

Introduction aux Equations aux Dérivées Partielles (EDP) - Partie 2.

ALLA Abdellah

Département de Mathématiques.
Faculté des Sciences de Rabat. Université Mohammed V,
Maroc.

**Master Mathématiques et Applications
Printemps 2017.**

Plan du cours

- 1 Formulation variationnelle des problèmes aux limites elliptiques
- 2 Approximation par la méthode des éléments finis
- 3 Problème d'évolution
- 4 Discrétisation en temps

Références



G. Allaire : "Analyse numérique et optimisation". Éditions de l'école polytechnique, Octobre 2012.



P.A. Raviart, J.M. Thomas : "Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles". Paris, 1983.

Préambule

Ce document constitue les notes de la deuxième partie du cours "Introduction aux Equations aux Dérivées Partielles (EDP)" destiné aux étudiants de la première année du Master "Mathématiques et Applications" de la Faculté des Sciences de Rabat - Université Mohammed V. Il s'agit ici d'exposer les bases de la méthode des éléments finis et de l'illustrer sur des exemples très simples. Une mise en œuvre de la méthode à été programmée à l'aide d'un logiciel de calcul scientifique et du logiciel libre FreeFEM++ (biensûr sans entrer dans le détail du fonctionnement de ce dernier) développé à l'Université Paris VI.

Par ailleurs, en complément de ce cours, j'ai opté pour les deux rapports suivants :



S. Bounejmate, S. Bouyahya : "Résolution d'équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis". Projet Tutoré sous l'encadrement de A. Alla, 52 pages, 2015.



B. Nadir, H. Zitouni : "La théta-méthode pour la résolution numérique d'un problème parabolique". Projet Tutoré sous l'encadrement de A. Alla, 69 pages, 2016.

Le lecteur curieux est invité à consulter les excellents ouvrages présentés dans la bibliographie. Les figures des pages 34, 35, 43, 44 et 47 sont empruntées à une présentation du Pr. S. Fliss.

Formulation variationnelle des problèmes modèles

Exemple 1 : Problème de Dirichlet homogène

Chercher u , telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1)$$

⇓

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega), \text{ telle que :} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2)$$

Pour obtenir cette formulation :

- u "assez régulière"
- considérer une fonction v "assez régulière"
- multiplier l'équation (1) par v , intégrer sur Ω
- utiliser la formule de Green
- Introduire les conditions aux limites
- Considérer la régularité minimale de u et v pour que la FV soit bien définie

⇒ Permet de définir l'espace fonctionnel avec lequel nous allons travailler.

Formulation variationnelle des problèmes modèles

Exemple 2 : Problème de Neumann

Pour f donnée dans $L^2(\Omega)$, g donnée dans $L^2(\Gamma)$, chercher u solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3)$$



$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega), \text{ telle que :} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma} g v \, ds \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (4)$$

Problème variationnel abstrait

Nous allons décrire un cadre abstrait où rentre les formulation variationnelles précédentes.

On se donne :

- V est un espace de Hilbert munit de la norme $\|\cdot\|_V$.
- $a : (u, v) \mapsto a(u, v)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times V$, ie :
$$\exists M > 0, \quad \forall u \in V, \quad \forall v \in V, \quad a(u, v) < M \|u\|_V \|v\|_V.$$
- $L : v \mapsto L(v)$ une forme linéaire continue sur V , ie : $L \in V'$ (où $V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ ensemble des formes linéaires continues)

Le problème variationnel général s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V, \text{ solution de :} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (5)$$

Problème variationnel abstrait

Définition

On dit que le problème (5) est bien posé s'il admet une solution et une seule et si on a la propriété de stabilité suivante :

$$\exists c > 0, \quad \forall L \in V', \quad \|u\|_V < c \|L\|_{V'}.$$

Théorème de Lax-Milgram

Supposons que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est V -elliptique, c-à-d :

$$\exists \alpha > 0, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Alors le problème (5) est bien posé et nous avons :

$$\forall L \in V', \quad \|u\|_V < \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V'}.$$

Démonstration : ...

Problème variationnel abstrait

Dans le cas particulier où la forme bilinéaire est symétrique et définie positive, le problème s'interprète comme un problème d'optimisation :

Théorème :

Soit V un espace de Hilbert, $a(.,.) \in \mathcal{L}(V \times V; \mathbb{R})$ et $L \in V'$. Supposons que $a(.,.)$ est symétrique et définie positive

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V, \quad a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Alors u est solution du problème (5) si et seulement si u minimise sur V la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \quad \forall v \in V.$$

Démonstration : ...

Problème variationnel abstrait

Il arrive que dans les formulations variationnelles les fonctions tests ne soient pas de même nature que la solution. Dans de telles situations nous avons deux espaces de Hilbert W et V et le problème abstrait a la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in W, \text{ solution de :} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (6)$$

où $a(u, v)$ est une forme bilinéaire continue sur $W \times V$.

Théorème de Nečas

Soient W et V deux espaces de Hilbert, $a(.,.) \in \mathcal{L}(W \times V, \mathbb{R})$ et $L \in V'$. Le problème (6) est bien posé **si et seulement si** :

- il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\inf_{w \in W} \sup_{v \in V} \frac{a(w, v)}{\|w\|_W \|v\|_V} \geq \beta > 0,$$

- on a :

$$\forall v \in V, (\forall w \in W, a(w, v) = 0) \implies (v = 0).$$

Dans ces conditions, nous avons l'estimation

$$\forall L \in V', \quad \|u\|_W < \frac{1}{\beta} \|L\|_{V'}.$$

Démonstration : Voir le livre de V. Girault - P.A. Raviart : "Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations (Theory and algorithms)". Chap.I-page 58.

Introduction

On se place dans le cadre abstrait suivant :

- V est un espace de Hilbert munit de norme $\|\cdot\|$
- $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire sur V , continue et V -elliptique
- $L(\cdot)$ une forme linéaire et continue sur V

Soit u la solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (7)$$

- V est un espace de dimension **infinie**
- Dans les applications, généralement, impossible de calculer exactement la solution exacte.

Méthode d'approximation

Pour définir le **problème approché** :

- Nous considérons un espace de dimension **finie** $V_h \subset V$
- Nous considérons alors le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h, \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (8)$$

qui n'est rien d'autre qu'un système d'équations linéaires. La matrice associée est :

- symétrique si $a(., .)$ est symétrique,
- définie positive grâce à la V -ellipticité.
- Si $V_h \not\subset V$:
 - Il faut vérifier la V_h -ellipticité qui n'est plus déduite de celle dans V
 - il faudra souvent considérer de nouvelles formes $a_h(., .)$ et $L_h(., .)$,
 - et le problème devient

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h, \text{ tel que :} \\ a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (9)$$

Approximation Interne

Cadre du théorème de Lax-Milgram :
Soit u la solution du problème continu (P)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \end{array} \right.$$

Nous allons décrire ici la méthode générale d'approximation interne du problème (P).
On se donne un sous-espace V_h de V , de dimension finie $N(h)$ et dépendant d'un paramètre $h > 0$ destiné à tendre vers 0.
On définit alors le problème approché (P_h) par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h, \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{array} \right.$$

Approximation Interne

Théorème :

Le problème (P_h) admet une solution unique $u_h \in V_h$

Démonstration : ...

Examinons l'erreur commise lorsqu'on passe du problème (P) au problème (P_h) .

Théorème : (Lemme de Céa)

Nous avons la majoration

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|. \quad (10)$$

Démonstration : ...

Approximation Interne

Proposition :

Supposons que a est symétrique. Alors l'estimation est meilleure

$$\|u - u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|. \quad (11)$$

Sachant que $\frac{M}{\alpha} \geq 1$.

