Université Mohammed V
Faculté des Sciences-Rabat

Département de Mathématiques

Module : Algèbre 1
(S1)

Filière :
Sciences de Matière Physique et Chimie (SMPC)

Chapitre 1: L'espace euclidien IR^n.

Par :

M. Abdellah ALLA
Mme. Nadia BOUDI
M. Ahmed HAJJI
M. Houssame MAHZOULI.

Année universitaire 2015-2016

Université Mohammed V, Faculté des Sciences RABAT. Avenue Ibn Battouta, B. P. 1014 RP, Rabat – Maroc. Site web : www.fsr.ac.ma, Tel : (+212) 05 37 77 18 76, Fax : (+212) 05 37 77 42 61.

Chapitre 1: L'ESPACE EUCLIDIEN $\mathbb{R}^n$

1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1.1 La structure de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est, par définition, formé des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$, où $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, c'est à dire:*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : \ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Exemples 1.2

$$(2, \ \sqrt{6}) \in \mathbb{R}^2; \quad (\frac{2}{7}, \ \cos 1, \ \pi) \in \mathbb{R}^3.$$

Définition 1.3 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de deux lois de composition, l'une interne et l'autre externe:*
i) La loi de composition interne est notée " $+$ ", et est définie par:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \ \ x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}.$$

ii) La loi de composition externe est notée ".", et est définie par:

$$\alpha.(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \quad \alpha, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Exemples 1.4 *1) Dans $\mathbb{R}^2$:*

$$(1, 7) + (-3, 0) = (-2, 7); \quad 2.(5, 3) = (10, 6).$$

2) Dans $\mathbb{R}^3$:

$$(0, 8, -3) + (1, 2, -6) = (1, 10, -9); \quad -4.(5, -1, 6) = (-20, 4, -24).$$

Propriétés 1.5 (Propriétés de l'addition) *On vérifie les propriétés suivantes:*
1) *L'addition est associative, c'est à dire:*

$$\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n : \ (X + Y) + Z = X + (Y + Z).$$

2) *L'addition est commutative, c'est à dire:*

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n : \ X + Y = Y + X.$$

3) $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$ *est un élément neutre de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire:*

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : \ X + 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n} + X.$$

4) *Si $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, écrivons $-X = (-1).X = (-x_1, \dots, -x_n)$. Alors $-X$ est un opposé de X pour la loi "+", c'est à dire:*

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \ \ X + (-X) = (-X) + X = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Remarque 1.6 *Souvent, on écrit* 0 *au lieu de* $0_{\mathbb{R}^n}$.

Exemples 1.7 *1) Dans* $\mathbb{R}^2$,

$$[(1,5)+(-1,7)]+(3,4)=(1,5)+[(-1,7)+(3,4)]=(3,16).$$

2) Dans $\mathbb{R}^3$,

$$(6,7,8,9)+(0,1,-1,5)=(0,1,-1,5)+(6,7,8,9)=(6,8,7,14).$$

Des propriétés de la multiplication et l'addition dans $\mathbb{R}$, on déduit:

Propriétés 1.8 (Propriétés de la loi externe) *On vérifie les propriétés suivantes:*
1) *Pour tout* $X \in \mathbb{R}^n$, $1.X = X$.
2) *Pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *pour tout* $X \in \mathbb{R}^n$: $(\alpha+\beta).X = \alpha.X + \beta.X$.
3) *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *pour tous* $X, Y \in \mathbb{R}^n$: $\alpha.(X+Y) = \alpha.X + \alpha.Y$.
4) *Pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *pour tout* $X \in \mathbb{R}^n$: $(\alpha \times \beta).X = \alpha.(\beta.X)$.

Exemples 1.9 *1)* $(2\times 3).(-2,0,1) = 2.[3.(-2,0,1)] = (-12,0,6)$.
2) $3.[(1,5)+(-1,7)] = [3.(1,5)]+[3.(-1,7)] = (0,36)$.

L'ensemble $\mathbb{R}^n$, muni des lois "+, ." est appelé espace vectoriel, et est noté $(\mathbb{R}^n,+,.)$. Ses éléments sont appelés vecteurs. Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés scalaires. Souvent, lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, la loi externe "." est notée par juxtaposition. C'est à dire, on écrit αX au lieu de $\alpha.X$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout X dans $\mathbb{R}^n$.
La notion d'espace vectoriel, dans le cadre général, sera étudiée plus tard (Algèbre II). Pour ce semestre, nous allons juste énoncer la définition.

