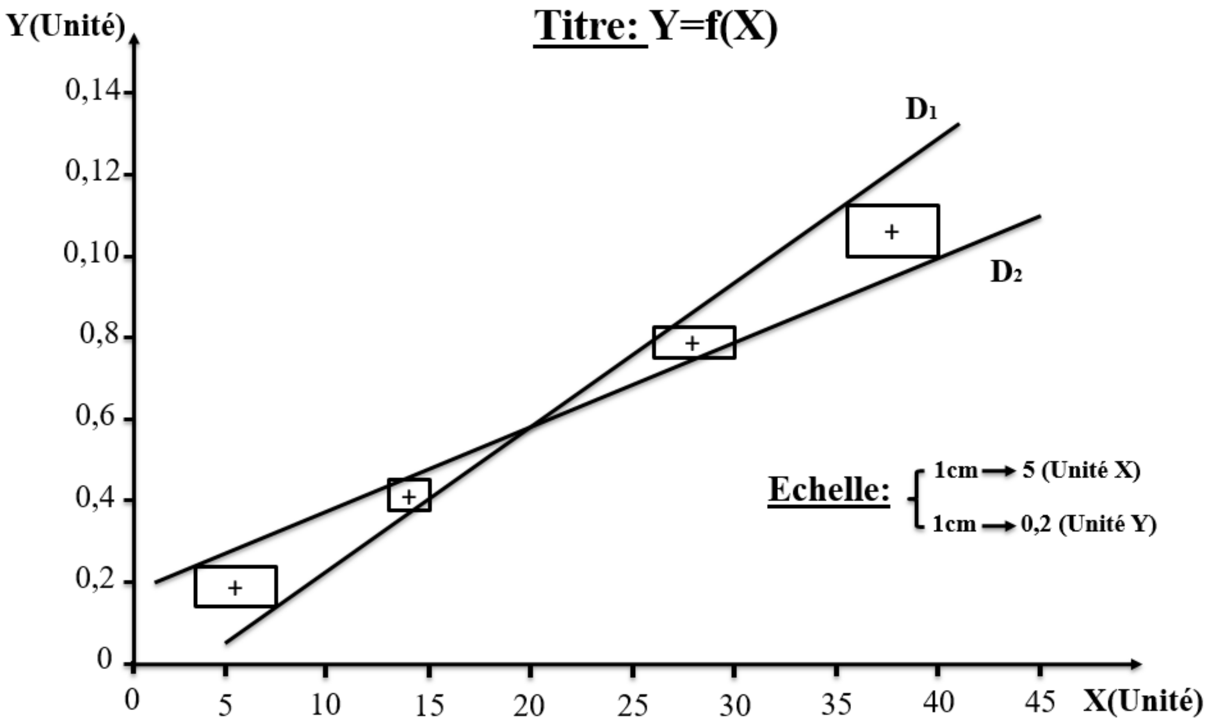


Figure 3: Représentation graphique de la fonction Y = f(X) avec rectangles d'incertitude.

3 - UTILISATION DU TACHYMETRE

Présentation

Le tachymètre numérique portable est un instrument compact qui permet de mesurer la vitesse d'un système en rotation. Le principe de fonctionnement (méthode optique), consiste à projeter un faisceau lumineux sur une ou plusieurs bandes minces collées à ce système.

Ces bandes reflètent la lumière vers le tachymètre ce qui conduit à la détermination de la vitesse de rotation. Le résultat apparaît automatiquement sur l'écran LCD.

La distance entre le tachymètre et le système en rotation peut aller jusqu'à 600mm. La valeur mesurée est exprimée en tour par minute (tr/mn) avec une précision $\Delta N/N$ souvent égale à 2%.

En pratique, les valeurs min, max. et moyenne ainsi que la dernière valeur mesurée, sont enregistrées (bouton menu). Voir figure 4.

Figure 4 : Le tachymètre numérique portable

Les différentes parties d'un tachymètre sont:

1 : Ecran d'affichage.
2 : Bouton de visualisation : dernière valeur. Valeurs min, max.
3 : Bouton d'alimentation et initialisations à la valeur 0.

4 - ORGANISATION *DES TP ET INSTRUCTIONS*

- Tout étudiant ayant fait un changement de filière ou nouveau inscrit (et dont le nom ne figure pas sur les listes affichées au Laboratoire de TP de physique), doivent contacter immédiatement le responsable de TP et apporter une photocopie de l'attestation d'inscription.
- Les étudiants redoublants ayant une note de TP supérieure ou égale à 10/20 sont dispensés. Seuls les étudiants ayant déposé une demande auprès du responsable peuvent passer les TP.
- La présence aux travaux pratiques est obligatoire et contrôlée.
- Toute absence non justifiée ou un compte rendu non remis entraînent la note 0/20.
- L'absence non justifiée au 2/3 de TP ne permet pas la validation du module.
- Les notes du contrôle de TP de physique sont affichées au Laboratoire. L'étudiant peut consulter sa copie sur demande déposée au Laboratoire.
- Dans la salle de T. P, ne jamais alimenter un montage (branchement au secteur) : appeler avant l'enseignant pour la vérification du montage.
- Il est strictement interdit de déplacer le matériel (fils de connexion, voltmètre..), en cas de panne appeler l'enseignant.
- Avant de partir : ranger le matériel, démonter les montages et éteindre les appareils électriques.

