

Cours de Mécanique Quantique-SMP4

Chapitre I: Ondes et particules

A-Ondes électromagnétiques et photons

1-les quanta de lumière et les relations de Planck-Einstein

- ◆ Le rayonnement du corps noir
- ◆ L'effet photoélectrique
- ◆ L'effet Compton

2-Dualité onde-corpuscule

- ◆ Analyse de l'expérience des fentes d'Young
- ◆ Unification quantique des deux aspects de la lumière

B-Corpuscules Matériels et ondes de matière

1-Stabilité de l'atome: Modèle de Bohr

2-Les relations de Louis de Broglie

3-Fonction d'onde. Equation de Schrödinger

C-Description quantique d'une particule. Paquet d'ondes

1-Particule libre

2-Paquet d'onde-Relation d'incertitude de Heisenberg

3-Evolution dans le temps d'un paquet d'onde

D-Particule dans un potentiel scalaire indépendant du temps

1-Marche de Potentiel

2-Barrière de potentiel: Onde évanescente-Effet Tunnel

Bref Historique-Introduction

- ◆ **Planck en 1900** postule que les échanges d'énergie entre matière et rayonnement ne se font pas de façon continue **mais par quantités discrètes et indivisibles appelées quanta**.
- ◆ **Einstein interpréta en 1904**, l'effet photoélectrique en considérant que le champ électromagnétique est un ensemble de particules lumineuses (**quanta de lumière ou photons**)
- ◆ **Compton en 1921**, compléta cette description en attribuant un **caractère corpusculaire** au **photons** en lui attribuant une énergie et aussi une impulsion.
- ◆ **Louis de Broglie en 1926** démontre que ***les corpuscules matériels peuvent avoir un aspect ondulatoire tout comme les photons***
- ◆ **Davisson et Germer (1927)** ont mis en évidence expérimentale l'aspect ondulatoire d'une particule (l'électron) **matérielle** comme il a été démontrée par de **L. de Broglie**.

Références:

Wien, Ann. Phys. 294, 662–669 (1896)

Rayleigh, Phil. Mag. 49, 539–540 (1900)

Planck M., Ann. Phys. 306, 719–737 (1900); Ann. Phys. 309, 553–563 (1901); Ann. Phys. 309, 564–566 (1901)

Einstein A. , Ann. Phys. 322, 132–148 (1905)

Jeans, J. H. Phil. Mag. 10, 91–98 (1905)

Lewis, G. N. The conservation of photons. Nature 118, 874–875 (1926)

A-Ondes électromagnétiques et photons

1-les quanta de lumière et les relations de Planck-Einstein

☐ Rayonnement du corps noir

◆ Définition :

un corps noir est un objet qui absorbe intégralement tous les rayonnements qui tombent à sa surface.

Exemples : Four ; Soleil; etc...

◆ Expérience:

➤ **Principe de l'expérience:** L'expérience consiste à chauffer un corps à une température T fixée. Le corps émet à priori des rayonnements à **toutes les longueurs d'ondes**. C'est le cas par exemple d'une cavité complètement fermée dans laquelle le rayonnement peut être absorbé intégralement après plusieurs réflexions. La cavité est percée d'un petit trou (Fig.1) afin d'établir l'équilibre entre émission et absorption.

➤ Observation:

- A une température donnée l'intensité émise par unité de temps augmente avec la fréquence jusqu'à atteindre un maximum avant de décroître et tendre vers zéro pour les hautes fréquences. **Cette décroissance, appelée catastrophe ultraviolette, qui est en total désaccord avec la théorie classique (Figures 2a; 2b et 2c).**
- **Déplacement de Wien :**