Définition 1.10 *Soit* $\mathbb{E}$ *un ensemble muni de deux lois de composition "+" et ".", où "+" est interne et "." est externe définie de* $\mathbb{R}\times\mathbb{E}$ *vers* $\mathbb{R}$. *On dit que* $(\mathbb{E},+,.)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *si de plus, on a les propriétés:*
1) *L'addition est associative, c'est à dire:*

$$\forall X, Y, Z \in \mathbb{E}: \ (X+Y)+Z = X+(Y+Z).$$

2) *L'addition est commutative, c'est à dire:*

$$\forall X, Y \in \mathbb{E}: \ X+Y = Y+X.$$

3) *L'addition admet un élément neutre "U", c'est à dire:*

$$\exists\, U \in \mathbb{E} \text{ vérifiant } \forall X \in \mathbb{E}: \ X+U = U+X.$$

Cet élément neutre est noté $0_{\mathbb{E}}$ *où* 0 *s'il n'y a pas de risque de confusion.*

4) *Tout élément de* $\mathbb{E}$ *admet un opposé pour* $+$*, c'est à dire:*

$$\forall\ X \in \mathbb{E},\ \exists\ Y \in \mathbb{E} \text{ vérifiant } X + Y = Y + X = U.$$

L'opposé de X *est noté* $-X$.
5) *Pour tout* $X \in \mathbb{E}$, $1.X = X$.
6) *Pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *pour tout* $X \in \mathbb{E}$: $(\alpha + \beta).X = \alpha.X + \beta.X$.
7) *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *pour tous* $X, Y \in \mathbb{E}$: $\alpha.(X + Y) = \alpha.X + \alpha.Y$.
8) *Pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *pour tout* $X \in \mathbb{E}$: $(\alpha \times \beta).X = \alpha.(\beta.X)$.
Les éléments de l'espace vectoriel $(\mathbb{E}, +, .)$ *sont appelés vecteurs. Les éléments de* $\mathbb{R}$ *sont appelés scalaires.*

1.2 Familles libres et bases de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.11 *Soient* $r, n \in \mathbb{N}^*$. *On dit qu'une famille de vecteurs* $\{X_1, \dots, X_r\}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est linéairement indépendante (ou libre) si:*

$$\alpha_1 X_1 + \dots \alpha_r X_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0, \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}.$$

Si la famille $\{X_1, \dots, X_r\}$ *n'est pas libre, on dit qu'elle est liée, ou linéairement dépendante.*

Remarque 1.12 *Avec les notations de la définition ci-dessus,* $\{X_1, \dots, X_r\}$ *est liée si:*

$$\exists\ (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \neq 0 \text{ tel que } \alpha_1 X_1 + \dots \alpha_r X_r = 0.$$

Exemples 1.13 *1) Dans* $\mathbb{R}^2$, *la famille* $\{(0, 2), (3, 0)\}$ *est libre, en effet:*
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \alpha(0, 2) + \beta(3, 0) = 0 \ &\Rightarrow\ (3\beta, 2\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow\ \beta = \alpha = 0. \end{aligned}$$

2) La famille $\{(2, -1, 4), (1, -\frac{1}{2}, 2)\}$ *n'est pas libre car*

$$(2, -1, 4) = 2\ (1, -\frac{1}{2}, 2).$$

Lemme 1.14 *Dans* $\mathbb{R}^n$, *le vecteur* $0_{\mathbb{R}^n}$ *ne peut pas appartenir à une famille libre.*

***Preuve.* 1** *Soient* $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{R}^n$ *et considérons la famille* $\{0_{\mathbb{R}^n}, u_1, \dots, u_r\}$. *Soit* α *un scalaire quelconque non nul. Alors*

$$\alpha\ 0_{\mathbb{R}^n} + 0\ u_1 + \dots + 0\ u_r = 0,$$

par contre $(\alpha, 0, \dots, 0) \neq 0$.