Convergence de la méthode

Comme première conséquence de ce théorème, nous avons le résultat général de convergence suivant.

Théorème :

Supposons qu'il existe un sous-espace \mathcal{V} de V dense dans V et une application $r_h : \mathcal{V} \rightarrow V_h$ telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \|r_h v - v\| = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}$. Alors nous avons la convergence, i.e. $\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\| = 0$.

Démonstration : ...

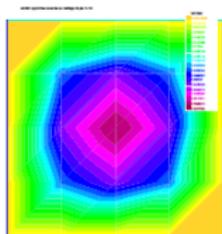
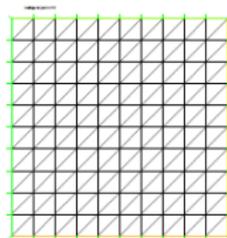
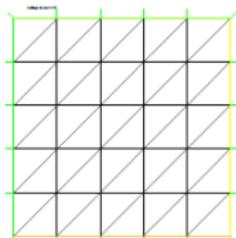
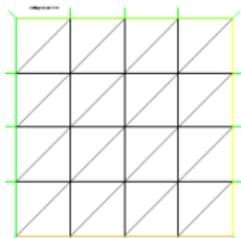
Définition : Vitesse de convergence

On dit que l'approximation converge à l'ordre k ($k \in \mathbb{R}$, $k > 0$), **si et seulement si**

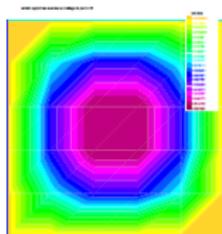
$$\exists C > 0 \quad \|u - u_h\| \leq C h^k$$

Etude de l'ordre de convergence : Maillages raffinés et solutions approchées

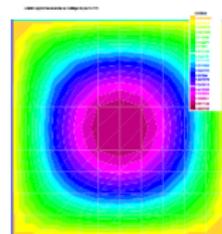
Exemple 1 : $u(x, y) = xy(x - 1)(y - 1)$ et $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$



$h = 1/4$

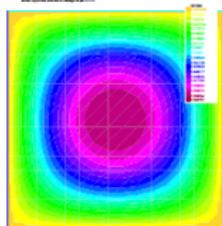
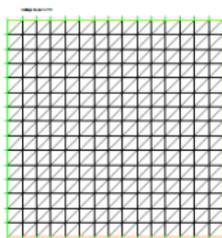


$h = 1/5$

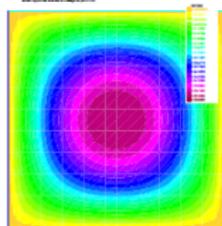
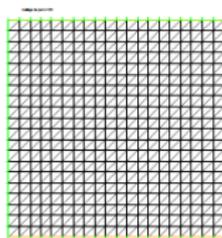


$h = 1/10$

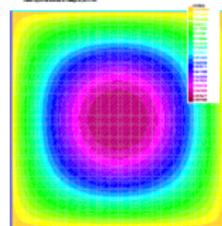
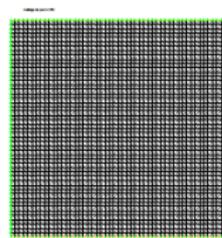
Etude de l'ordre de convergence : Maillages raffinés et solutions approchées



$h = 1/15$

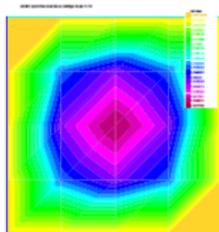


$h = 1/20$

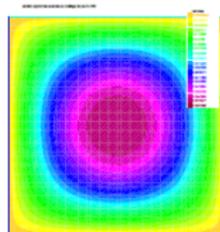


$h = 1/50$

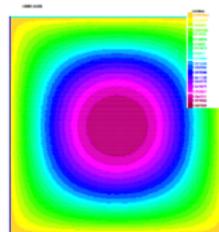
Etude de l'ordre de convergence : Maillages raffinés et solutions approchées



$h = 1/4$

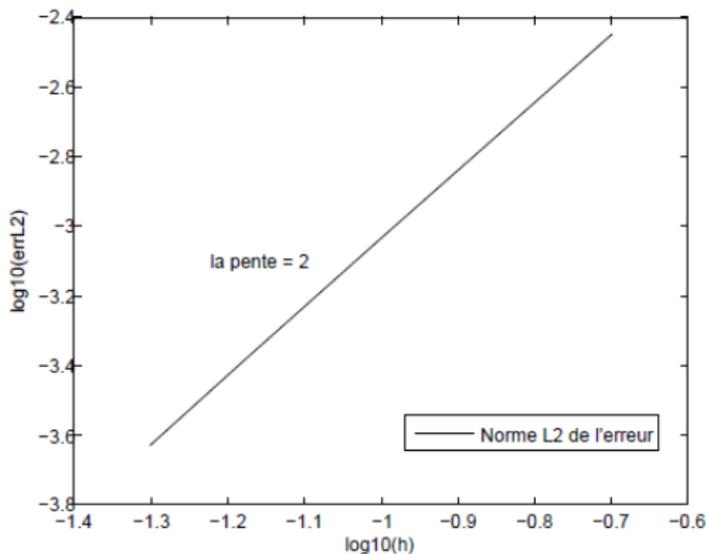


$h = 1/50$



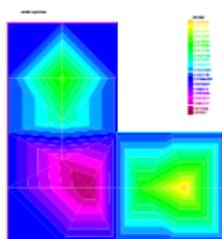
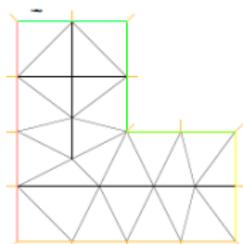
solution exacte

Ordre de convergence

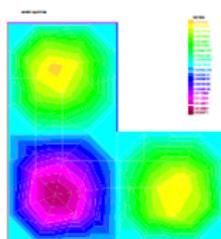
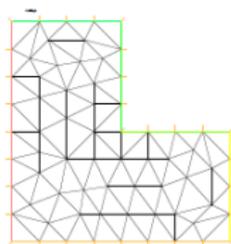


Etude de l'ordre de convergence : Maillages raffinés et solutions approchées

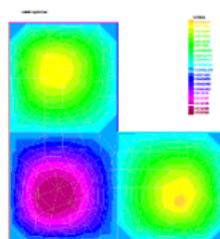
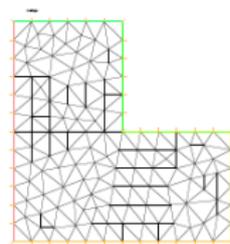
Exemple 2 : $u(x, y) = xy(x - \frac{1}{2})(x - 1)(y - \frac{1}{2})(y - 1)$ et $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[-]\frac{1}{2}, 1[\times]\frac{1}{2}, 1[$



$h \approx 1/4$

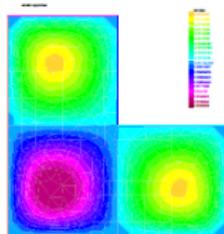
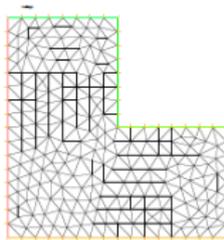


$h \approx 1/8$

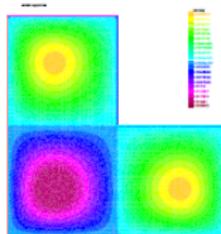
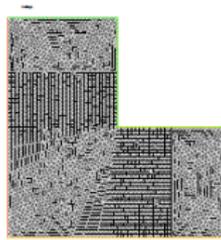


