THEORIE DES LANGAGES & COMPILATION

Parie I: Langages réguliers & Automates + Analyse lexicale.
Partie II: Compilation: Grammaires, Analyse syntaxique, Sémantique.
Intervenants:
M. CHABBAR : Cours partie I + 2 gr.TD (pendant 7 semaines)
M. RAHMANI : Cours partie II + 2 gr.TD(les 7 semaines qui suivent)
M. BOUHDADI : 4 gr. TD (semestre)

Préliminaires Mathématiques

- Relation binaire sur un ensemble E

→ R est une relation sur E si $R \subseteq E \times E$

Notation: $(a,b) \in R$, (a R b ou R(a,b))

→ Opérations ensemblistes sur les relations:

Complément, union, intersection, inclusion

(Ex. $(a,b) \in \overline{R} \Leftrightarrow (a,b) \notin R$)

→ Fonction Vs Relation

($f : E \rightarrow F$ ou $f \subseteq E \times F$)

→ Autres opérations sur les relations

Soit R une relation binaire sur E ($R \subseteq E \times E$).

- $R^{-1} = \{(b,a) \in E \times E \ / \ (a,b) \in R\}$
- $R(a) = \{ b \in E \ / \ (a,b) \in R \}$

→ Produit de deux relations binaires

R_1 et R_2 deux relations binaires sur E

$(a,c) \in (R_1 . R_2) \Leftrightarrow$

$$\exists\, b \in E : (a,b) \in R_1 \text{ et } (b,c) \in R_2$$

Notation: $R^2 = R . R$

$R^n = R . R \ldots R$ (produit n fois)

→ Relations particulières

- relation identité Id_E :

$\forall$ a,b $\in$ E , $(a,b) \in Id_E \Leftrightarrow a = b$

- relation vide $\varnothing_E$:

$\forall$ a,b $\in$ E , $(a,b) \notin \varnothing_E$

- relation pleine : Π_E

$\forall$ a,b $\in$ E , $(a,b) \in \Pi_E$

→ Propriétés d'une relation R

- ✓ R est réflexive si :

  $\forall\, a \in E\ ,\ (a,a) \in R\ \ (\text{i.e. } Id_E \subseteq R\ )$

- ✓ R est symétrique si :

  $\forall\, a,b \in E\ ,\ (a,b) \in R\ \Rightarrow (b,a) \in R$

  $(\text{ i.e. }\ R = R^{-1}\ )$

- ✓ R est anti-symétrique si :

  $\forall\, a,b \in E\ ,\ (a,b) \in R \text{ et } (b,a) \in R \Rightarrow a = b$

- ✓ R est transitive si : $\forall\, a,b,c \in E\ ,$

  $(a,b) \in R \text{ et } (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

  $(\text{i.e. } \forall\, n \geq 1\ ,\ \ R^n \subseteq R)$

✓ <u>Relation d'ordre partiel</u>

R est un ordre partiel si

R est réflexive, antisymétrique et transitive

Ex. la relation $\subseteq$ est d'ordre partiel sur $\wp(E)$

✓ <u>Relation d'ordre total</u> (ou linéaire)

R est un ordre total si

$\forall$ a,b $\in$ E , (a,b) $\in$ R ou (b,a) $\in$ R

Remarque: si R une fonction on dit que R est totale si elle est partout définie.

→Fermeture d'une relation par une propriété

Définition

Soit R une relation binaire sur E et soir P une propriété.

La fermeture de R par P est la plus petite relation qui vérifie P et qui contient R.

✓ Fermeture réflexive de R , notée r(R):

$$r(R) = R \cup Id_E$$

✓ Fermeture transitive de R , notée R^+

$$R^+ = \cup_{n \geq 1} R^n$$

✓ Fermeture réflexive et transitive de R (notée R*)

$$R^* = \cup_{n \geq 0} R^n \quad \text{où} \quad R^0 = Id_E$$

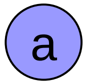
→ Relation d'équivalence

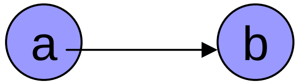
- ✓ R est une relation d'équivalence si
  R est réflexive, symétrique et transitive.
- ✓ classe d'équivalence: $\overline{x}$ (ou [x]), $x \in E$
  $\overline{x} = \{y \in E \,/\, (x,y) \in R\}$
- ✓ deux classes sont soit égales soit disjointes
- ✓ l'ensemble des classes forment une partition de E
- ✓ Ensemble quotient $E_{/R} = \{\overline{x},\ x \in E\}$
- ✓ indice de R = nombre de classes = card ($E_{/R}$)
- ✓ si R1 et R2 sont deux relations d'éq. Sur E alors $R1 \subseteq R2 \Rightarrow \text{indice}(R1) \geq \text{indice}(R2)$

→ Graphe dune relation binaire sur E

E ensemble fini non vide t.q. card(E) = n

✓ G = (E , R) est un graphe ($R \subseteq E \times E$) où
les éléments de E sont appelés <u>sommets</u>
et les couples de R sont appelés <u>arcs</u>.