$$\lambda_{\max} T = cte = 0.2898 \text{ cm.K}$$

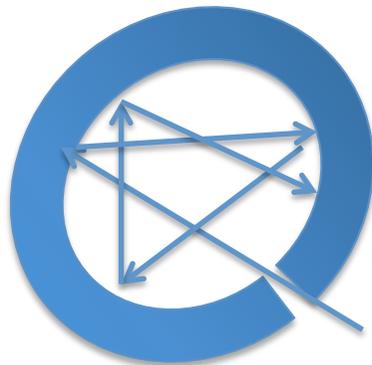


Fig. 1:Réalisation pratique d'un corps noir

Soleil:
T=5773K
 $\lambda_{\max} =$

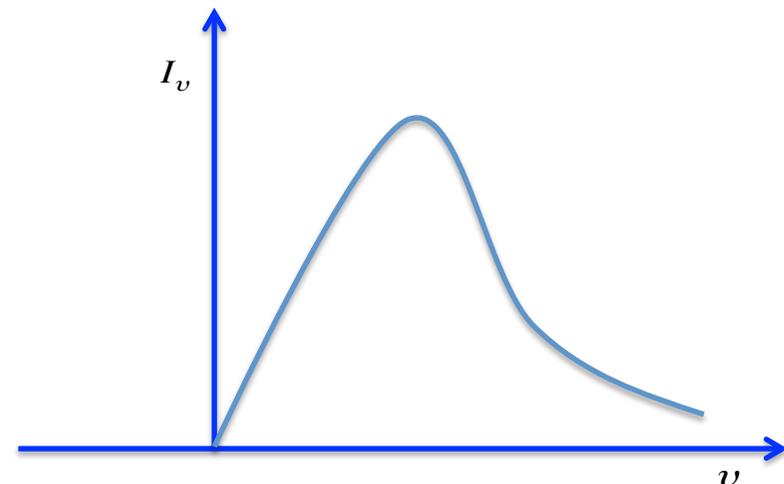


Fig. 2: La densité d'énergie rayonnée en fonction de la fréquence

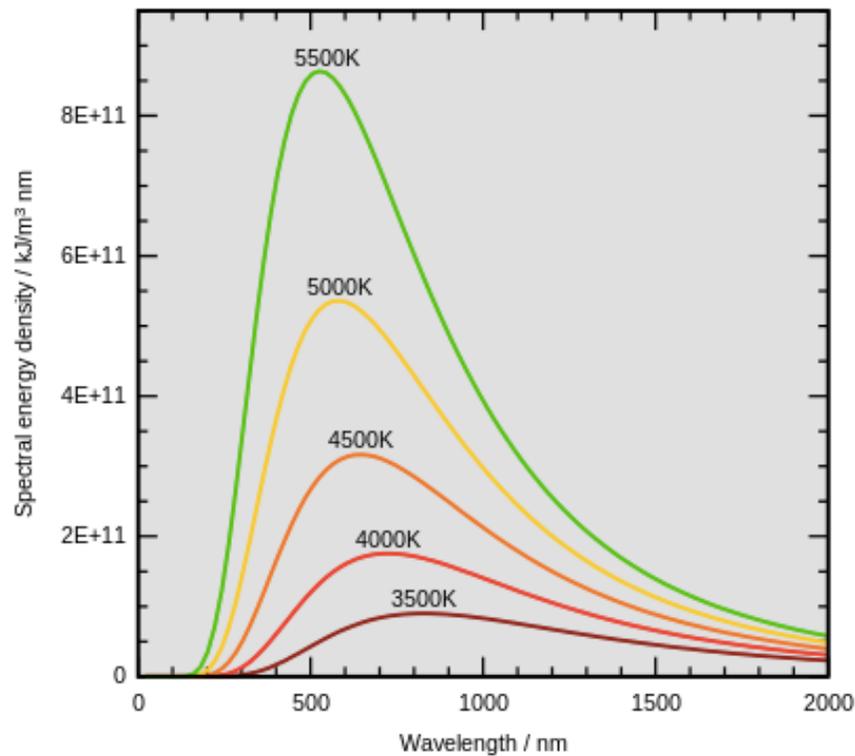


Fig. 2 b : La densité d'énergie rayonnée en fonction de la longueur d'onde pour différentes températures.