- Chaque manipulation doit être préparée auparavant. Le travail dans la salle de T.P doit être entièrement consacré à la réalisation des montages, aux mesures, au traçage des courbes et aux interprétations.
- Le compte rendu comprend :
  - <u>But</u> : c'est l'objectif qu'il faut atteindre avec les mesures effectués.
  - <u>Partie pratique</u> (manipulation) : concerne les mesures réalisées dans la salle (regroupés dans des tableaux), les calculs, les interprétations et les conclusions. Les questions théoriques (calcul d'incertitudes, …) doivent être traitées avant de venir en salle de T. P.
- A la fin de chaque séance, un compte-rendu regroupant tous les résultats de la manipulation réalisée, est remis.

<u>ANNEXE:</u> UNITES DU SYSTEME INTERNATIONAL (SI)

Unités de base du système SI.

Grandeur	Unité	Symbole	Dimension
Longueur	Mètre	**m**	L
Masse	Kilogramme	**kg**	M
Temps	Seconde	**s**	T
Intensité de courant	Ampère	**A**	I

Unités dérivées.

Grandeur	Unité	Symbole	Dimension	« Correspondance »
Charge électrique	Coulomb	**C**	Q = IT	A.s = C
Energie, travail	Joule	**J**	ML^2/T^2	$kg.m^2.s^{-2}$ = J
Fréquence	Hertz	**Hz**	1/T	s^{-1} = Hz
Puissance	Watt	**W**	P= ML^2/T^3	$kg.m^2.s^{-3}$ = W
Résistance électrique	Ohm	**Ω**	P /I^2 = U / I	$kg.m^2.s^{-3}.A^{-2}$ = Ω
Tension électrique	Volt	**V**	$M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$	$kg.m^2.s^{-3}.A^{-1}$ = V

Grandeur	Unité	Symbole
Angle	Radian	**rad**
Angle solide	Stéradian	**sr**
Accélération	Mètre par seconde carrée	$\mathbf{m.s^{-2}}$
Accélération angulaire	Radian par seconde carrée	$\mathbf{rad.s^{-2}}$
Vitesse	Mètre par seconde	$\mathbf{m.s^{-1}}$
Vitesse angulaire	Radian par seconde	$\mathbf{rad.s^{-1}}$

TP1: ETUDE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION

I- BUT

- Étude d'un mouvement de rotation uniformément accéléré autour d'un axe fixe.
- Calcul d'un moment d'inertie.

II- PARTIE THÉORIQUE

II – 1 Moment d'inertie :

Soit I, le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Δ) :

$$I = I_o + 2I$$

♦ **I_o** = moment d'inertie du système à vide, par rapport à l'axe (Δ), sans les masses M.

♦ **I_1** = moment d'inertie de chacune des masses M par rapport à (Δ).

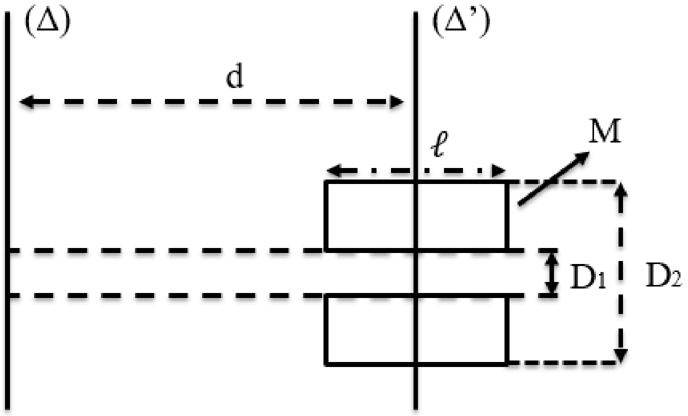
Grâce au théorème d'Huygens, I_1 s'écrit :

$$I_1 = Md_2 + I_{\Delta'}$$

♦ **Md^2** = moment d'inertie de M, confondue en son c.d.g, par rapport à (Δ).

♦ **$I_{\Delta'}$**= moment d'inertie de M par rapport à (Δ') parallèle à (Δ) en passant par le c.d.g de M :

$$I_{\Delta'} = \frac{M}{4}\left(\frac{\ell^2}{3} + \frac{D_1^2 + D_2^2}{4}\right) \quad (1)$$



Avec :

ℓ = longueur du cylindre M.
D_1 : Son diamètre intérieur.
D_2 : Son diamètre extérieur.

En définitive nous avons :

$$I = I_o + 2Md^2 + 2I_{\Delta'} \quad (2)$$

II – 2 Loi du mouvement :

C'est une relation entre θ (abscisse angulaire) et le temps t.

Dans notre cas, on démontre que cette relation peut s'écrire :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + k_1 t + k_2$$

* $\ddot{\theta}$ = Accélération angulaire du mouvement.

* k_1 et k_2 sont 2 constantes déterminées par les conditions initiales.