✓ un sommet est représenté par un cercle 

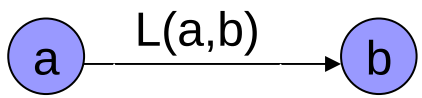
✓ un arc (a,b) se représente par : 

✓ si on code les sommets de E par des entiers 1,…n alors G peut être représenté par :

- une matrice carrée M(m_{ij} = 1 si $(i,j) \in R$ et 0 sinon)

ou – liste chaînée (tableau de listes) si la matrice est creuse

- ✓ Chemin d'un graphe G ::
  toute suite de sommets $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ t.q.
  $(x_i\ ,\ x_{i+1}) \in R\ ,\ \forall\ i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$
- ✓ longueur d'un chemin =
  nombre d'arcs du chemin
- ✓ un arc est un chemin de longueur 1
- ✓ Graphe étiqueté G = (E, R, L) où
  $L : E \times E \rightarrow F$
  (F est généralement IN ou IR)
  $\forall\ (a,b) \in E$, si $(a,b) \in R$ alors L(a,b) est l'étiquette (ou poids) de l'arc (a,b)



Une des implémentations de G, dans ce cas :

$m_{ij} = L(i,j)$ si $(i,j) \in R$ et 0 (∞ ou autre) sinon

- Monoïde (semi groupe)

L'ensemble E est muni d'une loi notée Θ

Θ : $E \times E \rightarrow E \quad (\Theta \equiv R)$

- ✓ Θ est associative si : $\forall\, x, y, z \in E$

  $\Theta(\Theta(x,y),z) = \Theta(x, \Theta(y,z))$

- ✓ Élément neutre e :

  $\forall\, x \in E, \quad \Theta(e,x) = \Theta(x,e)$

- ✓ (E, Θ) est un monoïde si la loi Θ est associative et admet un élément neutre.

Ex. (IN,+) , ens. des relations binaires sur E muni de la loi produit (ou composé) est un monoïde où Id_E est l'élément neutre.

→ **Monoïde libre**

Soit (E, Θ) un monoïde et soit A une partie de E ($A \subseteq E$).

- ✓ (A, Θ) est un monoïde (ss monoïde de E)
- ✓ A est une partie génératrice de E si

  $\forall\, y \in E$ on a :

  ou bien $y = e$

  ou bien $\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ t.q.

  $$y = x_1 \Theta\, x_2 \Theta \ldots \Theta\, x_n \quad (1)$$

- ✓ A est une partie génératrice **minimale** de E

  si l'écriture (1) de y est unique i.e. $\exists!\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ t.q.

  $$y = x_1 \Theta\, x_2 \Theta \ldots \Theta\, x_n$$

  Dans ce cas, A est appelé **code**.

  Ex. l'ensemble des chiffres {0, 1, …,9} est un code pour les entiers naturels pour la loi 'concaténation'.

- ✓ Le plus petit ss monoïde de E qui contient A est notée A* où

  $A^* = \cup_{n \geq 0} A^n$ avec $A^i = A \Theta A \Theta \ldots \Theta A$ (i fois) et $A^0 = \{e\}$

- ✓ Si A est code alors (A^*, Θ) est un monoïde libre.

→ Congruence

- ✓ Une relation d'équivalence R définie sur E muni d'une loi interne Θ est une <u>congruence</u> si R est compatible avec la loi Θ.

- ✓ Le quotient E /R sera muni de la loi [Θ] définie par :

$$[x]\ [\Theta]\ [y] = [x\ \Theta\ y]$$

L'opération [Θ] est bien définie et ne dépend pas des représentants des classes d'équivalence.

Pour simplifier, la loi [Θ] sera notée simplement Θ.

Remarque : Dans ce cours, on prendra pour la loi Θ la concaténation et pour R une fonction de transition, une dérivation ou toute autre relation.