Lemme 1.15 *Soient X_1, X_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors $\{X_1, X_2\}$ est libre si, et seulement si, les vecteurs X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires, c'est à dire:*

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ X_2 \neq \alpha.X_1 \quad et \quad X_1 \neq \alpha.X_2.$$

Preuve. 2 *$\Rightarrow$) Supposons que $\{X_1, X_2\}$ est libre. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1, -\alpha) \neq 0$ et donc*

$$X_1 - \alpha X_2 \neq 0 \ \ et\ \ X_2 - \alpha X_1 \neq 0.$$

$\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que les vecteurs X_1 et X_2 ne sont pas colinéaires. Supposons de plus qu'il existe $(\alpha, \beta) \neq 0$ tel que $\alpha X + \beta Y = 0$.
On a $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$. Supposons par exemple que $\alpha \neq 0$, alors

$$X + \frac{\beta}{\alpha} Y = 0,\ \ c'est\ à\ dire\ X = -\frac{\beta}{\alpha} Y,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Propriétés 1.16 *1) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, où $X \neq 0$, la famille formée d'un seul vecteur $\{X\}$ est libre.*
2) Soit $\{X_1, \ldots, X_r\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Alors toute famille extraite de $\{X_1, \ldots, X_r\}$ est libre.
3) Soit $\{X_1, \ldots, X_r\}$ une famille liée de $\mathbb{R}^n$. Alors toute famille contenant $\{X_1, \ldots, X_r\}$ est liée.

Preuve. 3 *1) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $X \neq 0$. Alors pour tout scalaire $\alpha \neq 0$, $\alpha X \neq 0$. D'où , $\{X\}$ est libre.*
2) Supposons qu'on a extrait une famille $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B} = \{X_1, \ldots, X_r\}$. Quitte à changer les indices, on peut supposer que la famille extraite est $\mathcal{C} = \{X_1, \ldots, X_k\}$, où $k < r$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_1\, X_1 + \ldots \alpha_k\, X_k = 0.$$

Alors

$$\alpha_1\, X_1 + \ldots \alpha_k\, X_k + 0\, X_{k+1} + \ldots 0\, X_r = 0.$$

Comme $\mathcal{B}$ est libre, alors $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, \ldots, 0) = 0$. D'où , $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = 0$, et par suite $\mathcal{C}$ est libre.
3) Soit $\mathcal{D} = \{X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}, \ldots X_t\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{B} = \{X_1, \ldots, X_r\}$ est liée. Soient des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ vérifiant

$$\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_r X_r = 0 \quad et \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \neq 0.$$

Alors

$$\alpha_1\, X_1 + \ldots \alpha_r\, X_r + 0\, X_{r+1} + \ldots 0\, X_t = 0 \quad et \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0) \neq 0.$$

Définition 1.17 *Dans $\mathbb{R}^n$, une famille libre ayant n éléments est appelée base de $\mathbb{R}^n$.*

Rappelons que si E est un ensemble fini, le nombre d'éléments de E est appelé cardinal de E et est noté card E.

Exemples 1.18 *1) La famille $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En effet, il est clair que $(1,0)$ et $(0,1)$ ne sont pas colinéaires. Donc $\mathcal{B}$ est libre. Le cardinal de $\mathcal{B}$ est égal à 2, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{B}$ est appelée base "canonique" de $\mathbb{R}^2$.*
2) La famille $\mathcal{C} = \{(1,1,0),(0,2,2),(3,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, card $\mathcal{C} = 3$, *donc il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\alpha(1,1,0) + \beta(0,2,2) + \gamma(3,1,1) = 0.$$

Donc $(\alpha + 3\gamma, \alpha + 2\beta + \gamma, 2\beta + \gamma) = (0,0,0)$. On en déduit que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et par suite $\mathcal{C}$ est libre.

Lemme 1.19 *Dans $\mathbb{R}^n$, considérons la famille $\{e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,\ldots,0,1)\}$. Alors la famille $\{e_1,\ldots,e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, elle est appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

***Preuve.* 4** *Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$. Supposons que*

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0.$$

Alors $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0$. D'où , $\mathcal{B}$ est libre. Or, $\mathcal{B}$ contient n éléments. D'où , $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

1.3 Coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dans une base

Soit $X = (x_1,\ldots,x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B} = \{e_1,\ldots,e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Remarquons que

$$X = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Remarquons aussi que cette écriture est unique, c'est à dire que si

$$X = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = x'_1 e_1 + \ldots + x'_n e_n,$$

alors $(x_1,\ldots,x_n) = (x'_1,\ldots,x'_n)$.