$h \approx 1/12$

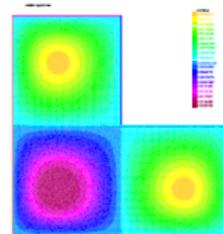
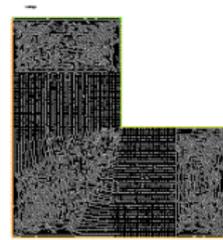
Etude de l'ordre de convergence : Maillages raffinés et solutions approchées



$h \approx 1/16$

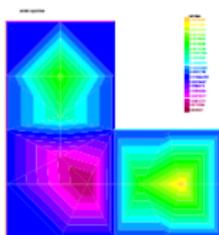


$h \approx 1/60$

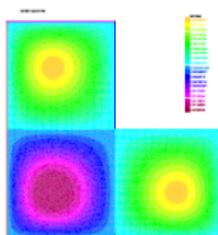


$h \approx 1/100$

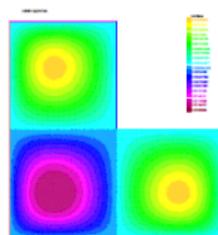
Etude de l'ordre de convergence : Maillages raffinés et solutions approchées



$h \approx 1/4$

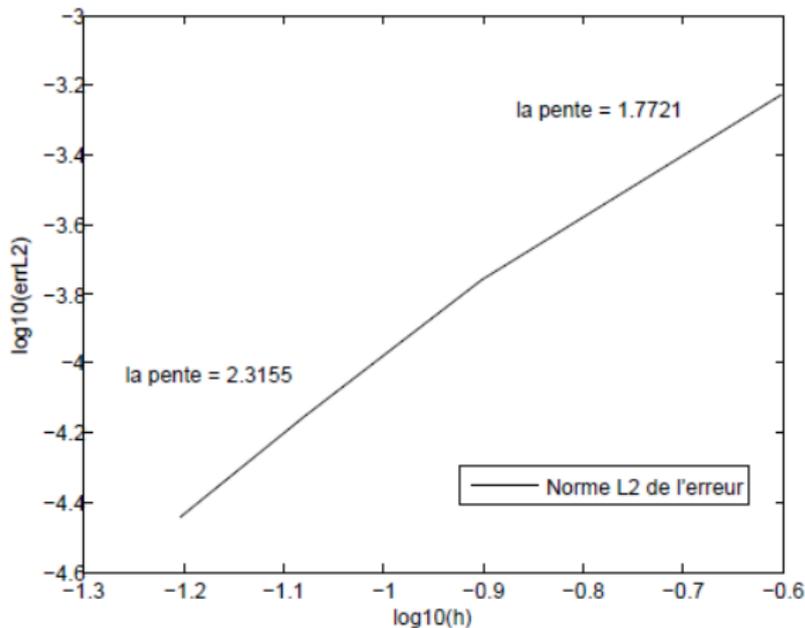


$h \approx 1/100$



solution exacte

Ordre de convergence



Résolution

Soit $N = \dim(V_h)$ et (w_1, \dots, w_N) une base de V_h . On cherche u_h tq : $u_h = \sum_{j=1}^N u_j w_j$.

Proposition :

La résolution du problème (P_h) se ramène à la résolution du système linéaire

$$AX = b,$$

avec

$$A = (a_{ij}) \in R^{N \times N}, \quad a_{ij} = a(w_i, w_j),$$

$$b = (b_i) \in R^N, \quad b_i = L(w_i),$$

$$X = (u_i) \in R^N.$$

Fonctions "Chapeaux"

Les Fonctions "Chapeaux" sont données par :

$$w_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (12)$$

Proposition :

Les fonctions $(w_j)_{1 \leq j \leq N-1}$ forment une base de V_h .

Proposition :

On a $a_{ij} = 0$ pour $|i - j| \geq 2$.

Exemple : Éléments finis en 1D

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & x \in \Omega =]\alpha, \beta[\\ u(\alpha) = u(\beta) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

- L'espace, Maillage uniforme, L'espace d'approximation.

Proposition :

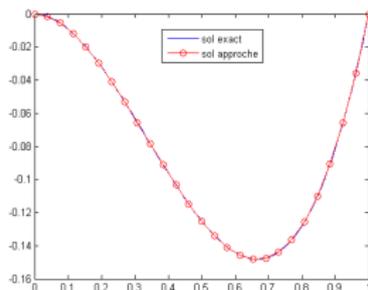
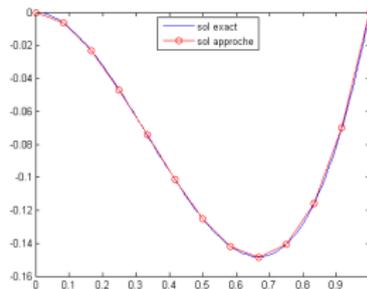
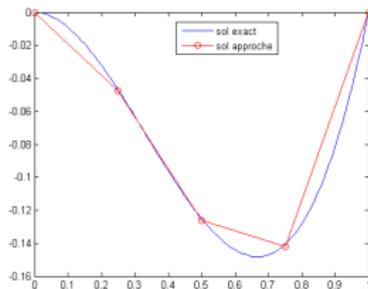
$$V_h \subset H_0^1([\alpha, \beta]).$$

Exercice :

Ecrire le système linéaire obtenu par l'approximation éléments finis de type P_1 du problème (13).

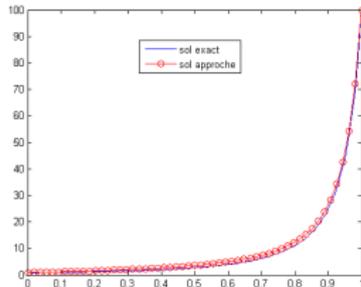
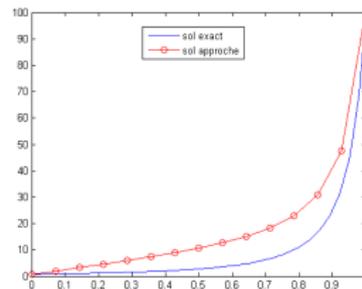
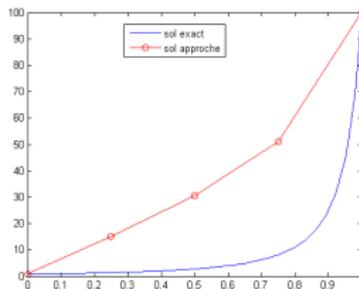
Influence du raffinement $P1$

Exemple 1 : $u(x) = x^2(x - 1)$ et $\Omega =]0, 1[$



Influence du raffinement $P1$

Exemple 2 : $u(x) = (x - 1.1)^{-2}$ et $\Omega =]0, 1[$



Exercices

Exercice 1 :

Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{pour } x \in]0, 1[, \\ u'(0) - u(0) = 0, \quad u'(1) = -1. \end{cases} \quad (14)$$

- 1 Donner une formulation faible du problème ? y-a-t-il existence et unicité des solutions faibles de (14) ?
- 2 Ecrire une discrétisation par éléments finis P_1 pour un maillage non uniforme.
- 3 Ecrire le système linéaire obtenu.

Exercices

Exercice 2 :

Soit $f \in L^2(]0, 1[)$. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) - u'(x) + u(x) = f(x) & \text{pour } x \in]0, 1[, \\ u(0) + u'(0) = 0, u(1) = 1. \end{cases} \quad (15)$$

- 1 Donner une formulation faible du problème ? y-a-t-il existence et unicité des solutions faibles de (15) ?
- 2 Ecrire une discrétisation par éléments finis P_1 pour un maillage non uniforme.
- 3 Ecrire le système linéaire obtenu.