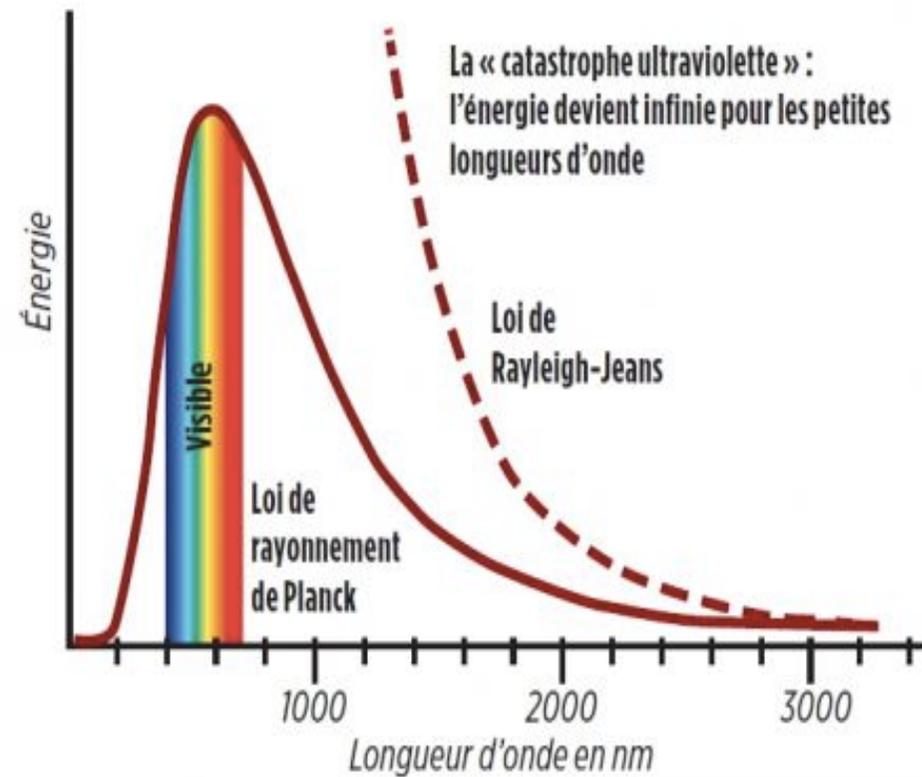


Fig. 2c: La densité d'énergie rayonnée en fonction de la longueur d'onde pour une température
- Catastrophe Ultraviolette -

◆ **Etude théorique**

L'intensité rayonnée est définie par: $I_\nu = \rho(\nu)\langle E \rangle$

$\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$: la densité de rayonnement émis de fréquence ν

$\langle E \rangle$: la valeur moyenne de l'énergie rayonnée

En 1900 Rayleigh supposa que les propriétés d'absorption et d'émission des rayonnements à l'intérieur du corps noir sont équivalentes à un ensemble d'oscillateurs harmoniques pouvant absorber ou émettre de la lumière dans toutes les longueurs d'ondes du rayonnement

◆ **En se basant sur les lois de la physique classique:**

D'où la loi de Rayleigh-Jeans

$$I_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} K_B T$$



$$\langle E \rangle = \frac{\int E e^{-\frac{E}{K_B T}} dE}{\int e^{-\frac{E}{K_B T}} dE} = K_B T$$

◆ **Quantification de Planck (1900)** $E_n = n\varepsilon$



$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} E_n e^{-\frac{E_n}{K_B T}}}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{E_n}{K_B T}}} = \frac{\varepsilon}{e^{-\frac{\varepsilon}{K_B T}} - 1}$$

$\varepsilon = h\nu$: Le quantum d'énergie associée au photon

Constante de Planck

$h = 6,626\ 07015 \times 10^{-34}$ kg m² s⁻¹ (ou J · s)

$$I_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{-\frac{h\nu}{K_B T}} - 1}$$

Relations de Planck-Einstein

avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

$$\begin{cases} E = h\nu = \hbar\omega \\ \vec{P} = \hbar\vec{k} \end{cases}$$

□ L'Effet Photoélectrique (1921)

Expérience:

L'expérience consiste à envoyer de la lumière sur une plaque métallique (cathode) et en plaçant une anode sous vide près de cette plaque (Figure 3), on peut détecter un courant sous des conditions bien précises.

Deux résultats surprenants:

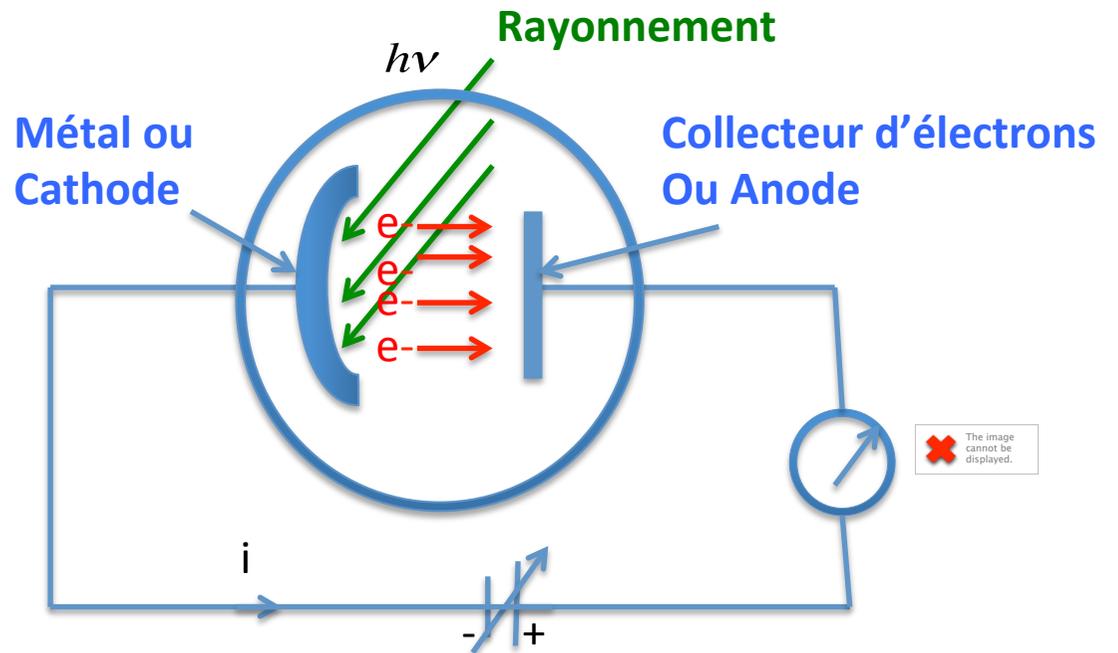
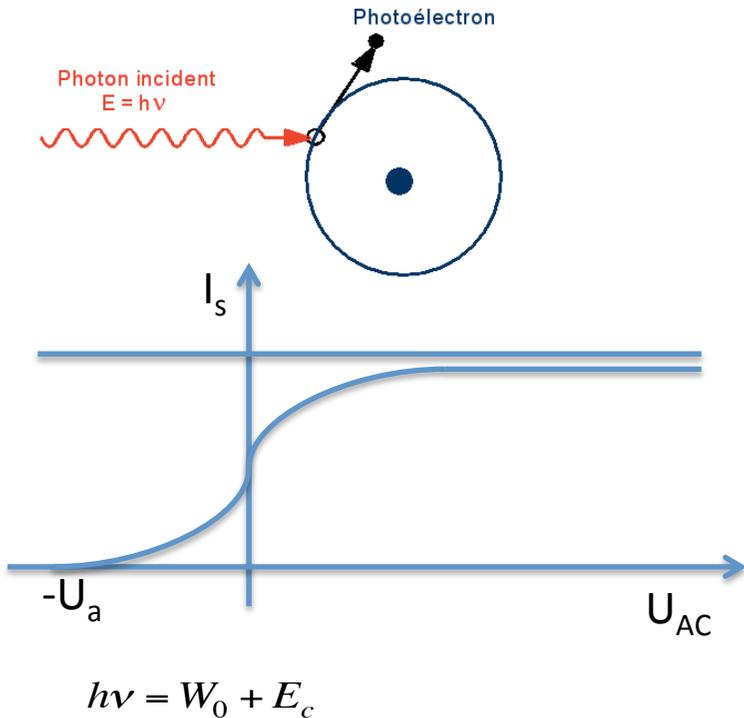
- ◆ L'intensité du rayonnement incident n'a aucun effet sur l'éjection des électrons de la plaque, c'est plutôt sa fréquence qui est pertinente. *En dessous d'une fréquence seuil du rayonnement incident, aucun électron n'est éjecté, même pour des fortes intensités.*
- ◆ Au-dessus de la fréquence seuil pour laquelle apparaît un courant, le nombre d'électrons détectés augmente, par contre *l'énergie cinétique des électrons émis ne dépend pas de l'intensité du rayonnement* (contrairement à la théorie classique qui prévoit que l'énergie cinétique augmente avec l'intensité du rayonnement).

Interprétation:

L'explication de l'effet photoélectrique est basée sur le concept corpusculaire de la lumière donné par **Albert Einstein en 1905**: *la lumière est transmise à la matière par paquets d'amplitude $h\nu$. Par conséquent un rayonnement de fréquence ν est considéré comme une assemblée de particules ayant chacune l'énergie $h\nu$ (quantum d'énergie)*. L'électron peut entièrement capter cette énergie pour quitter la plaque métallique.

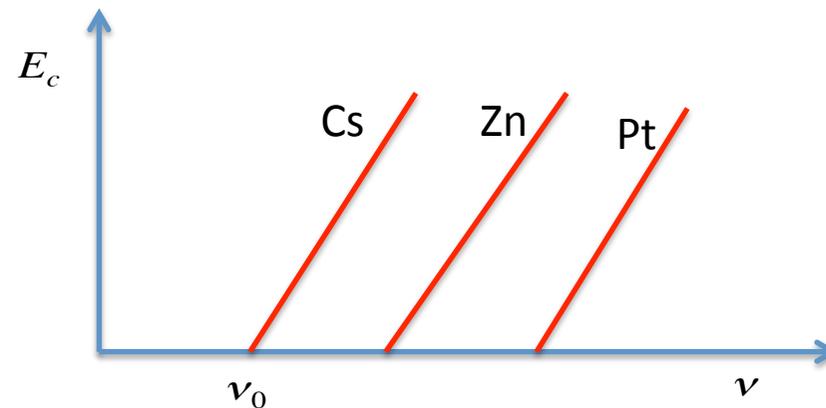
☐ Dans cette effet l'énergie du photon est totalement Transférée à un l'électron d'une couche interne de l'atome.

N.B: C'est un phénomène de faible énergie



The image cannot be displayed.

