Algèbre de Boole

Introduction

Plan

- Définition
- Introduction
- Fonctions logiques (ET, OU, NON)
- Règles de l'Algèbre de Boole
- Théorème de De Morgan
- Simplification des fonctions logiques

Définition

- Définit en 1847 par Georges Boole (1815-1864), physicien Anglais
  - Algèbre applicable au raisonnement logique qui traite des fonctions à variables binaires (deux valeurs).
  - Ne s'applique pas aux systèmes à plus de deux états d'équilibre.
  - Permet d'étudier les circuits logiques (un système logique sert à modifier des signaux).

INTRODUCTION

- L'algèbre de Boole permet de manipuler des valeurs logiques
  - Une valeur logique n'a que deux états possibles :
    - ➔ Vraie(1) ou Fausse(0).
  - Plusieurs valeurs logiques peuvent être combinées pour donner un résultat qui est lui aussi une valeur logique
- Exemple :
  - Vrai faux
  - Ouvert fermé
  - Avant arrière

Introduction

- **La manipulation des valeurs logiques repose sur 3 fonctions (ou opérateurs) logiques de base:**
  - **ET, OU, NON**
    - **A et B; A ou B; non A**
- La variable logique est une grandeur qui peut prendre 2 valeurs qui sont repérées habituellement 0 ou 1.
  - ➔ Se note par une lettre comme en algèbre
- **Toutes les fonctions logiques sont formées des 3 fonctions de base**

Fonction logique

- Résultat de la combinaison (logique combinatoire) d'une ou plusieurs variables logiques reliées entre elles par des opérations logique de base :
  - la valeur résultante (**O** ou **1**) de cette fonction dépend de la valeur des variables logiques.
  - Une fonction logique possède une ou des **variables logiques d'entrée** et une **variable logique de sortie**.

    Cette fonction logique se note par une lettre comme en algèbre.
  - Exemple F = (A et B) ou C et (non D)

Fonctions Logiques

- Les fonctions logiques peuvent être représentées par des **Tables de vérités**
- La table de vérité permet la connaissance de la sortie (d'un circuit logique) en fonction des diverses combinaisons des valeurs des entrées
  - **Le nombre de colonnes est le nombre total d'entrées et de sorties**
  - **Pour "N" entrées, le nombre de lignes nécessaire est d'ordre 2^N**
- **Exemple:**

  Une fonction de 3 entrées et 1 sortie se représente par une table de 4 colonnes et 8 lignes

Table de vérité (exemples)

- 3 entrées et 1 sortie
- 4colonnes et 8 lignes

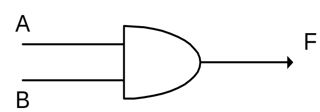
A	B	C	Résultat
0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$
0	1	0	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$
0	1	1	$\overline{A}\,B\,C$
1	0	0	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$
1	0	1	$A\,\overline{B}\,C$
1	1	0	$A\,B\,\overline{C}$
1	1	1	$A\,B\,C$

Fonction logique ET (AND)

- Représentation:
  F = A * B ou A • B ou AB

Table de vérité

Entrée		Sortie
B	A	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



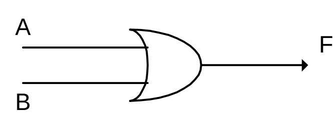
Symbole graphique

Fonction logique OU (OR)

- Représentation:
  F = A + B

Table de vérité

Entrée		Sortie
B	A	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



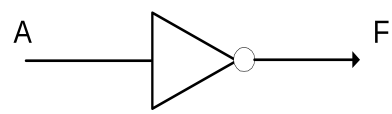
Symbole graphique

Fonction logique NON (NOT)