Éléments finis en 2D

Exemple d'application

Dans un domaine Ω , on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (16)$$

La formulation variationnelle continue est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V, \text{ telle que :} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (17)$$

où :

- $V = H^1(\Omega)$
- $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} u v \, dx$
- $L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$

Eléments finis en 2D

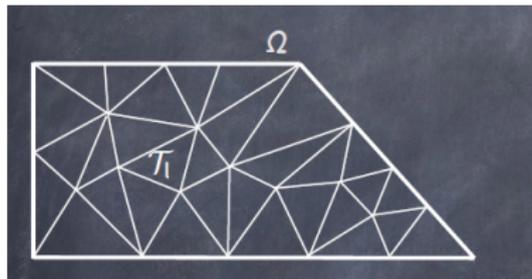
Maillage

Définition :

Soit Ω un ouvert polygonal borné de \mathbf{R}^2 . Un maillage de Ω est défini par un nombre fini de mailles notées T_l , qui seront des triangles. On a :

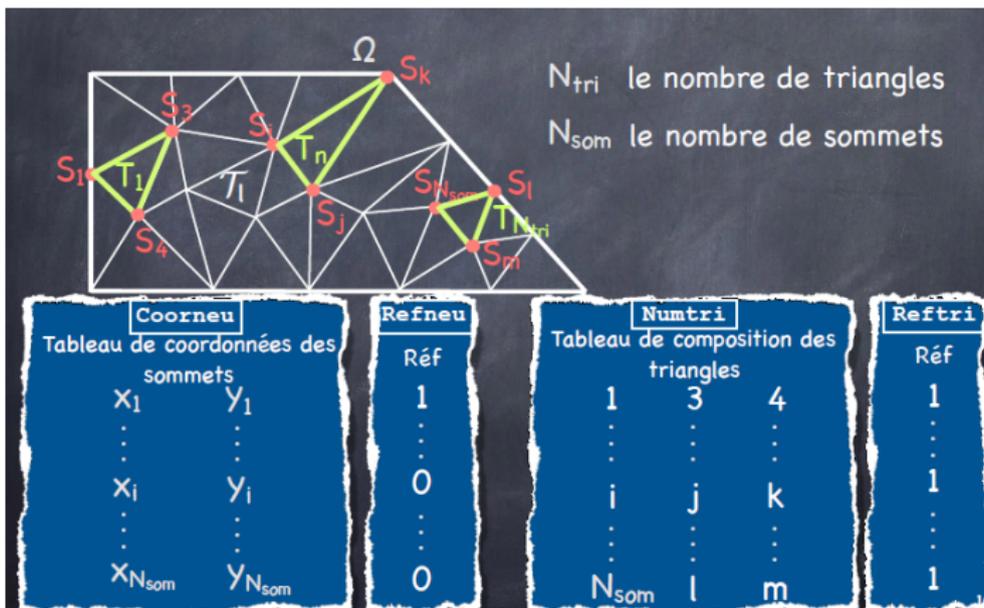
- $\bar{\Omega} = \overline{\bigcup_l T_l}$.
- $T_l \cap T_{l'} = \emptyset$ pour $l \neq l'$.
- $\bar{T}_l \cap \bar{T}_{l'}$ est soit le vide, soit égal à un sommet, soit égal à une face complète.

Nous dirons que c'est un **maillage conforme** et on parlera de **triangulation**.



Eléments finis en 2D

Structure maillage



Éléments finis en 2D

Problème approché

La formulation variationnelle approchée (ou le problème approché) est donné par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h, \text{ telle que :} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (18)$$

où :

- $V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in \mathbb{P}_1, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$
- $a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h \, dx + \int_{\Omega} u_h v_h \, dx$
- $L(v_h) = \int_{\Omega} f v_h \, dx$

Eléments finis en 2D

Ecriture Matricielle

Le problème (18) s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$A U = L$$

où :

- $A = K + M$
 - $K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla w_j \nabla w_i \, dx$
 - $M_{ij} = \int_{\Omega} w_j w_i \, dx$
 - $L_i = \int_{\Omega} f w_i \, dx$
 - $U_i = u_i$ où on a décomposé $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i w_i$
- (w_1, \dots, w_{N_h}) est une base de V_h et $\dim A = N_h$.

Éléments finis en 2D

Espace d'approximation

On pose :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), (v_h)|_{T_k} \in P_1 \quad \forall T_k \in \mathcal{T}_h\}$$

avec

$$P_1 = \{p, \quad p(x, y) = a + bx + cy\}.$$

On posera aussi :

$$V_h^0 = \{v_h \in V_h, v_h = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\}$$

Théorème :

$$V_h \subset H^1(\Omega).$$

Démonstration :

Montrer que $v \in V_h$ a une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$.

Soit $w \in L^2(\Omega)$, $w_j|_T = \left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)|_T$. Formule de Green, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

Eléments finis en 2D

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(- \int_T \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \varphi(x) dx + \int_{\partial T} \varphi(x) v(x) n_{T,j} d\gamma(x) \right).$$

v est continue sur Ω . On pose $T_1 \cap T_2 = L$ une arête de \mathcal{T}_h . Nous avons $v|_{T_1} = v|_{T_2}$ sur L et $n_{T_1} = -n_{T_2}$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx &= - \int_{\Omega} \varphi(x) w_j(x) dx + \sum_L \int_L (v|_{T_1} - v|_{T_2}) \varphi n_{T_1} d\gamma(x) \\ &= - \int_{\Omega} \varphi(x) w_j(x) dx. \end{aligned}$$

qui est finie, donc

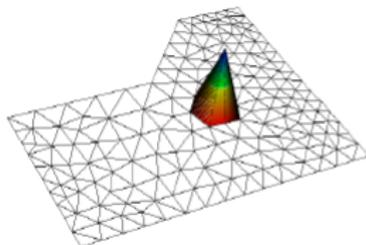
$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = w_j \in L^2(\Omega).$$

Éléments finis en 2D

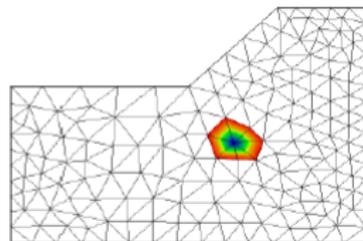
Définition :

w_j fonction de base associées au sommet S_j :

$$w_j(S_j) = \delta_{ij}.$$



Fonction de base *chapeau*.



Support de la fonction de base.

Eléments finis en 2D

Lemme :

- La fonction w_j est un élément de V_h .
- L'ensemble $(w_j)_{1 \leq j \leq N}$ forme une base V_h .
- la dimension de V_h est égal au nombre de noeuds (sommets) du maillage.
- Support de $w_j =$ union des triangles ayant le noeud S_j pour sommet.

Éléments finis en 2D

Considérons un triangle $T = T_k$ donné, noté $S_1 S_2 S_3$.

Théorème :

Il existe un unique polynôme de P_1 prenant les valeurs fixées aux sommets de T .

Système linéaire :

$$a + bx_i + cy_i = \alpha_i, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Le déterminant du système :

$$\Delta = 2|T| > 0.$$

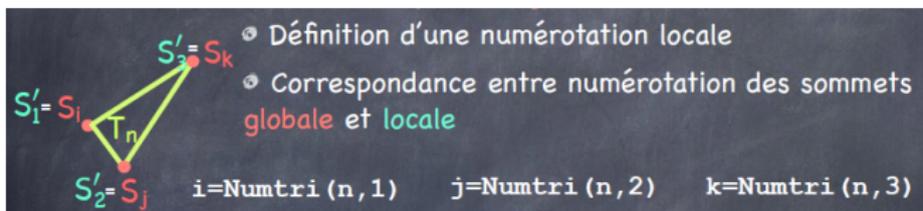
Donc a , b et c existent et sont uniques.