Cellule Photoélectrique



$W_0 = h\nu_0$: Energie d'extraction (l'énergie nécessaire pour extraire un électron du métal); Pour le Cesium $W_0 = 3.10^{-19} \text{ J}$

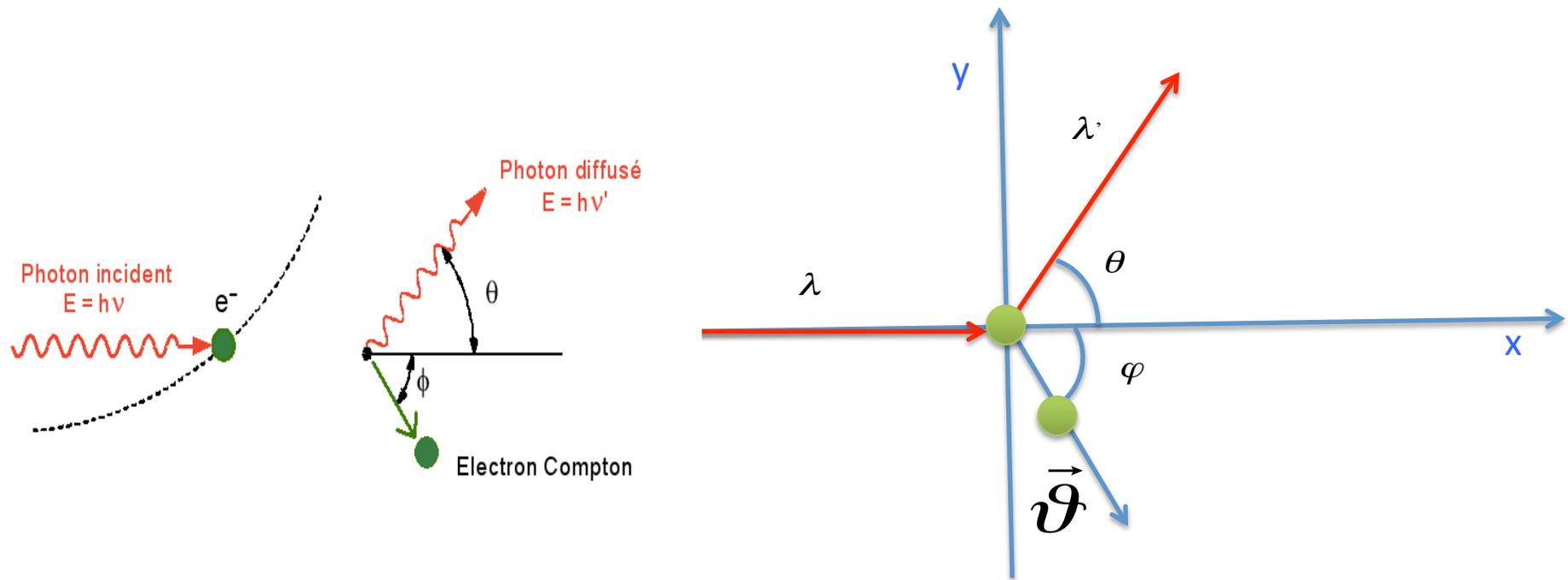
ν_0 : la fréquence seuil; caractéristique du métal en question.

E_c : Energie cinétique de l'électron dans la cathode

□ Effet Compton (1924)

Expérience: Elle consiste en la mise en évidence expérimentale de l'aspect corpusculaire individuel du photon. Il s'agit de bombarder l'électron par un photon de longueur d'onde λ . Dans cet effet l'énergie du photon est transférée partiellement à l'électron.

C'est un phénomène de moyenne énergie.



Conservation de la quantité de mouvement totale $\vec{P}_p + \vec{P}_e = \vec{P}'_p + \vec{P}'_e$

$$\vec{P}_p = \frac{h}{\lambda} \vec{e}_x \quad \vec{P}_e = \vec{0}$$

$$\vec{P}'_p = \frac{h}{\lambda'} (\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y)$$

$$\vec{P}'_e = \gamma m_e \vartheta (\cos\varphi \vec{e}_x - \sin\varphi \vec{e}_y)$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Conservation de l'énergie totale

$$E_p + E_e = E'_p + E'_e$$

$$E_p = P_p c = \frac{hc}{\lambda} ; \quad E'_p = \frac{hc}{\lambda'} ; \quad E_e = m_e c^2 ; \quad E'_e = \sqrt{(P'_e c)^2 + m_e^2 c^4}$$

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta)$$

où $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ est la longueur d'onde de Compton