- Représentation:
  $F = \overline{A}$

Table de vérité

Entrée	*Sortie*
A	F
0	1
1	0



Symbole graphique

Règles (ou propriétés) de l'algèbre de Boole

Fermeture	Si A et B sont des variables booléennes, alors A+B, AB sont aussi des variables booléennes
Commutativité	$A + B = B + A$ $A \bullet B = B \bullet A$
Associativité	$A + (B + C) = (A + B) + C$ $A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$
Distributivité	ET / OU $A(B + C) = AB + AC$ OU / ET $A + (BC) = (A + B)(A + C)$
Idempotence	$A + A = A$ $A \bullet A = A$
Complémentarité	$A + \overline{A} = 1$ $A \bullet \overline{A} = 0$
Identités remarquables	$1 + A = 1$ $1 \bullet A = A$ $0 + A = A$ $0 \bullet A = 0$
Distributivité interne	$A + (B + C) = (A + B) + (A + C)$ $A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet (A \bullet C)$

Théorème de De Morgan

- $\overline{A+B}=\overline{A}.\overline{B}$

Vérification :

A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}.\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Equivalent

- $\overline{A.B}=\overline{A}+\overline{B}$

Vérification :

A	B	$\overline{A.B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Equivalent

Simplification des fonctions logiques

- Pourquoi ?
  - Utiliser le moins de composants possibles
  - Simplifier au maximum le schéma de câblage

    Il faut donc trouver la forme minimale de l 'expression logique considérée

- Deux méthodes
  - **Algébrique** (en utilisant des propriétés et des théorèmes)
  - **Graphique** (tableaux de Karnaught; ...)

Exemple

$$S=A.B.C + A.\overline{B}.(\overline{\overline{A}.\overline{C}})$$

- <u>Transformation</u>

  $S=A.B.C + A.\overline{B}.(A+C)$

  $=A.B.C + A.\overline{B}.A+A.\overline{B}.C$

  $= A.B.C + A.\overline{B}+A.\overline{B}.C$

- <u>Variables communes</u>

  $S=A.\overline{B} + A.C.(B+\overline{B})$

  $=A.\overline{B} + A.C$

  $\boxed{=A.(\overline{B}+C)}$

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

$$A.B+\overline{A}.B$$

$$(A+B).(\overline{A}+\overline{B})$$

$$\overline{\overline{A}.B+\overline{\overline{A}+B}}$$

Correction 1

$$A.B+\bar{A}.B=(A+\bar{A}).B=1.B=B$$

$$(A+B).(\bar{A}+\bar{B})=A.\bar{A}+B.\bar{A}+A.\bar{B}+B.\bar{B}=B.\bar{A}+A.\bar{B}$$

$$\overline{\bar{A}.B+\overline{\bar{A}+B}} = \overline{\bar{A}.B}.(\bar{A}+B)=(A+\bar{B}).(\bar{A}+B)=A.B+\bar{A}.\bar{B}$$

Exercice 2

Prouver les théorèmes d ’absorption :

$A.(A + B) = A$

$A+ \bar{A}.B = A+ B$

$A.(\bar{A}+ B)= A.B$

$A.B + \bar{A}.C + B.C = A.B + \bar{A}.C$

Correction

- $A.(A+B) = A.A+A.B=A+A.B=A.(1+B)=A$

- $A+ \bar{A}.B = A+ B$ car :

$A+B=(A+B).(A+\bar{A})=A+A.B+\bar{A}.B=A.(1+B)+\bar{A}.B=A+\bar{A}.B$

- $A.(\bar{A}+ B)= A.B$ car :

$A.(\bar{A}+ B)= A.\bar{A}+A.B=A.B$

- $A.B + \bar{A}.C + B.C = A.B + \bar{A}.C$ car :

$A.B + \bar{A}.C + B.C= A.B + \bar{A}.C + B.C.(A+\bar{A})=$
$A.B+\bar{A}.C+A.B.C+\bar{A}.B.C=A.B.(1+C)+\bar{A}.C.(1+B)=A.B+\bar{A}.C$

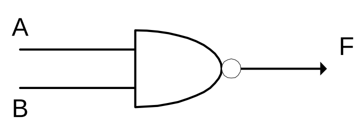
Fonction logique NON-ET (NAND)

- Représentation:

  $F = \overline{A * B}$

Table de vérité

Entrée		*Sortie*
B	A	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Symbole graphique

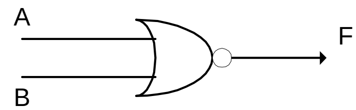
Fonction logique NON-OU (NOR)

