Université Mohammed V **Année universitaire 2020-2021**
Faculté des Sciences **SMP4**

Travaux dirigés de mécanique quantique I
Série 1

I-Longueurs d'ondes associées à des corpuscules

A l'aide de la relation de L. de Broglie, calculer les longueurs d'onde associées aux corpuscules suivants :

a-Un grain de poussière, de diamètre 1μ, de masse $m \approx 10^{-15} kg$ et de vitesse $v \approx 1 mm/s$. Interpréter le résultat obtenu.

b- Un neutron thermique (de masse $m_n \approx 1.67 \times 10^{-27} kg$), ayant une vitesse de l'ordre de l'énergie moyenne d'agitation thermique à la température absolue T=300 K ; la constante de Boltzmann $k \cong 1.38 \times 10^{-23} Joule/degré$. Comparer le résultat obtenu aux longueurs d'onde des rayons X.

c- Un Faisceau d'électrons dont l'énergie égale à :

i- $E \approx 1.6 \times 10^{-19} Joule$ (non relativiste)

ii-1GeV (relativiste)

II- L'effet photoélectrique-

Exercice 1 : L'énergie d'un photon nécessaire à l'éjection d'un électron de métal est donnée par la formule : $h\nu = W + \frac{mv^2}{2}$; où h étant la constante de Planck,ν- la fréquence de la lumière incidente, v- la vitesse d'un électron sorti (non relativiste) et W- le travail d'extraction.

On dispose d'une photocathode au césium éclairée par une lumière monochromatique.

1. La longueur d'onde seuil pour le césium est $\lambda_0 = 0.66$ µm. Déterminer le travail d'extraction W_0 d'un électron.
2. La lumière qui éclaire cette photocathode a une longueur d'onde $\lambda = 0.44$ µm.
   a- Déterminer l'énergie cinétique maximale d'un électron émis par la cathode.
   b- déterminer la vitesse de cet électron.
   c- Déterminer la tension d'arrêt dans ces conditions.

N.B : La constante de Planck $h=6,62607004 \times 10^{-34}$ m^2 kg / s et la charge de electron $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C

Exercice 2 : Un faisceau éclaire une cathode d'une cellule photoélectrique. Le seuil de cette cathode au césium vaut $f_0 = 4.54\ 10^{14}$Hz et son rendement quantique vaut r = 0.05. On a $U_{AC} = V_A - V_C$.

1. Donner l'allure de la caractéristique $I = f(U_{AC})$.
2. Calculer le travail d'extraction W_0 en eV et la vitesse d'un électron sortant de la cathode si la longueur d'onde de rayonnement émis est $\lambda = 500$ nm.
3. Calculer la vitesse d'un électron lorsqu'il atteint l'anode si U = 100 V.

Exercice 3 On dispose d'une cellule photoélectrique au potassium dont le travail d'extraction est W_0 = 2.2 eV.

On détermine pour cette cellule, la tension d'arrêt en fonction de diverses fréquences d'éclairage. On obtient les résultats suivants : (On a indiqué dans le tableau la valeur absolue de la tension d'arrêt).

ν (Hz)	$7.00\ 10^{14}$	$8.00\ 10^{14}$	$9.00\ 10^{14}$
$\lvert U_0\rvert$ (V)	0.69	1.10	1.52

1. Tracer la courbe $\nu = f(\lvert U_0\rvert)$ et conclure.
2. En déduire la valeur du seuil photoélectrique de cette photocathode. Ce résultat est –il en accord avec la valeur de W_0 ?
3. Déterminer la valeur de la constante de Planck (h) à partir de la courbe réalisée. Cette valeur correspond-elle à la valeur admise ?

III- l'Effet Compton

On considère la diffusion d'un photon sur un électron (voir figure). Cette diffusion se traduit par l'échange d'une partie de l'énergie entre le photon et l'électron. Elle se comporte comme le choc relativiste élastique des deux particules. On désigne par λ la longueur d'onde du photon et v la vitesse de l'électron avant le choc et par λ' et v' la longueur d'onde et la vitesse de l'électron après le choc.

1-Etablir la relation entre λ, λ', v, θ et θ'

2-Etudier le cas particulier de l'électron immobile.