Si à l'instant t = 0 : θ= 0 (abscisse initial nul) et $\frac{d\theta}{dt} = 0$ (vitesse initiale nulle), alors k_1=k_2=0 et l'équation du mouvement devient :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 \quad (3)$$

L'expression de $\ddot{\theta}$ est donnée par la formule :

$$\ddot{\theta} = \frac{mgr}{I + mr^2} \quad (4)$$ (g=accélération de la pesanteur)

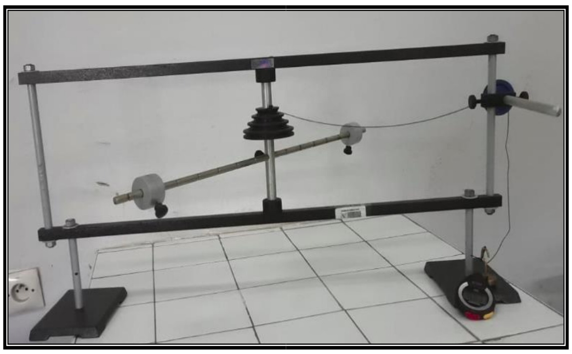
Pour une masse m donnée, $\ddot{\theta}$ est constante et le mouvement est uniformément accéléré.

III- DISPOSITIF EXPERIMENTAL.

Le dispositif expérimental est composé de :

- Un tambour, de rayon r, monté sur un roulement à billes et supporté par une tige verticale matérialisant l'axe de rotation (Δ).
- Une tige horizontale, solidaire du tambour, portant 2 masses identiques M disposées à égale distance d=25cm de l'axe.
- Une masse m portée par un fil passant sur une poulie.
- Un chronomètre manuel pour mesurer le temps.

a)



b)

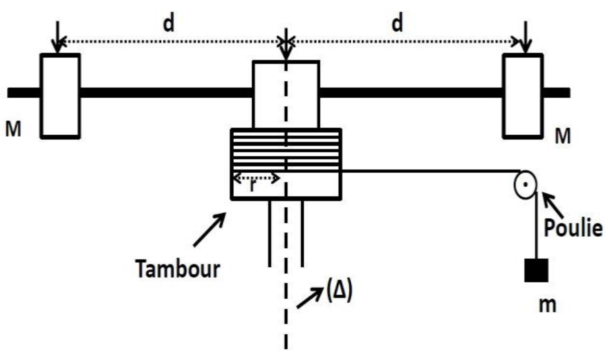


Figure 5 : a) Dispositif expérimental, b) Schéma représentatif

IV- MANIPULATION

Nous allons étudier expérimentalement le mouvement pour calculer $\ddot{\theta}$.

Ensuite, d'après la formule (4), nous allons déterminer le moment d'inertie I_0.

IV – 1 <u>Détermination de</u> $\ddot{\theta}$:

a) Placer les deux masses M à la distance d=25 cm de part et d'autre de la tige horizontale.

Dans toutes les expériences, le mouvement débutera à l'instant t=0 à partir du repos. L'angle θ sera mesuré en nombre entier de tours (N tours).

N(tours)	t_1 (s)	t_2 (s)	t_m (s)	Δt_m (s)	Δt_ℓ (s)	Δt(s)	t^2 (s^2)	Δt^2 (s^2)	N/t^2 (tr/s^2)
1									
2									
3									
4									

Pour chaque valeur de N, le temps est mesuré 2 fois : t_1 et t_2 ; t est la moyenne et Δt l'incertitude:

$$\Delta t = \Delta t_m + \Delta t_\ell$$

$$\Delta t_m = \frac{|t_1 - t_2|}{2}$$

Avec : Δt_ℓ est la précision du chronomètre = 0,02 s.

b) Représenter N = f(t^2) sur un papier millimétré en notant les rectangles d'incertitudes. Nature du phénomène ? Conclusion ?

c) Déterminer les pentes P_1 et P_2 et en déduire l'accélération angulaire $\ddot{\theta} \pm \Delta\ddot{\theta}$. ($\theta = 2\pi N$).

IV – 2 <u>Détermination de I_0</u> :

IV-2-a. Simplification de l'équation (4)

a) A l'aide de la balance et du pied à coulisse, déterminer les grandeurs suivantes avec leurs incertitudes : M, m, r, l, D_1 et D_2.

b) Faire le calcul de mr^2 et 2 $I_{\Delta'}$ (Sans incertitudes).

c) Calculer l'incertitude sur $2Md^2$: $\Delta (2Md^2)$.

d) En déduire qu'on peut négliger mr^2 et 2 $I_{\Delta'}$. Ainsi (4) s'écrit :

$$\ddot{\theta} = \frac{mgr}{I_0 + 2Md^2} \quad (5)$$

IV-2-b. Calcul de $I_o \pm \Delta I_o$

a) A partir de (5), calculer l'expression de I_o et en déduire celle de ΔI_o.

b) Application numérique.

TP2 : ETUDE DU GYROSCOPE

I- BUT

Le but de la manipulation est d'étudier le mouvement, autour d'un point fixe 0, d'un corps solide dont le moment cinétique est de grandeur constante et de direction invariablement liée au solide.

II- PARTIE THEORIQUE

1 – Description du Gyroscope (Voir figure 7)

Il est constitué d'une roue de faible poids, ayant un moment d'inertie assez grand. Le moyen de cette roue renferme un roulement à bille. Une tige T_1 peut coulisser à l'intérieur du moyeu et peut être fixée à celui-ci par simple serrage d'une vis.
On désignera par gyroscope l'ensemble roue-tige T_1.
La tige T_1 présente à une de ses extrémités un évidement E qui servira de repère. La pointe de l'autre extrémité tronconique de la tige T_1 désigne le point fixe O, qui est aussi le point d'appui de gyroscope sur un support fixe.