Lemme 1.20 *Soit $\mathcal{C} = \{u_1,\ldots,u_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Supposons que pour un vecteur X de $\mathbb{R}^n$, il existe $y_1,\ldots,y_n, y'_1,\ldots,y'_n \in \mathbb{R}$ tel que $X = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i = \sum_{i=1}^{n} y'_i u_i$. Alors $y_i = y'_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.*

***Preuve.* 5**

$$X=\sum_{i=1}^{n} y_i u_i=\sum_{i=1}^{n} y_i' u_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(y_i-y_i')u_i=0$$
$$\Rightarrow y_i-y_i'=0,\ \forall 1\leq i\leq n.$$

Nous admettrons le Théorème suivant:

Théorème 1.21 *Soit $\mathcal{C}=\{u_1,\ldots,u_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, il existe $y_1,\ldots,y_n\in\mathbb{R}$ tel que $X=\sum_{i=1}^{n} y_i u_i$. De plus, la famille de scalaires $y_1,\ldots,y_n$ vérifiant l'égalité ci-dessus est unique.*

Définition 1.22 *Soient $\mathcal{B}=\{u_1,\ldots,u_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et X un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Soient $y_1,\ldots,y_n\in\mathbb{R}$ tel que $X=\sum_{i=1}^{n} y_i u_i$. Alors le n-uplet $(y_1,\ldots,y_n)$ est appelé coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$, le scalaire y_i est associé à u_i.*

Exemples 1.23 *1) Soit $X=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Alors $(x_1,\ldots,x_n)$ représente les coordonnées de X dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$.*
2) Donnons les coordonnées (α,β) de $(5,7)$ dans la base $\mathcal{C}=\{(5,0),(0,14)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(5,7) &= \alpha\,(5,0)+\beta\,(0,14)\Rightarrow\\(5,7) &= (5\,\alpha,14\,\beta)\Rightarrow\\\alpha=1\quad &; \quad \beta=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Etant donné une base $\mathcal{B}=\{u_1,\ldots,u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, et un vecteur $X\in\mathbb{R}^n$, pour trouver $y_1,\ldots,y_n$ dans $\mathbb{R}$ tel que $X=\sum_{i=1}^{n} y_i u_i$, on résoud le système correspondant, après avoir remplacé X et les u_i par leurs valeurs.

Vocabulaire. 1) Soit $\{u_1,\ldots,u_r\}$ une famille de $\mathbb{R}^n$ et soit $X\in\mathbb{R}^n$. S'il existe des scalaires $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ tel que $X=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i$, alors on dit que X s'écrit comme combinaison linéaire de $u_1,\ldots,u_r$.
2) Si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme combinaison linéaire de $u_1,\ldots,u_r$, on dit que la famille $\{u_1,\ldots,u_r\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (ou engendre l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$).

Remarque 1.24 *Remarquons que toute base de $\mathbb{R}^n$ engendre l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.*

Notation. Soient $u_1,\ldots,u_r$ des vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^n$, où $r\in\mathbb{N}$. On note

$$\mathrm{Vec}\{u_1,\ldots,u_r\}=\{\sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i,\ \text{où}\ \ \alpha_1,\ldots,\alpha_r\in\mathbb{R}\}.$$

Ainsi, $\mathrm{Vec}\{u_1,\ldots,u_r\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1,\ldots,u_r$.

Exemples 1.25 *1)* $\{(1,-1),(0,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$*, donc c'est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$*, c'est à dire*

$$\mathrm{Vec}\{(1,-1),(0,1)\} = \mathbb{R}^2.$$

2) $\mathrm{Vec}\{0_{\mathbb{R}^n}\} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
3) Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vec}\{(1,1,-1)\} = \{(\alpha,\alpha,-\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

2 La structure de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, +, ., \langle ., . \rangle)$

2.1 Produit scalaire, Norme et distance dans $\mathbb{R}^n$

Définition 2.1 *Soient* $X = (x_1, \ldots, x_n)$ *et* $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$.
1) *Le produit scalaire de* X *et* Y *est la quantitée notée* $\langle X, Y \rangle$ *et définie par*

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

2) *La norme de* X *est la quantité notée* $\|X\|$ *et définie par :*

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}.$$

3) *La distance entre* X *et* Y *est la quantité notée* $d(X,Y)$ *et est définie par*

$$d(X,Y) = \|X - Y\|.$$

4) *L'ensemble* $\mathbb{R}^n$ *muni des opérations* $+$, $.$, *et du produit scalaire* $\langle ., . \rangle$ *est appelé espace euclidien.*