Remarque : Les fonctions de base de P_2 sont également les fonctions chapeaux, qui valent **1** en un noeud et **0** sur les autres noeuds. Il suffit alors de définir les noeuds : il faut **6** points pour définir complètement une fonction dans P_2 , donc nous considérerons les noeuds comme étant les sommets des triangles, ainsi que les milieux des arêtes.

Coordonnées barycentriques

Proposition : Caractérisation des w_i sur chaque triangle

Les fonctions chapeaux sont égales sur chaque triangle aux fonctions barycentriques.



Fonctions de base locales :

$$\lambda_1 = w_i|_{T_n}, \quad \lambda_2 = w_j|_{T_n}, \quad \lambda_3 = w_k|_{T_n}, \quad \text{où :}$$

$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \lambda_i : M \in T_n \rightarrow \lambda_i(M) \in [0, 1]$, telles que :

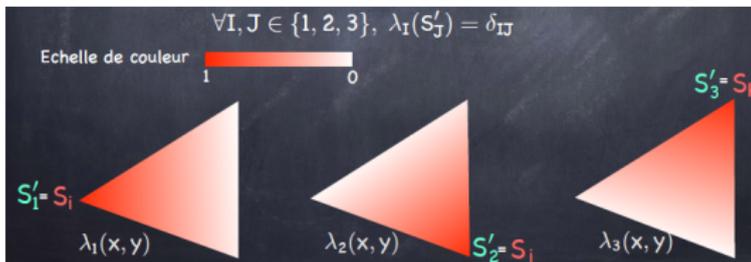
- $\forall M \in T_n, \overrightarrow{OM} = \lambda_1(M) \overrightarrow{OS'_1} + \lambda_2(M) \overrightarrow{OS'_2} + \lambda_3(M) \overrightarrow{OS'_3}$
- $\forall M \in T_n, 1 = \lambda_1(M) + \lambda_2(M) + \lambda_3(M)$

Coordonnées barycentriques

$$\begin{cases} \lambda_1(x, y) x_1 + \lambda_2(x, y) x_2 + \lambda_3(x, y) x_3 = x \\ \lambda_1(x, y) y_1 + \lambda_2(x, y) y_2 + \lambda_3(x, y) y_3 = y \\ \lambda_1(x, y) + \lambda_2(x, y) + \lambda_3(x, y) = 1 \end{cases} \quad (19)$$

⇓

$$\begin{cases} \lambda_1(x, y) = \frac{(x-x_3)(y_2-y_3) - (x_2-x_3)(y-y_3)}{(x_2-x_3)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_2-y_3)} \\ \lambda_2(x, y) = \frac{(x-x_1)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y-y_1)}{(x_2-x_3)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_2-y_3)} \\ \lambda_3(x, y) = \frac{(x-x_2)(y_1-y_2) - (x_1-x_2)(y-y_2)}{(x_2-x_3)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_2-y_3)} \end{cases} \quad (20)$$



Matrices élémentaires

Pour un triangle $\mathcal{T}_n = S_i S_j S_k$, la matrice élémentaire \mathbb{M}^{elem} associée à la matrice de masse \mathbb{M} est donnée par :

$$\mathbb{M}^{elem} = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{T}_n} w_i w_i & \int_{\mathcal{T}_n} w_i w_j & \int_{\mathcal{T}_n} w_i w_k \\ \int_{\mathcal{T}_n} w_j w_i & \int_{\mathcal{T}_n} w_j w_j & \int_{\mathcal{T}_n} w_j w_k \\ \int_{\mathcal{T}_n} w_k w_i & \int_{\mathcal{T}_n} w_k w_j & \int_{\mathcal{T}_n} w_k w_k \end{bmatrix} \quad (21)$$

et la matrice élémentaire \mathbb{K}^{elem} associée à la matrice de rigidité \mathbb{K} est donnée par :

$$\mathbb{K}^{elem} = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{T}_n} \nabla w_i \nabla w_i & \int_{\mathcal{T}_n} \nabla w_i \nabla w_j & \int_{\mathcal{T}_n} \nabla w_i \nabla w_k \\ \int_{\mathcal{T}_n} \nabla w_j \nabla w_i & \int_{\mathcal{T}_n} \nabla w_j \nabla w_j & \int_{\mathcal{T}_n} \nabla w_j \nabla w_k \\ \int_{\mathcal{T}_n} \nabla w_k \nabla w_i & \int_{\mathcal{T}_n} \nabla w_k \nabla w_j & \int_{\mathcal{T}_n} \nabla w_k \nabla w_k \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Matrices élémentaires

Ce qui donne :

Pour la matrice élémentaire \mathbb{M}^{elem} associée à la matrice de masse \mathbb{M} :

$$\mathbb{M}^{elem} = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{T}_n} \lambda_i \lambda_i & \int_{\mathcal{T}_n} \lambda_i \lambda_j & \int_{\mathcal{T}_n} \lambda_i \lambda_k \\ \int_{\mathcal{T}_n} \lambda_j \lambda_i & \int_{\mathcal{T}_n} \lambda_j \lambda_j & \int_{\mathcal{T}_n} \lambda_j \lambda_k \\ \int_{\mathcal{T}_n} \lambda_k \lambda_i & \int_{\mathcal{T}_n} \lambda_k \lambda_j & \int_{\mathcal{T}_n} \lambda_k \lambda_k \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Pour la matrice élémentaire \mathbb{K}^{elem} associée à la matrice de rigidité \mathbb{K} :

$$\mathbb{K}^{elem} = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{T}_n} \nabla \lambda_i \nabla \lambda_i & \int_{\mathcal{T}_n} \nabla \lambda_i \nabla \lambda_j & \int_{\mathcal{T}_n} \nabla \lambda_i \nabla \lambda_k \\ \int_{\mathcal{T}_n} \nabla \lambda_j \nabla \lambda_i & \int_{\mathcal{T}_n} \nabla \lambda_j \nabla \lambda_j & \int_{\mathcal{T}_n} \nabla \lambda_j \nabla \lambda_k \\ \int_{\mathcal{T}_n} \nabla \lambda_k \nabla \lambda_i & \int_{\mathcal{T}_n} \nabla \lambda_k \nabla \lambda_j & \int_{\mathcal{T}_n} \nabla \lambda_k \nabla \lambda_k \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Calcul des coefficients de la matrice

Calcul des coefficients de la matrice $M_{ij} = \sum_{l, S_i, S_j \in \mathcal{T}_l} \int_{\mathcal{T}_l} w_i w_j d\Omega$

$M = 0$ (initialisation)
 Pour $\ell = 1, N_{tri}$ (boucle sur les triangles)

Détermination des coordonnées des sommets du triangle ℓ
 Calcul de la matrice élémentaire

$$M^{elem} = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{T}_n} w_i w_i & \int_{\mathcal{T}_n} w_i w_j & \int_{\mathcal{T}_n} w_i w_k \\ \int_{\mathcal{T}_n} w_j w_i & \int_{\mathcal{T}_n} w_j w_j & \int_{\mathcal{T}_n} w_j w_k \\ \int_{\mathcal{T}_n} w_k w_i & \int_{\mathcal{T}_n} w_k w_j & \int_{\mathcal{T}_n} w_k w_k \end{bmatrix}$$

Ajout des contributions dans la matrice

$i = Numtri(\ell, 1)$ $j = Numtri(\ell, 2)$ $k = Numtri(\ell, 3)$ (numero global)