L'axe de la roue, confondu avec l'axe de la tige T_1, désignera par la suite l'axe OZ du référentiel lié au gyroscope.
Le centre de gravité du gyroscope se trouve exactement en O lorsque le repère E de la tige coïncide avec l'extrémité A du moyeu. Lorsque le repère n'est pas dans cette position, le centre de gravité se trouve sur l'axe OZ ailleurs qu'en 0.

Le gyroscope est en équilibre statique par rapport à 0 lorsque son centre de gravité est en 0. Dans cette position, lors du mouvement (rotation de la roue) la réaction en 0 est indépendante de la vitesse de rotation de la roue de son axe, on dira que le gyroscope est dynamiquement équilibré par rapport à l'axe OZ.

L'étude comportera une analyse qualitative du comportement du gyroscope équilibré (centre de gravité en O) et une analyse quantitative du mouvement dit de Lagrange lorsque le gyroscope est déséquilibré (Centre de gravité sur OZ ailleurs qu'en O).

2– Rappels théoriques et cinématique du gyroscope

a) Angles d'Euler

Les repères choisis sont trirectangles directs :
$OX_1Y_1Z_1$ est fixé au laboratoire. OZ_1 vertical ascendant.
OXYZ est lié au gyroscope. OZ axe de rotation de la roue.

Les plans OXY et OX_1Y_1 se coupent suivant l'axe OU.

La position instantanée de la roue tournante est déterminée par les angles d'Euler.

$$OX_1Y_1Z_1 \xrightarrow[\textit{Rotation}\text{ autour de OZ}_1]{\dot{\Psi}\vec{ez}_1} OUVZ_1 \xrightarrow[\textit{Rotation}\text{ autour de OU}]{\dot{\theta}\vec{eu}} OUWZ \xrightarrow[\textit{Rotation}\text{ autour de OZ}]{\dot{\varphi}\vec{ez}} OXYZ$$

$\Psi = (OX_1, OU)$ Angle de la précession

$\theta = (OZ_1, OZ)$ Angle de la rotation

$\varphi = (OU, OX)$ Angle de la rotation propre

La rotation instantanée Ω de la roue est la composition des rotations ψ', θ', φ' :

$$\vec{\Omega} = \dot{\psi}\vec{ez}_1 + \dot{\theta}\vec{eu} + \dot{\varphi}\vec{ez}$$

b) Moment cinétique

Le moment cinétique, en O de la roue par rapport au repère fixe F : $OX_1Y_1Z_1$ s'écrit :

$$\vec{L}_0 = I_R\vec{\Omega} \quad (1)$$

I_R désigne le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe OZ. Dans les mouvements étudiés par la suite, θ sera pratiquement constante, soit donc $\dot{\theta}=0$ et $\dot{\varphi}$ sera à peu près 10 fois plus grande que $\dot{\psi}$. (1) s'écrit alors :

$$\vec{L}_0 = I_R\dot{\varphi}\vec{ez} \quad (2)$$

c) Dynamique du gyroscope et Théorème du moment cinétique.

Le moment de rotation dynamique est régi par l'équation suivante :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0(F) \quad (3)$$

Ou $\vec{L}_0$ et sa dérivé par rapport au temps doivent être prises dans le repère fixe F : $OX_1Y_1Z_1$.
$\vec{M}_O(F)$ est le moment en 0 des forces extérieures. Dans le cadre de la manipulation la force qui intervient est due à la masse du gyroscope. Elle est dirigée suivant $\vec{ez}_1$, son point d'application est G. Centre de gravité du gyroscope. Elle s'écrit :

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = OG\vec{ez} \wedge (M+m)g(\vec{ez}_1)$$

M est la masse de la roue, m la masse de la tige T_1. OG=d.

Soit :
$$\vec{M}_0(F) = d(M+m)g(\vec{ez}_1) \wedge \vec{ez} \quad (4)$$

En comparant (2) à (4) on voit que $\vec{M}_0(F)$ est perpendiculaire à $\vec{L}_0$ soit donc : $\vec{L}_0.\vec{M}_0(\vec{F}) = 0$ (4 bis).

En faisant le changement d'axe et en prenant le repère R_S mobile M : OUWZ animé de la rotation $\vec{\omega} = \dot{\Psi}\vec{ez_1} + \dot{\theta}\vec{eu}$ par rapport au repère fixe F : $OX_1Y_1Z_1$. On a :

$$\left.\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right|_{Rs} + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_0\Big|_{Rs} = \vec{M}_0(\vec{F}) \; (5)$$

Compte tenu de (4 bis), si on multiplie scalairement (5) par $\vec{L}_0\Big|_F$, On obtient :

$$\vec{L}_0\Big|_F \cdot \left.\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right|_{Rs} = 0$$

Qui a pour solution $\left.\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right|_{Rs} = 0$ soit $\vec{L}_0\Big|_{Rs} = Constante$

L'équation (5) se réduit à :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{L}_0\Big|_{Rs} = \vec{M}_0(\vec{F}) \; (5\text{ bis})$$

Tenant compte de : $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{L}_0\Big|_{Rs} = I_R \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin\theta \vec{eu}$ et de

$\vec{M}_0(\vec{F}) = d(M+m)g\left(\vec{ez_1}\right) \wedge \vec{ez} = d(M+m)g \sin\theta \vec{eu}$. L'équation (5bis) donne :

$I_R \dot{\psi} \dot{\varphi} = d(M+m)g$

Soit : $$\dot{\psi}\dot{\varphi} = \frac{d(M+m)g}{I_R} \; (6)$$

Si d = OG+0 (centre de gravité en 0) $\Longrightarrow$ $\dot{\psi} = 0$. Donc la roue tourne autour de son axe OZ (Vitesse $\dot{\varphi}$). L'axe OZ est fixe par rapport à l'axe OZ_1. Si d = OG $\neq$0, l'axe OZ décrit un cône d'axe OZ_1 de demi-ouvertureθ.