❑ Dualité Ondes-Corpuscules

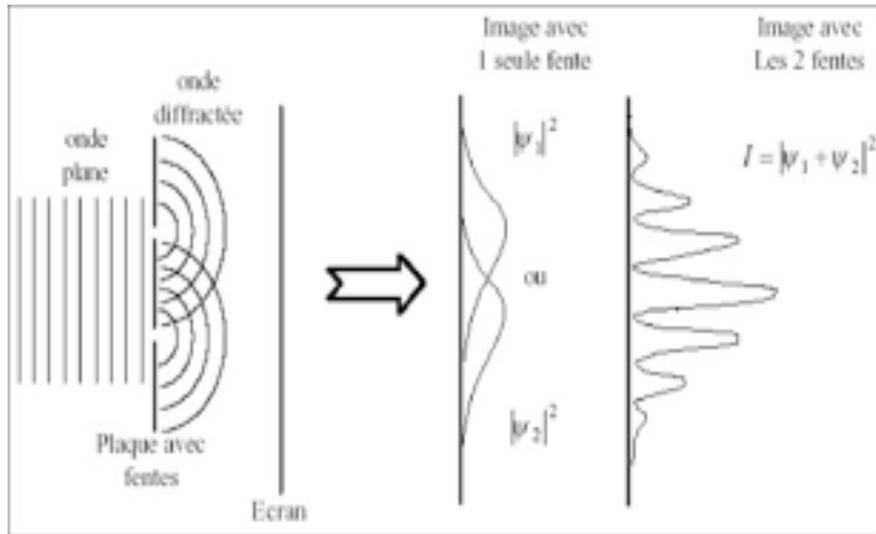
Dans ce paragraphe nous allons voir que *l'aspect corpusculaire (tout seul) de la lumière est incapable d'expliquer des phénomènes ondulatoires* observés dans des expériences d'interférences et de diffraction. Cependant une analyse complète des expériences basées essentiellement sur les fentes d'Young nous conduira à une conclusion importante portant sur le fait que *la lumière se comporte à la fois comme une onde et un corpuscule matériel (c'est la dualité Ondes-Corpuscule)*

Expérience des fentes d'Young : L'expérience est basée sur l'émission de la lumière monochromatique (*non polarisée*) par une source S sur une plaque opaque P percée de deux fentes fines F1 et F2 , éclairant l'écran E. Dans cette expérience on diminue l'intensité de la source pour les photons arrivent un par un sur la plaque et aussi sur l'écran.

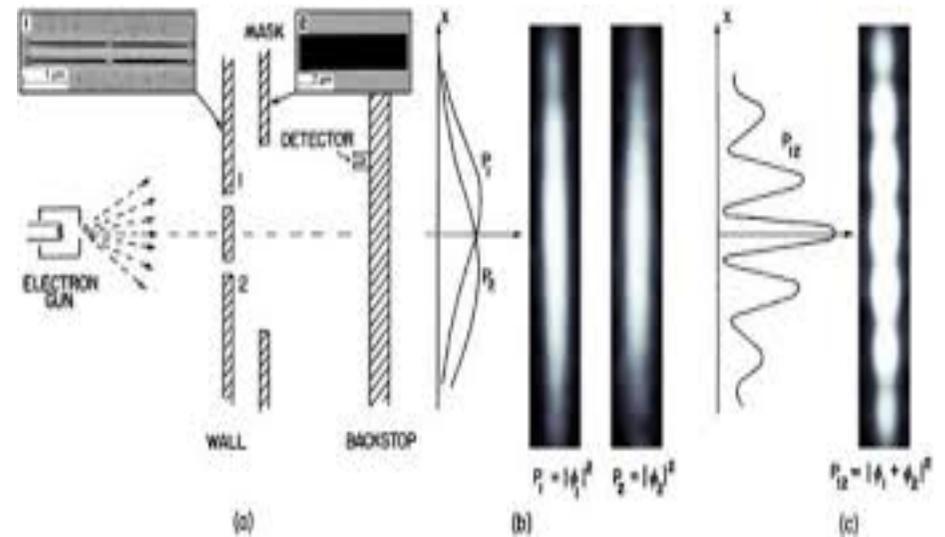
Résultats et Discussion

Si on ferme la fente F2, on observe sur l'écran l'intensité lumineuse $I_1(x)$ qui correspond au passage des photons par la fente F1. De même si l'on ferme la fente F1, on observe sur l'écran l'intensité lumineuse $I_2(x)$ qui correspond au passage des photons par la fente F2. Mais ce qui est surprenant c'est lorsque les deux fentes sont ouvertes à la fois, l'intensité lumineuse $I(x)$ ne correspond pas à la somme des deux intensités $I_1 + I_2$. En revanche on observe sur l'écran un système de franges d'interférences.