Exemples 2.2 *Dans l'espace euclidien* $\mathbb{R}^2$,

$$\langle (1,2),(3,0) \rangle = 3;\ \|(3,4)\| = \sqrt{9+16} = 5;\ d((1,2),(-1,3)) = \|(-2,1)\| = \sqrt{5}.$$

Propriétés 2.3 (Propriétés du produit scalaire) *Pour tous éléments* X, Y, Z *de* $\mathbb{R}^n$ *et pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*, on a:*
1) $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$
2) $\langle X + Y, Z \rangle = \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle$.
3)$\langle X, Y + Z \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X, Z \rangle$.
4)$\langle \alpha.X, Y \rangle = \langle X, \alpha.Y \rangle = \alpha \langle X, Y \rangle$.
5) $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle \geq 0$*, on dit que le produit scalaire est positif.*
6) $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle = 0 \Rightarrow X = 0$.

***Preuve.* 6** *Posons* $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ *et* $Z = (z_1, \dots, z_n)$. *Alors*

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle Y, X \rangle.$$

$$\langle X+Y, Z \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle.$$

La troisième assertion découle des deux premières.

$$\langle \alpha.X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) y_i = \alpha \langle X, Y \rangle.$$

$$\langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|X\|^2.$$

D'où , si $\|X\| = 0$ *alors* $\|X\|^2 = 0$ *et par suite* $x_i = 0$ *pour tout* $1 \le i \le n$, *c'est à dire* $X = 0$.

Les propriétés ci-dessus nous permettent d'établir les égalités suivantes:

Proposition 2.4 *Pour tous* $X, Y \in \mathbb{R}^n$, *on a:*
1) $\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2$.
2) $\|X-Y\|^2 = \|X\|^2 - 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2$.
3) $\langle X+Y, X-Y \rangle = \|X\|^2 - \|Y\|^2$.
4) $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}\big(\|X+Y\|^2 - \|X-Y\|^2\big)$ *(identité de polarisation).*

***Preuve.* 7**

$$\begin{aligned} \|X+Y\|^2 &= \langle X+Y, X+Y \rangle \\ &= \langle X+Y, X \rangle + \langle X+Y, Y \rangle \\ &= \langle X, X \rangle + \langle Y, X \rangle + \langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle \\ &= \|X\|^2 + 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|X-Y\|^2 &= \|X + (-Y)\|^2 \\ &= \|X\|^2 + 2\langle X, -Y \rangle + \|-Y\|^2. \\ &= \|X\|^2 - 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle X+Y, X-Y \rangle &= \langle X, X \rangle + \langle Y, X \rangle + \langle X, -Y \rangle + \langle Y, -Y \rangle \\ &= \langle X, X \rangle + \langle Y, X \rangle - \langle X, Y \rangle - \langle Y, Y \rangle \\ &= \|X\|^2 - \|Y\|^2. \end{aligned}$$

La quatrième identité découle de 1) et 2).

Exemple 2.5 *Calculons* $\langle (2,3,0),(1,1,5)\rangle$ *de deux manières différentes:*
1) Directement: $\langle (2,3,0),(1,1,5)\rangle = 2+3+0 = 5$.
2) En utilisant l'identité de polarisation:

$$\|(2,3,0)+(1,1,5)\|^2 = \|(3,4,5)\|^2 = 50, \ \|(2,3,0)-(1,1,5)\|^2 = \|(1,2,-5)\|^2 = 30,$$

$$\text{par suite } \langle (2,3,0),(1,1,5)\rangle = \frac{1}{4}(50-30) = 5.$$

Définition 2.6 *Un vecteur* v *de* $\mathbb{R}^n$ *est dit unitaire si sa norme* $\|v\|$ *est égale à* 1.

Remarque 2.7 *Si* v *est un vecteur quelconque non nul de* $\mathbb{R}^n$*, alors* $\frac{v}{\|v\|}$ *est un vecteur unitaire de* $\mathbb{R}^n$*. On dit qu'on a normalisé le vecteur* v.