Le mouvement est appelé précession conique de vitesse $\dot{\psi}$. Ainsi la pesanteur n'agit pas pour augmenter θ, c'est le paradoxe de l'effet gyroscopique.

Comme l'indique l'expression (6), l'étude nécessite la connaissance du moment d'inertie I_R de la roue et la distance d.

a) Pour déterminer le moment d'inertie I_R de la roue par rapport à son axe, on réalise un pendule pesant comme l'indique la figure 6, en utilisant une tige T_2, un système solidaire de la table et une masse m_1 qu'on accroche à la roue.

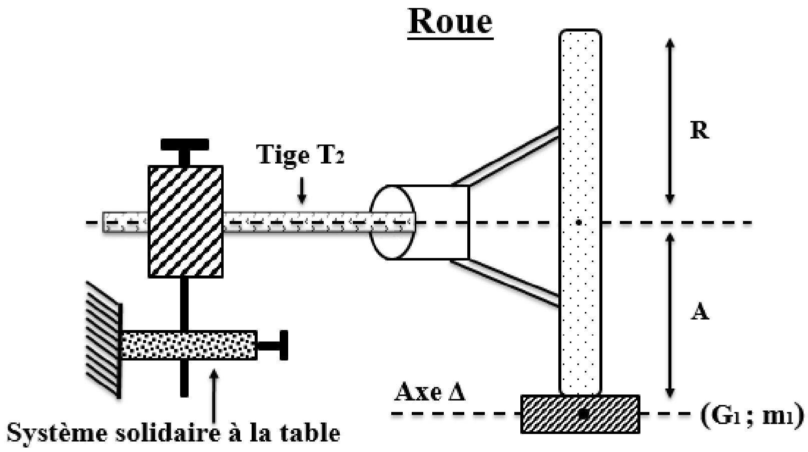


Figure 6 : Schéma du pendule pesant réalisé avec la roue.

Soient : G_1 centre de gravité de la masse m_1, A distance de G_1 à l'axe de la roue et I_{m1} moment d'inertie de la masse m_1 par rapport à l'axe Δ. Le moment d'inertie total I_T de l'ensemble roue-masse m_1 par rapport à l'axe de la roue s'écrit :

$$I_T = I_R + \mathrm{I}_{\mathrm{m1}} + m_1 A^2 \quad (7)$$

La quantité accessible à la mesure est la période d'oscillation T du pendule.

Dans le cas des faibles amplitudes T s'écrit.

$$T = 2\pi\sqrt{I_R / \left(m_1 g A\right)} \quad (8)$$

Pratiquement I_m est très faible et sera négligé dans (7). On obtient alors :

$$I_R = m_1 A.\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - A\right) \quad (9)$$

b) Calcul de d : distance entre le centre de gravité G du gyroscope et le point d'appui 0. Le théorème du centre de gravité donne.

$$d = OG = \frac{\left(M.OG_R = m.OG_T\right)}{\left(M + m\right)} \begin{cases} M : \text{masse } de \text{ la roue} \\ m : \text{masse de la tige } \mathrm{T}_1 \end{cases} \quad (10)$$

Lorsque le repère de la tige T_1 coïncide avec le bord du moyeu, G est en 0, donc d=0 soit :

$$M.OG_R\left(0\right) + m.OG_T\left(O\right) = 0 \quad (11)$$

Lorsqu'on déplace la tige T_1 de x (x : distance entre le bord du moyeu et le repère de la tige T_1), la distance entre le point 0 et le centre de gravité G_T de la tige T_1 reste la même. Par contre le point O s'éloigne ou s'approche (selon le sens de déplacement de T_1) du centre de gravité G_R de la roue. On a alors :

$$d = OG = \frac{M\left(OG_R\left(O\right) \pm x\right) + m.OG_T\left(O\right)}{M + m} = \pm \frac{x}{1 + \frac{m}{M}} \quad (12)$$

Pour les valeurs de x qui seront utilisés dans la manipulation le calcul de d donne :

$$x_1 = +4cm \Rightarrow d_1 = -3,72cm$$
$$x_2 = +2cm \Rightarrow d_2 = -1,85cm$$
$$x_3 = -2cm \Rightarrow d_3 = +1,85cm$$

III - DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Le dispositif utilisé dans ce TP est composé par : Figure 7

- Gyroscope : constitué par une roue et une tige T_1 l'ensemble est déposé sur un support fixe posé sur la table.
- Une tige T_2, un système solidaire de la table et une masse m_1 qu'on accroche à la roue pour réaliser un pendule pesant.
- Un chronomètre pour mesurer :
  - La période T. (Pendule pesant).
  - La vitesse de précession du gyroscope.
- Un tachymètre pour mesurer la vitesse propre du gyroscope.