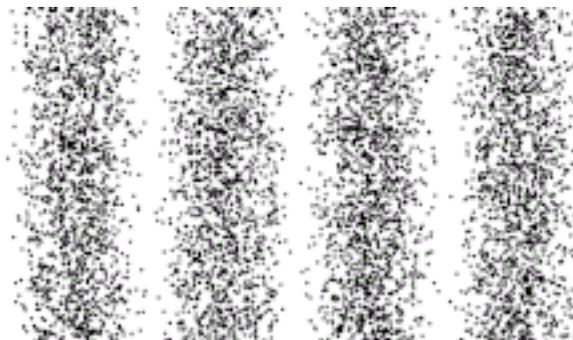
A noter que les franges d'interférences observées sur l'écran sont physiquement acceptables de point de vue théorie ondulatoire: L'intensité lumineuse est le carré de la somme des amplitudes des champs électriques E1 et E2 relatifs aux fentes F1 et F2.



Expérience des fentes Young montrant la figure d'interférences obtenue à l'aide des photons



Expérience des fentes Young montrant la figure d'interférences obtenue à l'aide des électrons



Franges d'interférences observées sur l'écran

Ceci est du au fait que lorsque les deux fentes sont ouvertes; le champ électrique total $E(x)$ en tout point x de l'écran :

$$E(x) = E_1(x) + E_2(x)$$

et donc $I = \|E(x)\|^2 = \|\vec{E}_1(x) + \vec{E}_2(x)\|^2$

Enfin c'est le terme d'interférence qui fait la différence entre $I(x)$ et $I_1(x)+I_2(x)$ qui est du au déphasage entre les deux champs E_1 et E_2

N.B: La théorie ondulatoire prévoit donc qu'une diminution de l'intensité de la source fait diminuer l'intensité des franges d'interférence. **En revanche ce n'est pas le cas.**

On peut conclure que lorsque la source émet les photons un par un, les prédictions corpusculaires et ondulatoires ne sont pas validées.

En effet:

- ◆ Si l'on dispose d'une plaque photographique sur l'écran; et si l'on augmente suffisamment le temps de pose de façon un grand nombre de photons pour chaque photographie, on constate que les franges n'ont pas disparu; ce qui rejette l'aspect purement corpusculaire selon laquelle les franges sont dues aux interactions entre photons.
- ◆ Si on expose la plaque photographique pendant un temps très court pour qu'elle puisse recevoir que quelques photons. On constate que chaque photon a un impact localisé et non un phénomène d'interférence. Ceci qui rejette l'aspect purement ondulatoire

A noter:

- ◆ Lorsqu'on effectue une mesure sur un système microscopique on le perturbe.
- ◆ On ne peut pas observer le phénomène d'interférence et de savoir au même temps par quelle fente est passé le photon. Pour résoudre ce paradoxe on doit rejeter catégoriquement l'idée à ce que *le photon passe forcément par une fente bien déterminée*.
- ◆ Lorsque les photons arrivent un par un sur l'écran ils reconstituent la figure d'interférence. Ce qui montre qu'on ne peut pas connaître à l'avance la position d'un photon sur l'écran; et pourtant ils sont tous émis dans les mêmes conditions. *Contrairement donc à la mécanique classique les conditions initiales ne permettent pas de déterminer avec certitude la trajectoire d'une particule à l'échelle quantique*. Par contre on peut estimer que la probabilité pour qu'un photon frappe l'écran sur une position x est proportionnelle à l'intensité $I(x)$. Chose qu'on peut généraliser à toute particule décrite par une fonction d'ondes.

En résumé la dualité ondes-corpuscules peut être schématisée comme suit:

- **Les aspects corpusculaires et ondulatoires sont inséparables: la lumière se comporte à la fois comme une onde et comme un ensemble de corpuscule; l'onde permettant de calculer la probabilité pour qu'un corpuscule se manifeste.**
- **Les prévisions sur le comportement d'une particule ne peuvent être que probabiliste**
- **L'information sur une particule est donnée par une fonction d'onde $\psi(\vec{r},t)$ (le champ $E(x,t)$ pour un photon)**
- *Notons **que la dualité ondes-corpuscules** pour laquelle photons et particules sont décrits par une fonction d'ondes contenant toutes les informations nécessaires sur le système qu'ils constituent **est à la base du développement de la physique quantique.***

B-Corpuscules Matériels et ondes de matière

1-Stabilité de l'atome- Modèle de Bohr

L'étude des spectres d'émission et d'absorption des atomes mit en évidence un fait fondamental que la physique classique ne permettait pas de comprendre: **un atome ne peut émettre ou absorber que des photons d'énergies bien déterminées**. Ceci ne peut être expliqué que par **la quantification de l'énergie (E_n) de l'atome**; ainsi le seul photon qui peut être émis ou absorbé par l'atome est celui qui a une fréquence $h\nu_{mn} = |E_m - E_n|$

Dans le cas de l'atome d'hydrogène $\Delta E = h\nu_{mn} = E_0 \left| \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right|$

Pour expliquer ce résultat; **Bohr** a considéré deux hypothèses fondamentales:

i-l'électron circuler dans des orbites circulaires bien déterminées

ii-le moment cinétique est quantifié: $m_e v a = n\hbar$; m_e est la masse de l'électron; v sa vitesse et a le rayon de l'orbite dans laquelle l'électron circule