- Représentation:

  $F = \overline{A + B}$

Table de vérité

Entrée		*Sortie*
B	A	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Symbole graphique

Fonction OU-EXCLUSIF (XOR)

- Représentation:

  $F = A \oplus B$

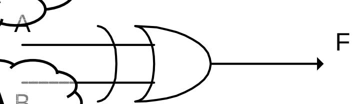
/B*A+B*/A

Table de vérité

Entrée		*Sortie*
B	A	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

/B*A

B*/A



Symbole graphique

Fonction NON OU-EXCLUSIF (XNOR)

- Représentation:

  $F = \overline{A \oplus B}$

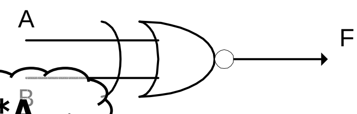
/B*/A+B*A

Table de vérité

Entrée		*Sortie*
B	A	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

/B*/A

B*A



Symbole graphique

Table de Karnaugh

- Représentation de la table de vérité sous forme graphique.

- Nombre de cases = nombre de lignes de la table de vérité.
  - Multiple de 2^n (1, 2, 4, 8, 16, ...)
    - n = Nombre d 'entrées

Table de Karnaugh

- Avec n = 2:
  - Entrées B et A
  - 4 cases

B \ A	0	1
0	0	1
1	2	3

Table de Karnaugh

- Avec n = 3:
  - Entrées C, B et A
  - 8 cases

C \ BA	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Table de Karnaugh

- Avec n = 4:
  - Entrées D, C, B et A
  - 16 cases

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Exemple (Karnaugh)

Entrées			Sortie
C	B	A	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

TABLE DE VÉRITÉ

C \ BA	00	01	11	10
0	0 (0)	0 (1)	1 (3)	1 (2)
1	0 (4)	1 (5)	0 (7)	1 (6)

TABLE DE KARNAUGH

Table de Karnaugh

- À partir de la table, on simplifie en groupant les 1 adjacents.
- Les 1 adjacents sont mis en évidence par l'ordre utilisé pour former la table
- La taille d'un groupe est un multiple de 2^k (1, 2, 4, 8, ...).
- Le groupe est soit rectangulaire ou carré.

Table de Karnaugh

- Former les plus gros groupes possibles.
  - Termes plus simples.
- Un 1 peut faire partie de plusieurs groupes.

Exemple (Karnaugh)

- Les 1 des bords extrêmes sont adjacents.
  - La table se referme sur elle même.

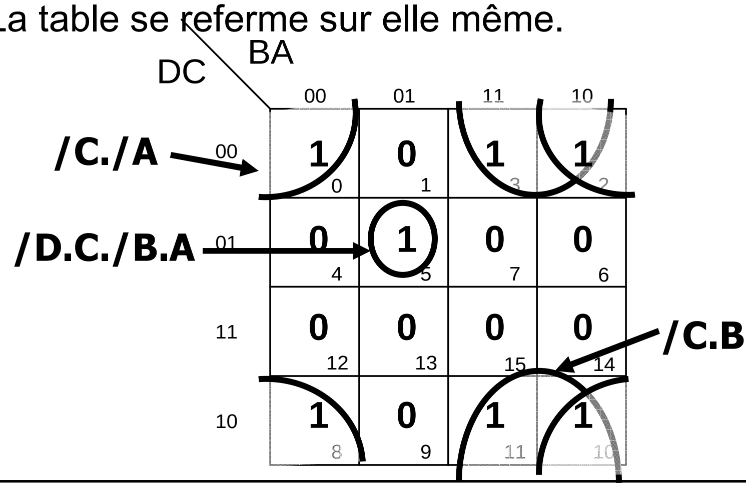


Table de Karnaugh

- À partir de la table, on simplifie en groupant les 1 adjacents.
- Les 1 adjacents sont mis en évidence par l'ordre utilisé pour former la table
- La taille d'un groupe est un multiple de 2^k (1, 2, 4, 8, ...).
- Le groupe est soit rectangulaire ou carré.