$M_{ii} = M_{ii} + M_{11}^{elem}$ $M_{ij} = M_{ij} + M_{12}^{elem}$ $M_{ik} = M_{ik} + M_{13}^{elem}$
 $M_{ji} = M_{ji} + M_{21}^{elem}$ \dots $M_{kk} = M_{kk} + M_{33}^{elem}$ (assemblage)

fin

Tableau de composition des triangles

T_1	1	3	4
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
T_n	i	j	k
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$T_{N_{tri}}$	N_{som}	l	m

$M = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ i & & & \\ j & * & * & * \\ k & * & * & * \end{bmatrix}$

Assemblage et résolution

- Calcul des coefficients de la matrice $A = K + M$
- Calcul des coefficients du second membre L
- Calcul de l'unique solution $U \in \mathbb{R}^{N_{som}}$ de

$$AU = L.$$

où :

- $A_{ij} = a(w_j, w_i)$
- $L_i = L(w_i)$
- $U_i = u_h(S_i)$

Convergence de l'approximation :

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|,$$

où

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_{som}} U_i w_i.$$

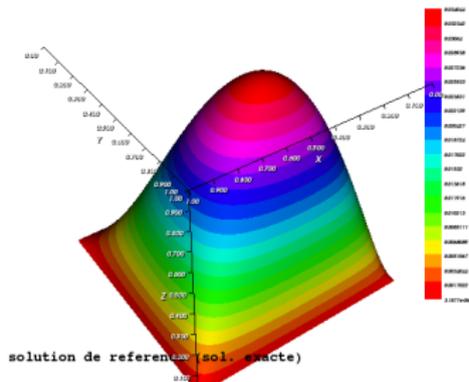
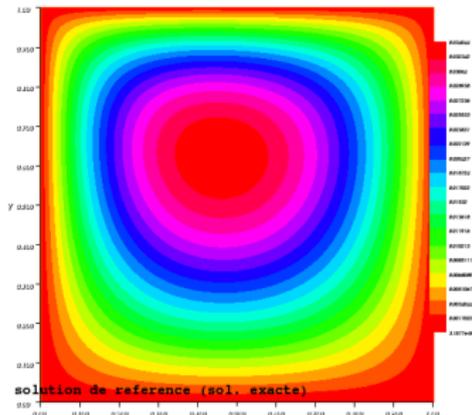
Problème de Dirichlet homogène

Chercher u , telle que :

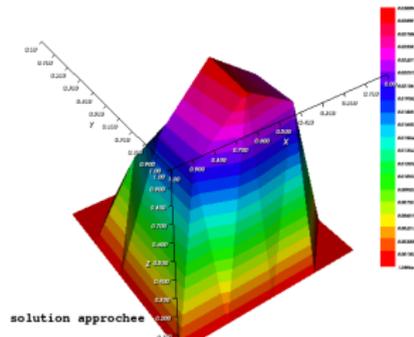
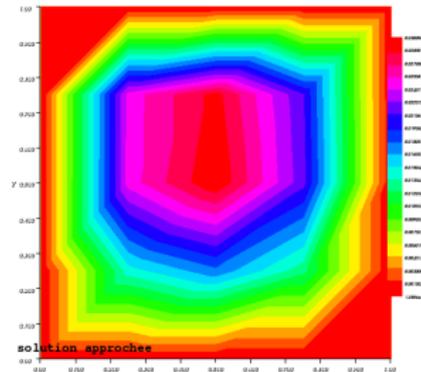
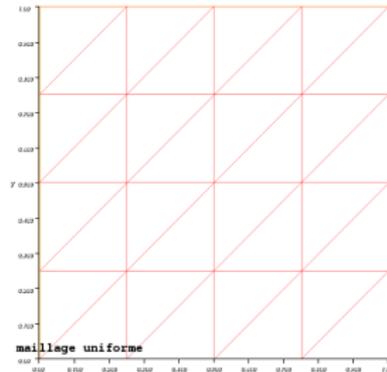
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

avec :

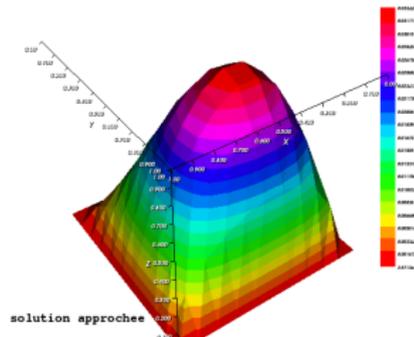
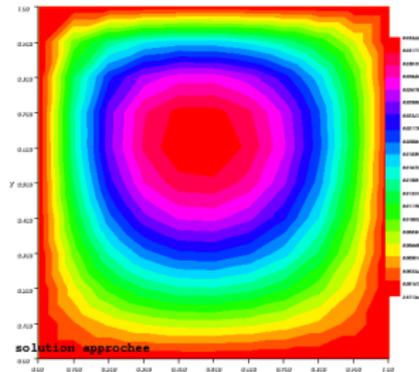
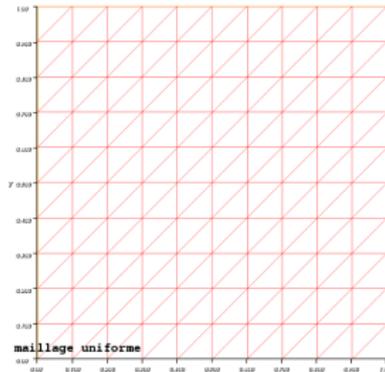
- $\Omega =]0, 1[$
- $f(x, y) = \cos(x) * y$



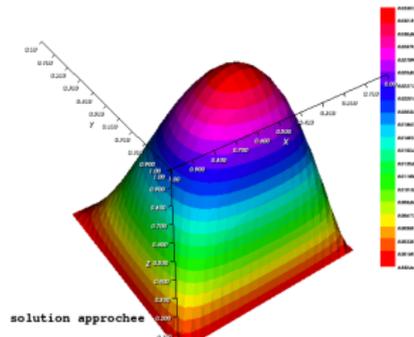
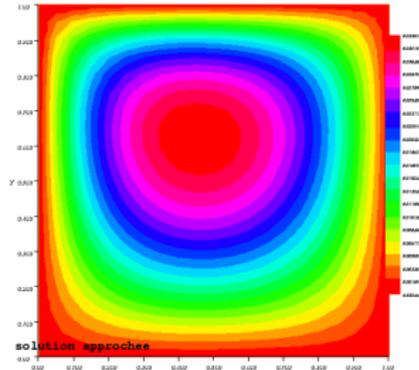
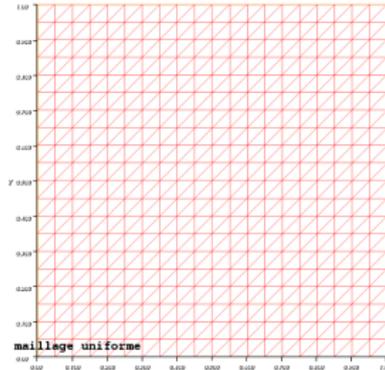
Maillage $h = \frac{1}{4}$



Maillage $h = \frac{1}{10}$



Maillage $h = \frac{1}{20}$



Équation de la chaleur

Données :

- Ω ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière $\Gamma = \partial\Omega$.
- $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $\Sigma_T =]0, T[\times \Gamma$,
- $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,
- $f : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$.