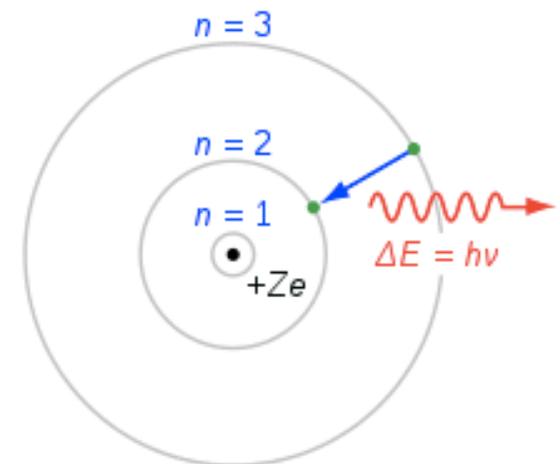
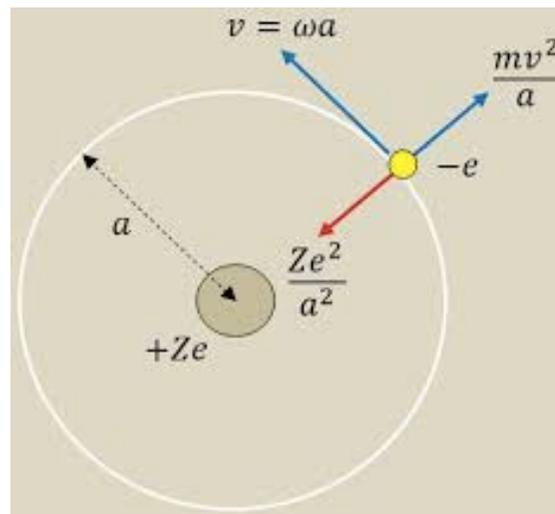
En appliquant le PFD appliqué à l'électron on trouve:

◆ **Les rayons des orbites permises**

$$a_n = n^2 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = n^2 a_0$$

◆ **Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène**

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{e^2}{a_0}$$



2-Les relations de Louis de Broglie

En réalité l'existence de tels niveau d'énergie discrets a été confirmé par Frank et Hertz. Bohr la modélisait en termes d'orbites privilégiées. Mais l'origine physique des règles de quantifications introduites par Bohr et Sommerfeld restait mystérieuse. Ces règles de quantifications ont été retrouvées par Louis de Broglie en 1923 à l'aide de son hypothèse fondamentale qui dit que **les corpuscules matériels peuvent avoir un aspect ondulatoire tout comme les photons**. Ladite hypothèse a été validée par Davisson et Germer en 1927 qui ont confirmé à travers l'expérience de diffraction des électrons **en montrant que des figures d'interférences peuvent avoir lieu avec des corpuscules (électrons)**.

Donc à tout corpuscule matériel d'énergie E et d'impulsion \vec{P} , on fait correspondre une onde dont la pulsation $\omega = 2\pi\nu$ et le vecteur d'onde \vec{k} sont donnés par les mêmes relations que pour les photons:

$$\begin{cases} E = h\nu = \hbar\omega \\ \vec{P} = \hbar\vec{k} \end{cases}$$

Ainsi la longueur de **L. de Broglie** est définie par:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|} = \frac{h}{\|\vec{P}\|}$$

Remarque: La très petite valeurs de h rend difficile la mise en évidence le caractère ondulatoire d'un corpuscule matériel.

2-Fonction d'onde. Equation de Schrödinger

Suivant hypothèse de L. de Broglie toute particule matérielle peut être décrite par une onde et donc une fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$. **Cette fonction d'onde est interprétée comme étant l'amplitude de probabilité de présence de la particule.** Ainsi la probabilité de trouver à l'instant t la particule dans volume élémentaire d^3r situé au point r est proportionnelle à ce volume. Cette probabilité est infinitésimale :

$$dP(\vec{r}, t) = \|\psi(\vec{r}, t)\|^2 d^3\vec{r}$$

$$\int_{\text{espace}} dP(\vec{r}, t) = \int_{\text{espace}} \|\psi(\vec{r}, t)\|^2 d^3\vec{r} = 1$$

Où $\|\psi(\vec{r}, t)\|^2 = \frac{dP(\vec{r}, t)}{d^3\vec{r}}$ est la densité de probabilité.

Notons que la fonction d'onde doit être une fonction continue en tout point de l'espace

D'un autre coté la fonction d'onde associée à une particule de masse m plongée dans un potentiel $V(r)$ est gouvernée par l'équation de Schrödinger suivante:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r)\right)\psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t)$$