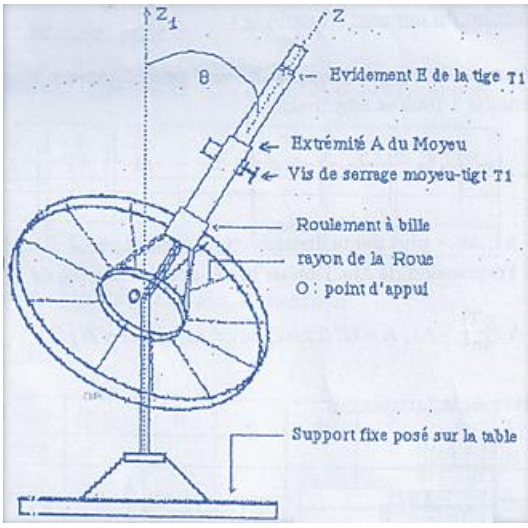


Figure 7 : Schéma représentatif du Gyroscope.

IV- MANIPULATION

<u>IV -1-Détermination du moment d'inertie</u> I_R :

Réaliser un pendule pesant comme indiqué précédemment. T représente la durée de 10 périodes T (faibles amplitudes).

t_1(s)	t_2(s)	t_3(s)	t_m(s)	Δt_m(s)	Δt_l(s)	Δt(s)	T(s)	ΔT(s)

$\Delta t_m = \sup|t_m - t_i|$, Δt_ℓ = plus petite division du chronomètre.

Calculer l'expression de ΔI_R. Donner le résultat numérique de I_R et de ΔI_R.

$$I_R = m_1 A\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - A\right),\ A = (27{,}2 \pm 0{,}2)\,cm \text{ et } m_1 = (527 \pm 2)\,g$$

<u>IV - 2-Vérification de la formule (6) :</u>

$$\left(\dot{\psi}\,\dot{\varphi}\right)_{th} = \frac{d\,(M+m)}{I_R}\,g$$

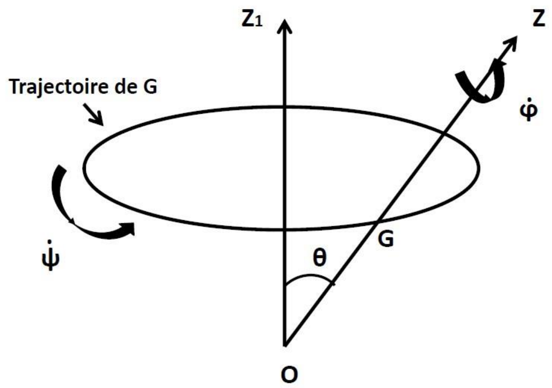
OZ$_1$= Repère fixe du laboratoire.

OZ = repère lie au système.

$\dot{\psi}$ =Vitesse angulaire de précession/OZ$_1$.

$\dot{\varphi}$ = Vitesse angulaire de rotation / OZ.

M= 3 Kg (masse de la roue).
m = 0,224 kg (masse de la tige).



<u>Appeler l'enseignant pour vous montrer le mode opératoire.</u>

On lance la roue à la main et on écarte OZ de OZ$_1$ d'un angle θ : OZ tourne autour de OZ$_1$. On mesure, à l'aide d'un chronomètre, le temps τ (s) mis par OZ pour effectuer n tours :

$\dot{\psi}(rd/s) = \frac{2\pi n}{\tau}$ (Prendre n=1 ou 2 tours).

La vitesse $\dot{\varphi}$ est très grande. Sa mesure nécessite l'utilisation d'un tachymètre. Si N (nombre de tour/minute) est la mesure indiquée par cet appareil, nous avons :

$$\dot{\varphi}(rd/s) = \frac{2\pi N}{10 \times 60}$$

<u>2-a. Indépendance de l'angle θ :</u>

Prendre x = constante = +4cm. Les angles θ$_1$, θ$_2$ et θ$_3$ sont quelconques :

θ	n=1(tour)	$\tau(s)$	$\dot{\psi}(rd.s^{-1})$	N(Tour/min)	$\dot{\varphi}(rd.s^{-1})$	$\left(\dot{\psi}\,\dot{\varphi}\right)_{ex}(rd^2.s^{-2})$
θ_1						
θ_2						
θ_3						

Comparer les 3 valeurs de $\left(\dot{\psi}\,\dot{\varphi}\right)_{ex}$. Conclusion ?

2-b. d variable :

x(cm)	d(cm)	$\left(\dot{\psi}\,\dot{\varphi}\right)_{th}\left(\frac{rd^2}{s^2}\right)$	n=1(tour)	$\tau(s)$	$\dot{\psi}\left(\frac{rd}{s}\right)$	N(Tour/min)	$\dot{\varphi}\left(rd.s^{-1}\right)$	$\left(\dot{\psi}\,\dot{\varphi}\right)_{ex}\left(\frac{rd^2}{s^2}\right)$
+4	-3.72							
+2	-1.85							
-2	+1.85							

Comparer $\left(\dot{\psi}\,\dot{\varphi}\right)$ théorique et expérimental. Conclusion ?