Théorème 2.8 (Inégalité de Cauchy Schwartz) *Pour tous* $X, Y \in \mathbb{R}^n$*, on a:*

$$|\langle X, Y\rangle| \leq \|X\| \ \|Y\|.$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si X *et* Y *sont colinéaires.*

***Preuve.* 8** *Soient* X *et* Y *deux vecteurs fixés de* $\mathbb{R}^n$*. Pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, on a,* $\|X+tY\|^2 \geq 0$*. Donc*

$$\|X\|^2 + 2t\langle X, Y\rangle + t^2\|Y\|^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}. \text{ D'où}$$

$$\Delta' = \langle X, Y\rangle^2 - \|X\|^2 \ \|Y\|^2 \leq 0.$$

C'est à dire, $\langle X, Y\rangle^2 \leq \|X\|^2 \ \|Y\|^2$*. D'où l'inégalité souhaitée.*

Remarque 2.9 *On utilise aussi la forme suivante de l'Inégalité de Cauchy Schwartz: Pour tous* $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$*, on a:*

$$\Big(\sum_{i=1}^n x_i \, y_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big).$$

2.2 Orthogonalité dans $\mathbb{R}^n$

Soient X et Y deux vecteurs non nuls de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a:

$$-1 \leq \frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\| \ \|Y\|} \leq 1.$$

Il existe donc un unique réel θ dans l'intervalle $[0, \pi]$, tel que:

$$\frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\| \ \|Y\|} = \cos\theta.$$

θ est appelé *mesure de l'angle* non orienté des vecteurs X et Y, ou écart angulaire entre X et Y. On déduit la célèbre formule:

$$\langle X, Y \rangle = \|X\| \, \|Y\| \, \cos\theta.$$

Exemple 2.10 *Dans $\mathbb{R}^2$, l'angle non orienté des vecteurs $u = (2,2)$ et $v = (0,1)$ est $\theta = \frac{\pi}{4}$. En effet, d'après la formule ci-dessus, on a:*

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|} = \frac{2}{\sqrt{8}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où: $\theta = \frac{\pi}{4}$

Définition 2.11 *On dit que deux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul, et on écrit $X \perp Y$.*

Remarque 2.12 *Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a $X \perp 0$.*

Exemples 2.13 *Dans $\mathbb{R}^2$: $\langle (1,-1), (1,1) \rangle = 0$. Donc les vecteurs $(1,-1)$ et $(1,1)$ sont orthogonaux.*
Dans $\mathbb{R}^3$: $\langle (-1,0,1), (0,1,0) \rangle = 0$. Donc les vecteurs $(-1,0,1)$ et $(0,1,0)$ sont orthogonaux.

Proposition 2.14 *1) L'angle formé par deux vecteurs non nuls orthogonaux X et Y est égal à $\frac{\pi}{2}$.*
2) Deux vecteurs X et Y sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 \text{ (théorème de Pythagore).}$$

***Preuve.* 9** *1) Soient X et Y deux vecteurs non nuls vérifiant $\langle X, Y \rangle = 0$. Si θ est l'angle formé entre X et Y, alors $\cos\theta = 0$, et par suite, $\theta = \frac{\pi}{2}$.*
2) Soient X et Y deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux. Alors d'après la Proposition 2.4- 1) , on a l'identité souhaitée.

La notion d'orthogonalité se généralise à une famille quelconque de vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

Définition 2.15 *Une famille de vecteurs $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est dite orthogonale si et seulement si $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ pour tout $i \neq j$.*

Exemple 2.16 *La famille de vecteurs $\{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_1 = (1,0,0,2)$, $u_2 = (-1,0,0,\frac{1}{2})$, $u_3 = (0,1,1,0)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}^4$. En effet:*

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0.$$

Proposition 2.17 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est libre.*

***Preuve.* 10** *Soit $\{u_1, \ldots, u_r\}$ une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Supposons que pour des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ on a*

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i = 0.$$

Alors $\langle \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i, u_1 \rangle = 0 = \alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle$. D'où , $\alpha_1 = 0$ et $\sum_{i=2}^{r} \alpha_i u_i = 0$. De même,

$$\langle \sum_{i=2}^{r} \alpha_i u_i, u_2 \rangle = 0 = \alpha_2 \langle u_2, u_2 \rangle.$$

Par suite, $\alpha_2 = 0$. En itérant le procédé, on déduit que $\alpha_3 = \ldots = \alpha_r = 0$.

2.3 Bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$

Nous avons la définition suivante:

Définition 2.18 *Soit $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$.*
- *$\mathcal{B}$ est appelée base orthogonale si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une famille orthogonale.*
- *$\mathcal{B}$ est appelée base orthonormale si $\mathcal{B}$ est orthogonale et $\|u_i\| = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.*

Exemples 2.19 *1) $\{(1,0), (0,1)\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. En effet, elle est orthogonale et*

$$\|(1,0)\| = \|(0,1)\| = 1.$$

2) Plus généralement, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale.