Problème : Chercher une fonction $u : (t, x) \in Q_T \rightarrow u(t, x) \in \mathbb{R}$ solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u(t, x) = f(t, x) & \text{dans } Q_T \text{ (équation de la chaleur)} \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T \text{ (condition aux limites)} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \text{ (condition initiale)} \end{cases} \quad (25)$$

Formulation variationnelle

Démarche :

Pour le problème d'évolution (25), et lors de la transformation sous la forme variationnelle, on :

- On multiplie l'équation par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$ qui ne dépend pas du temps.
- On intègre sur le domaine Ω .
- Et par intégration par parties,

nous obtenons :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(t, x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(0, x) = u_x \end{cases} \quad (26)$$

Formulation variationnelle

La formulation variationnelle est donnée par :
Trouver $u : t \in]0, T[\rightarrow u(t) \in H_0^1(\Omega)$, telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \langle u(t), v \rangle_{L^2(\Omega)} + a(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_{L^2(\Omega)} & \forall v \in H_0^1(\Omega). \\ u(t=0, x) = u_0(x) & \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (27)$$

Où :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u(t), v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) v(x) dx$$

est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, et

$$a(u(t), v) = \int_{\Omega} \nabla u(t, x) \nabla v(x) dx$$

est une forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega)$.

Cadre général

Définition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach.

- On dit que F s'injecte continûment dans E si $F \subset E$ et si l'inclusion est continue, c'est-à-dire

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall x \in F \quad \|x\|_E \leq C\|x\|_F,$$

on note $F \hookrightarrow E$.

- On dit que l'injection $F \hookrightarrow E$ est compacte si, de plus, de toute suite bornée pour $\|\cdot\|_F$, on peut en extraire une suite convergent dans $(E, \|\cdot\|_E)$.

Cadre général

Théorème

Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \hookrightarrow H$ avec injection compacte et V est dense dans H . Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive dans V . Soit un temps final $T > 0$, une donnée initiale $u_0 \in H$, et un terme source $f \in L^2(]0, T[, H)$. Alors le problème (25) a une et seule solution $u \in L^2(]0, T[, V) \cap C(]0, T[, H)$.

Démonstration.

- Voir [1] pages 241–244



- Dans le cas du problème modèle (25), il suffit de prendre :

$$V = H_0^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega)$$

Problème continu et approché

La formulation variationnelle du problème est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle u(t), v \rangle_{L^2(\Omega)} + a(u(t), v) = L(v), \quad \forall v \in V, \end{array} \right. \quad (28)$$

où $V = H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

- **Rappel** : V est un espace de dimension **infinie**

Pour définir le **problème approché** :

- Nous considérons un sous-espace de dimension **finie** $V_h \subset V$, puis
- On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle u_h(t), v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + a(u_h(t), v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{array} \right. \quad (29)$$

Discrétisation de l'espace

- La première étape dans la définition d'un schéma d'éléments finis est la construction du maillage.
- On découpe le domaine $\Omega =]0, 1[$ en sous-domaines $]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, 2, \dots, N + 1$.
On note

$$K_i :=]x_{i-1}, x_i[, \quad h_i := x_i - x_{i-1} \text{ et } \quad h := \max_{1 \leq i \leq N} h_i.$$

- En 1D, un maillage de Ω est la donnée de $N+2$ points

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1$$

Espace d'approximation

On définit :

$$V_h^k = \{v_h \in C^0(\Omega) \text{ tel que } v_{h|_{K_i}} \in \mathbb{P}_k(K_i), i = 1, 2, \dots, N+1\}$$

Cas $k=1$:

- $V_h^1 = \{v_h \in C^0(\Omega) \text{ tel que } v_{h|_{K_i}} \in \mathbb{P}_1(K_i), i = 1, 2, \dots, N+1\}$
- $\dim V_h^1 = N+2$
- On note $V_h = V_h^1$
- L'ensemble $\{w_j\}_{0 \leq j \leq N+1}$ est une base de V_h (où w_j est donnée par (12)).

Décomposition de la solution

En décomposant u_h sur sur cette base $\{w_j\}_{0 \leq j \leq N+1}$:

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) w_i(x).$$

Pour $v_h = w_j(x)$, Le problème (29) devient :

$$\sum_{i=1}^N u_i'(t) \langle w_i, w_j \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N u_i(t) a(w_i, w_j) = L(w_j).$$

Posons :

$$\mathbb{M} = m_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle, \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq N$$

$$\mathbb{A} = a_{ij} = a(w_i, w_j), \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq N.$$

EDO

- $\mathbb{M} = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ est la matrice de masse,
- $\mathbb{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ est la matrice de rigidité.

Le problème (29) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(t) \in V \text{ telle que :} \\ \mathbb{M} u'(t) + \mathbb{A} u(t) = L(t), \quad t \in]0, T[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (30)$$

Avec

- $u(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))$,
- $u'(t) = (u'_1(t), \dots, u'_N(t))$,
- $L(t) = (L_1(t), \dots, L_N(t))$ avec $L_i(t) = \langle f(t), w_i \rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(t, x) w_i(x) dx$
 $\forall i \in \{1, \dots, N\}$.

Matrice de Rigidité - Matrice de Masse

Les calculs donnent :

$$\mathbb{A} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{M} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer le second membre, on fait appel aux méthodes d'approximation d'intégrale. Ici, on utilise la formule de trapèzes pour calculer le vecteur L .

On obtient :

$$L_i = h \times f(x_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Grille temporelle

- Après avoir discrétiser l'équation de la chaleur en **espace** par la méthode des éléments finis, on termine la discrétisation en **temps** du problème par la **θ -méthode**.
- Le problème à résoudre est le suivant

$$\begin{cases} M u'(t) + A u(t) = L(t), & t \in]0, T[\\ u(t = 0) = u_0. \end{cases} \quad (31)$$

- $\Delta t = \frac{T}{M} > 0$ le pas de temps,
- La grille temporelle $t_n = n \Delta t$ pour tout $n = 0, \dots, M$. On note u^n l'approximation de $u(t_n)$.

θ -méthode

Schémas de différences finies

- La différence finie centrée, $\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_i) \simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t}$.
- La différence finie rétrograde, $\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_i) \simeq \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t}$.
- La différence finie progressive, $\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_i) \simeq \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$.

Pour calculer numériquement des solutions approchées (31), le schéma le plus simple et le plus utilisé est le θ -schéma.

Pour $\theta \in [0, 1]$, la θ -méthode s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbb{M} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \mathbb{A}[\theta u^{n+1} + (1 - \theta)u^n] = \theta L^{n+1} + (1 - \theta)L^n \quad (32)$$

θ -méthode

- Si $\theta = 0$, on appelle (32) schéma d'**Euler progressif** :

$$\mathbb{M}u^{n+1} = (\mathbb{M} - \Delta t \mathbb{A})u^n + \Delta t L^n.$$

- Si $\theta = 1/2$, on retrouve le schéma de **Crank-Nicholson** :

$$(\mathbb{M} + \frac{1}{2}\Delta t \mathbb{A})u^{n+1} = (\mathbb{M} - \frac{1}{2}\Delta t \mathbb{A})u^n + \frac{1}{2}\Delta t (L^{n+1} + L^n).$$

- Si $\theta = 1$, il s'agit du schéma d'**Euler régressif** :

$$(\mathbb{M} + \Delta t \mathbb{A})u^{n+1} = \mathbb{M} u^n + \Delta t L^{n+1}.$$

θ -méthode

Le système (32) peut s'écrire sous la forme : $\forall \theta \in [0, 1]$,

$$(\mathbb{M} + \theta \Delta t \mathbb{A}) u^{n+1} = (\mathbb{M} - (1 - \theta) \Delta t \mathbb{A}) u^n + \Delta t (\theta L^{n+1} + (1 - \theta) L^n).$$

- Les trois méthodes sont implicites.
- Inverser la matrice $(\mathbb{M} + \theta \Delta t \mathbb{A})$
- Cette matrice n'est pas toujours diagonale

Exemple

- Pour simplifier on prend $f \equiv 0$.
- La solution exacte

$$u(t, x) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t)$$

- La condition initiale

$$u_0(x) = \sin(\pi x)$$

- $(t, x) \in]0, 1[\times]0, 1[$.
- $dt = 0.001$.
- $dx = 0.05$.