2-c-Prendre x=0 :

Faire coïncider le repère de la tige T_1 avec le bord du moyen. Dans ce cas G est confondu avec O d = OG = 0. Lancer le gyroscope puis donner à la tige T_1 une inclinaison θ. Que peut-on observer ? Expliquer le phénomène en utilisant la formule (6).

Accrocher au niveau du repère de la tige T_1 les quatre petites masses de valeur totale m'=0.2Kg.

$\left(\dot{\psi}\,\dot{\varphi}\right)_{th} = \frac{m'.g.d'}{I_R}$ Avec : d'=0,22m, Δd'=0,2cm et Δm'=2g.

Mesure	n=1(Tour)	$\tau(s)$	$\dot{\psi}\left(\frac{rd}{s}\right)$	N(Tour/min)	$\dot{\varphi}\left(rd.s^{-1}\right)$	$\left(\dot{\psi}\,\dot{\varphi}\right)_{ex}\left(\frac{rd^2}{s^2}\right)$	$\left(\dot{\psi}\,\dot{\varphi}\right)_{th}\left(\frac{rd^2}{s^2}\right)$
1							
2							
3							

Comparer $\left(\dot{\psi}\,\dot{\varphi}\right)_{th}$ et $\left(\dot{\psi}\,\dot{\varphi}\right)_{ex}$. Conclusion ?

TP3 : ETUDE DU VOLANT DE MAXWELL

I- BUT

Certains solides ont des formes géométriques mal déterminées, ou, ne sont pas homogènes ; par conséquent, on ne peut pas déterminer leurs moments d'inertie théoriquement à partir de leurs paramètres géométriques et physiques.

Le but de la manipulation est de déterminer expérimentalement :

a) Le moment d'inertie d'un système appelé : le volant de maxwell.

b) De vérifier que l'énergie totale d'un système mécanique est bien une fonction conservative.

c) De calculer théoriquement le moment d'inertie J d'un système équivalent.

II- PARTIE THEORIQUE.

- **Inductance propre et Résistance interne de la bobine.**

Soient R(O, x, y, z) le repère fixe lié au laboratoire et dont l'axe ox est confondu avec l'axe de révolution du système S lorsqu'il se trouve à sa position la plus basse, et $R_s(C, x, y_s, z_s)$ le repère lié au système.

- A l'instant initial, le système se situe à la hauteur z_1=h.

- A l'instant t > 0, S se situe à la hauteur z ou il a un mouvement de translation et de rotation, autour de son axe de révolution. S a donc deux paramètres de mouvement :

- La cote z du centre de gravité confondu avec C.

- L'angle d'Euler : angle de rotation propre autour de Cx :

$$R \xrightarrow[\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{ex}]{\varphi} R_s$$

Puisque le support roule (ou déroule) sans glissement sur les fils, les deux mouvements de S ne sont pas indépendants. Ceci veut dire que S possède un seul degré de liberté. On cherchera donc la relation qui relie z et J.

Soit un point M de la surface du support (Figure 9), la relation d'antisymétrie des vitesses donne la vitesse de glissement de M qui doit être nulle :

$$\vec{V}_{g/R}(M) = \vec{V}_R(C) + \overrightarrow{MC} \wedge \vec{\Omega}_{RS/R} = 0 \rightarrow \vec{V}_R(M) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MC} = \begin{cases} r\dot{\varphi}\vec{e}z \text{ Quand S monte} \\ -r\dot{\varphi}\vec{e}z \text{ Quand S descend} \end{cases} \quad (1)$$

$$V(C)=\frac{dz}{dt}=-r\frac{d\varphi}{dt}\rightarrow\begin{cases}z(t)=-r\varphi(t)+h:(S\text{ descend})\\ z(t)=r\varphi(t):(S\text{ monte})\end{cases}\quad(2)$$

Si tous les frottements sont nuls, l'énergie totale du système est conservative, d'où :

$$(z=h)=E(z)=E(z=0)=Ec(z)=Ep(z)\qquad(3)$$

Le poids est la seule force qui travail à la hauteur z. Soit

$$\begin{cases}E_p(z)=Mgz+cte\\ E_p(0)=0\end{cases}\rightarrow cte=0; E_p(z)=mgz$$

Le théorème de koening donne l'énergie cinétique à la hauteur z :

$$E_c(z)=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

Et d'après (1) :

$$E_c(z)=\frac{1}{2}Mr^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

Donc l'énergie totale du système à la hauteur z est :

$$E(z)=\frac{1}{2}\left(Mr^2+J\right)\dot{\varphi}^2+Mgz\quad(4)$$

Par conséquent :

* à la hauteur z=h, l'énergie totale du système S est égale à son énergie potentielle ($\dot{\varphi}$ =0).

* à z quelconque, une partie de l'énergie potentielle du système se transforme en énergie cinétique.

* à z=0, toute l'énergie potentielle se transforme en énergie cinétique ($\dot{\varphi}$ est maximum).

$$E(h)=E(0)\Leftrightarrow E_p(z=h)=E_c(z=0)\Leftrightarrow Mgh=\frac{1}{2}\left(Mr^2+J\right)\dot{\varphi}_{\max}^2$$

D'où :

$$J=\left(\frac{2gh}{r^2\dot{\varphi}_{\max}^2}-1\right)Mr^2\ (5)$$

III- DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Figure 8 : Dispositif expérimental.