3-Calculer l'angle de déviation φ de l'électron après le choc en fonction de λ et θ

IV-Paquet d'onde

A-Superposition d'un nombre fini d'ondes planes

On considère un paquet d'onde $\psi(x,t=0)$ défini, à l'instant t=0, par la superposition de trois ondes planes de la forme $\frac{g(k)}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$ de vecteurs d'onde k_0, $k_0-\frac{\Delta k}{2}$ et $k_0+\frac{\Delta k}{2}$; et leurs amplitudes sont proportionnelles respectivement à 1, 1/2, 1/2. Où $g(k)$ est une fonction régulière dont le module présente un maximum en $k=k_0$ et la largeur à mi hauteur a pour valeur Δk

1-Montrer que $\psi(x,t=0)$ s'écrit:

$$\psi(x,t=0)=\frac{g(k_0)}{\sqrt{2\pi}}e^{ik_0x}\left[1+\cos(\frac{\Delta k}{2}x)\right]$$

2- Etablir la condition pour laquelle l'interférence entre les différentes ondes planes devient complètement destructive. En déduire la relation entre Δk et la largeur Δx, définie comme étant la distance entre deux zéros de $\|\psi(x,t=0)\|$.

B-Superposition d'un nombre infini d'ondes planes

On considère le paquet $\psi(x,t=0)$ d'ondes général dont la forme résulte d'un phénomène d'interférences :

$$\psi(x,t=0)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(k)e^{ikx}dk\ .$$

On pose $g(k)=|g(k)|e^{i\alpha(k)}$ où $\alpha(k)$ est une constante réelle.

1-Supposons que $\alpha(k)$ varie de façon régulière dans l'intervalle $\left[k_0-\frac{\Delta k}{2}, k_0+\frac{\Delta k}{2}\right]$ dans lequel g(k) est appréciable. Montrer que pour Δk suffisamment petit $\psi(x,t=0)$ s'écrit :

$$\psi(x,t=0)=e^{i(k_0x+\alpha(k_0))}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(k)|e^{i(k-k_0)(x-x_0)}dk$$

Où x_0 est une constante à déterminer.

2-En déduire la position x_M du centre du paquet d'ondes. Retrouver ce résultat à partir de la condition de la phase stationnaire.

3-Montrer que lorsque x s'écarte de x_0 la décroissance de l'amplitude $|\psi(x,t=0)|$ devient appréciable lorsque $\Delta k.\Delta x\geq 1$. En déduire la relation d'incertitude de Heisenberg.

C-Evolution dans le temps d'un paquet d'ondes libre

Considérons le paquet d'ondes de la partie A mais cette fois ci à l'instant.

1-Montrer que le paquet d'ondes à l'instant t s'écrit : $\psi(x,t)=\frac{g(k_0)}{\sqrt{2\pi}}e^{ik_0(x-\omega_0t)}\left[1+\cos(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t)\right]$

Où $\omega_0=\frac{\hbar k_0^2}{2m}$

2-Calculer le centre $x_M(t)$ du paquet d'ondes à l'instant t. En déduire la vitesse du groupe du paquet.

C-Paquet d'ondes gaussien

Considérons une particule libre dont la fonction d'onde à l'instant t=0 s'écrit:

$$\psi(x,t=0)=\frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2} e^{ikx} dk$$

1-Calculer à t=0 la densité de probabilité $|\psi(x,t=0)|^2$, à l'instant t=0, de la particule au point x. Montrer que

$\Delta x.\Delta p = \frac{\hbar}{2}$

2-Donner l'expression $|\psi(x,t)|$. En déduire $\Delta x(t).\Delta p(t)$.

3-Etudier l'étalement du paquet d'ondes

IV- Particule dans des potentiels carrés à une dimension

1-Montrer que les états stationnaires d'une particule de masse m, plongée dans un potentiel carré $V(x)$ sont définis par : $(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)-E)\varphi(x)=0$

2-Etudier le comportement des états stationnaires $\varphi(x)$ d'une particule de masse m, en mouvement dans un potentiel carré $V(x)$ dans les différents cas suivants :

a-Marche de potentiel : $V(x)=\begin{cases}0 \ ; x \le 0 \\ V_0; \ x>0\end{cases}$; b-Barrières de potentiel : $V(x)=\begin{cases}V_0; \ 0<x<a \\ 0; \text{ ailleurs}\end{cases}$

c-Puits carré de profondeur finie $V(x)=\begin{cases}-V_0; \ -\frac{a}{2}<x<+\frac{a}{2} \\ 0; \text{ ailleurs}\end{cases}$; d-Puits infiniment profond: $V(x)=\begin{cases}0; \ 0<x<a \\ \infty; \text{ ailleurs}\end{cases}$

d- $V(x)=a\delta(x)$; $a<0$ (potentiel attractif) ; $\delta(x)$ est la distribution de Dirac, définie par

$\delta(x)=\begin{cases}0; \ x\ne 0 \\ \infty; \ x=0\end{cases}$ tel que $\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-\alpha)=f(\alpha)\end{cases}$