Exemple

Pour $\theta = 1$ et $\theta = 1/2$.

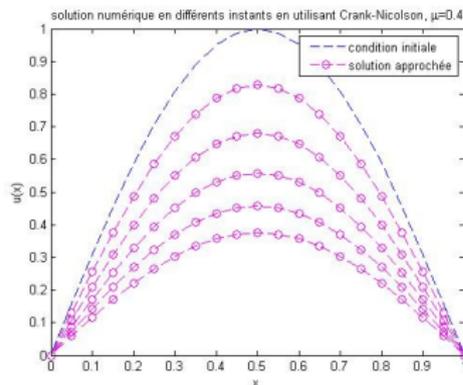
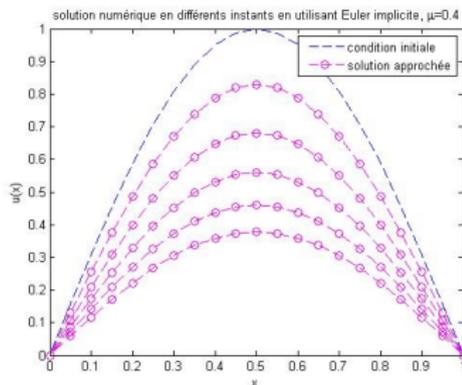


FIGURE – Graphes représentant la solutions approchée à partir de la condition initiale $u_0(x) = \sin(\pi x)$: Figure à gauche $\theta = 1$, Figure à droite $\theta = 1/2$

Exemple

Pour $\theta = 0$

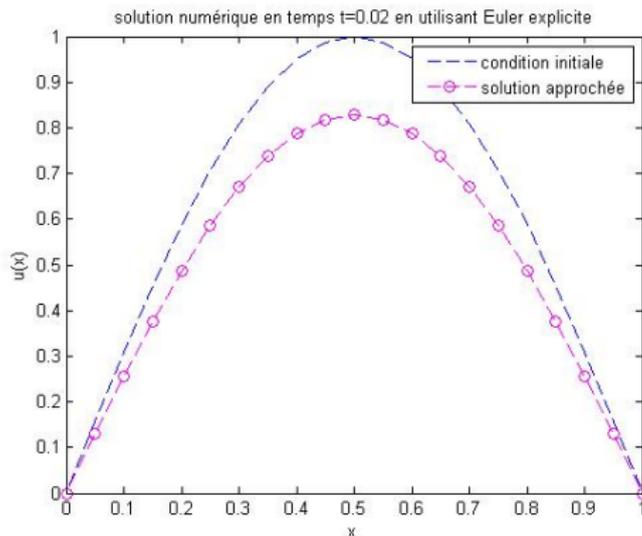


FIGURE – Graphe représentant la solution approchée à partir de la condition initiale $u_0(x) = \sin(\pi x)$ avec $\theta = 0$ à l'instant $t = 0.02$.

Exemple

Pour $\theta = 0$

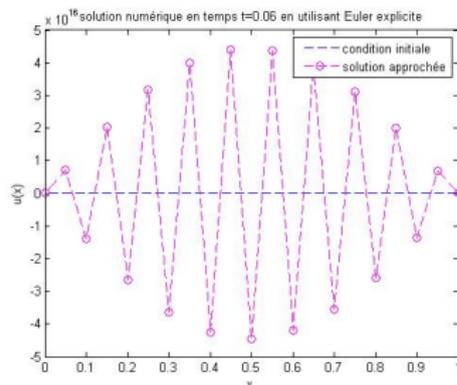
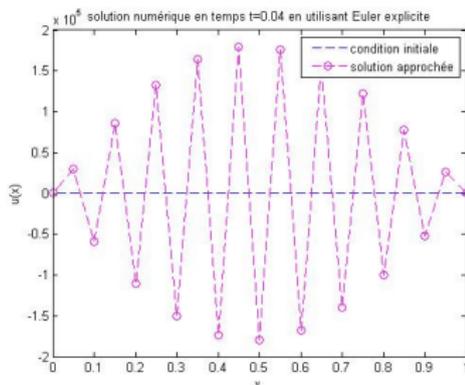


FIGURE – Graphes représentant la solution approchée à partir de la condition initiale $u_0(x) = \sin(\pi x)$ avec $\theta = 0$ à l'instant $t = 0.04$ dans la figure à gauche, et à l'instant $t = 0.06$ dans la figure à droite.

Exemple

Pour $\theta = 0$

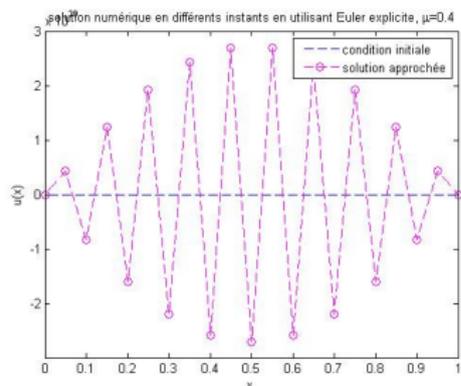
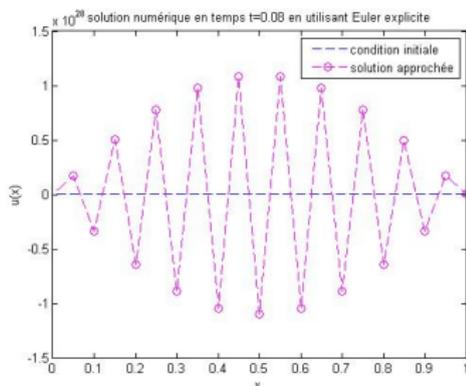


FIGURE – Graphes représentant la solution approchée à partir de la condition initiale $u_0(x) = \sin(\pi x)$ avec $\theta = 0$ à l'instant $t = 0.08$ dans la figure à gauche, et à l'instant $t = 0.1$ dans la figure à droite.

Remarques

On considère une des deux normes discrètes :

$$\|u^n\|_2 = \left(\sum_{j=1}^N \Delta x |u_j^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|u^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |u_j^n|.$$

Définition

Un schéma est dit **stable** pour une de ces normes s'il existe une constante $K > 0$ indépendante de Δt et Δx telle que

$$\|u^n\| \leq K \|u^0\| \quad \forall n \geq 0,$$

quelle que soit la donnée initiale u^0 .

Si cette inégalité a lieu sous une condition entre Δt et Δx , on dit que le schéma est **conditionnellement stable**.

De ces figures, on tire les remarques suivantes :

- Pour $\theta \geq 1/2$ le θ -schéma est dit inconditionnellement stable.
- pour $0 \leq \theta < 1/2$, le θ -schéma est dit conditionnellement stable.

Exercice

Exercice :

On considère maintenant le problème instationnaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \partial_{xx} u(t, x) + u(t, x) = 0 & (t, x) \in [0, T] \times]0, 1[, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in]0, 1[, \end{cases} \quad (33)$$

avec $f \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$, et $u_0 \in L^2(]0, 1[)$.

- 1 Trouver une formulation faible de (33).
- 2 On considère l'espace d'approximation défini par

$$V_h^1 := \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); \forall 0 \leq i \leq N, v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1; v_h(0) = v_h(1) = 0\}.$$

Trouver le système d'équations différentielles, en donnant les matrices de ce système.

- 3 Utiliser le schéma de Crank-Nicholson pour approcher la solution.