Le dispositif expérimental utilisé dans ce TP est composé par :

- Volant de MAXWELL : Constitué par un volant circulaire et un support cylindrique ou tige solidaire de part et d'autre du centre C du volant. Vue de face du volant fig. 9.b….
- Deux fils de suspension identiques parfaitement flexibles et de coefficient de torsion nul.
- Un tachymètre pour mesurer la vitesse de rotation du système.
- Une règle pour mesurer la hauteur h.

a) b)

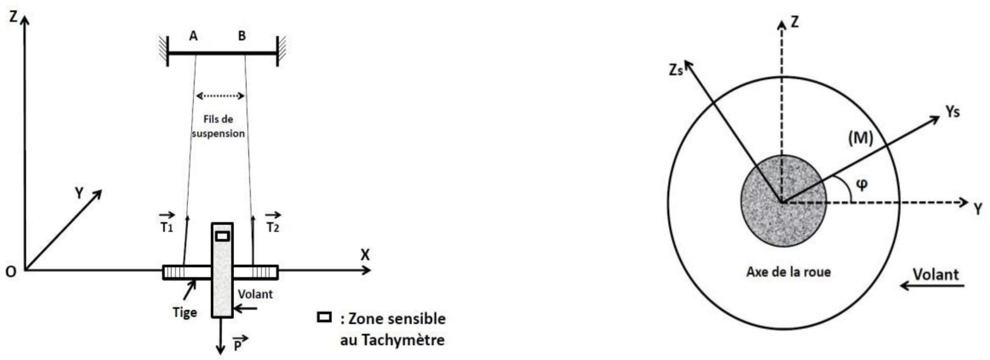


Figure 9 : a) Schéma représentatif du matériel, b) Vue de face du volant

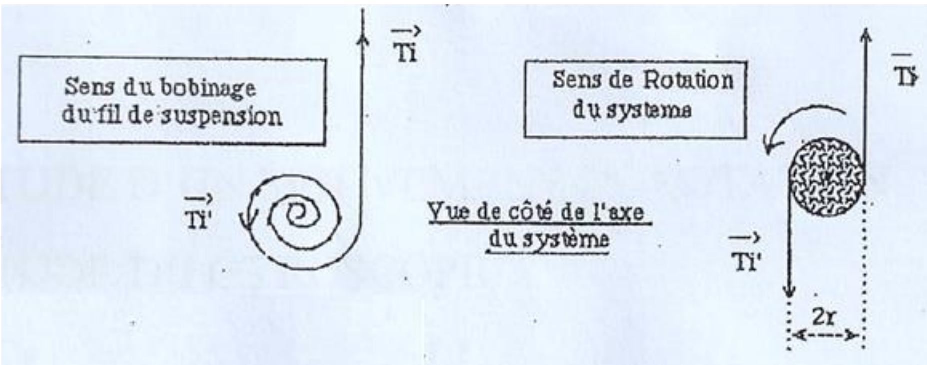


Figure 10 : Sens du bobinage des fils et sens du mouvement du volant

IV- MANIPULATION

1. Bobiner les fils de suspension du système autour de son support jusqu'à sa hauteur maximale h, puis lâcher le système sans vitesse initiale.
2. Observer bien le mouvement du système durant au moins une minute, et noter vos remarques.
3. Expliquer brièvement pourquoi le système ne poursuit pas « indéfiniment » son mouvement en descendant et en montrant.
4. Dans quel cas précis l'énergie totale du système est une fonction conservative.

   Comment serai dans ce cas le mouvement du système par rapport au cas de la question précédente ?
5. Mesurer avec le pied-à-coulisse, le diamètre du support et en déduire :

$$(\mathrm{r} \pm \Delta \mathrm{r})\ \mathrm{m}m$$

6. Evaluer la hauteur h qui sépare les deux positions limites du système :

$$(h \pm \Delta h) cm$$

7. Demander le tachymètre numérique de votre enseignant (Il vous expliquera comment l'utiliser). Mettre le système à sa hauteur maximale ; le lâcher sans vitesse initiale puis, essayer au même temps de mesurer à l'aide du tachymètre la vitesse angulaire.

   Prendre 3 mesures de N. On donne $\frac{\Delta N}{N} = 2\%$.

N_1 (tr/min)	N_2 (tr/min)	N_3 (tr/min)	ΔN (tr/min)

   Prendre la plus grande valeur de N et déduire la vitesse angulaire maximale en utilisant la relation de proportionnalité $\dot{\varphi}_{\max} = \frac{2\pi N}{4 \times 60}$. Déterminer son incertitude.

8. A l'aide de la relation (5) vérifier que le coefficient de Mr^2 est sans dimension, puis donner l'expression de $\frac{\Delta J}{J}$ et calculer $\left(J \pm \Delta J\right)$.
9. Calculer théoriquement J en supposant que la roue du système est approximativement identique à un disque vide homogène de rayon R et de masse M_D=10M_S avec M_D et M_S sont respectivement la masse du disque et la masse du support du rayon r du même système.

$$J_{th} = M_D R^2 + \frac{1}{2} M_S r^2.$$ En déduire ΔJ_{th}.

10. Comparer J_{th} avec J_{ex} calculée en tenant compte des incertitudes. Conclusion.

Données :

MD = Ms= R = r =