L'importance des bases orthonormales provient du fait que l'expression du produit scalaire dans ces bases (en fonction des coordonnées) devient simple. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormale:
- Si $X = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ et $Y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$, alors:

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \quad \text{et} \quad \|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

- Si $X = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, alors $\langle X, e_i \rangle = x_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On a donc:

✓ $X = \sum_{i=1}^{n} \langle X, e_i \rangle \, e_i.$

✓ $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle X, e_i \rangle \, \langle Y, e_i \rangle.$

✓ $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle X, e_i \rangle^2}.$

Remarque 2.20 *Etant donné une famille orthogonale $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, on peut facilement construire une famille orthonormale en normalisant les vecteurs u_i: $u_i' = \frac{u_i}{\|u_i\|}$. Ainsi, la famille $\{u_1', \ldots, u_n'\}$ est orthonormale.*

Exemple 2.21 *La famille de vecteurs $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ où*

$$u_1 = (1, 0, 2), \; u_2 = (-1, 0, \frac{1}{2}), \; u_3 = (0, 1, 0)$$

est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. En effet, elle est orthogonale puisque

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0,$$

et son cardinal est égal à 3. Mais B n'est pas orthonormale puisque

$$\|u_1\| = \|(1, 0, 2)\| = \sqrt{5} \neq 1.$$

On peut déduire de B une base orthonormale, il suffit de diviser chacun des vecteurs par sa norme. Donc, la famille de vecteurs $\{u_1', u_2', u_3'\}$, où

$$u_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2), \; u_2' = \sqrt{\frac{4}{5}}(-1, 0, \frac{1}{2}), \; u_3' = u_3,$$

est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Lemme 2.22 *Soient $n, r \in \mathbb{N}^*$. Soient $v, u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $v \perp u_i$ pour tout $i = 1, \ldots, r$. Alors pour toute combinaison linéaire u de $u_1, \ldots, u_r$, on a $v \perp u$.*

***Preuve.* 11** *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$.*

$$\langle \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r, v \rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle u_i, v \rangle = 0.$$

Définition 2.23 *Soient M et N deux parties de $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que M et N sont orthogonales et on note $M \perp N$ si pour tout $X \in M$ et pour tout $Y \in N$, on a $X \perp Y$.*

2.4 Orthogonalisation de Gram-Schmidt

Théorème 2.24 *Soient $n, r \in \mathbb{N}^*$. Soit $\{v_1, \ldots, v_r\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une unique famille $\{u_1, \ldots, u_r\}$ vérifiant:*
1) $\mathrm{Vect}\{u_1, \ldots, u_i\} = \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_i\}$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, r\}$.
2) $\{u_1, \ldots, u_r\}$ *est une famille orthonormale.*
3) $\langle v_i, u_i \rangle > 0$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, r\}$.
La famille $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est appelée orthonormalisée de Gram-Schmidt de $\{v_1, \ldots, v_r\}$.

***Preuve.* 12** *(résumée) Le procédé suivant donne la famille orthonormale que l'on veut obtenir (on peut faire une preuve rigoureuse par récurrence).*
Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt: Soit $\{v_1, \ldots, v_r\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$.
Etape 1: Posons
$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$
Alors le vecteur u_1 est unitaire. De plus, il est clair que u_1 est l'unique vecteur unitaire vérifiant
$$\langle v_1, u_1 \rangle > 0 \ \textit{et}\ \mathrm{Vect}\{u_1\} = \mathrm{Vect}\{v_1\}.$$
Etape 2 (si $r \geq 2$): Posons $u_2' = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$. Alors
$$\langle u_2', u_1 \rangle = 0 \ \textit{et}\ \langle v_2, u_2' \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1, u_2' \rangle = \langle u_2', u_2' \rangle > 0.$$
Ensuite posons
$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|}.$$
Alors la famille $\{u_1, u_2\}$ est orthonormale, de plus $\langle v_2, u_2 \rangle > 0$. Vérifions que
$$\mathrm{Vect}\{u_1, u_2\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}\{u_1, u_2\} &= \{\alpha u_1 + \beta u_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\alpha' v_1 + \beta' u_2' : \alpha', \beta' \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\alpha' v_1 + \beta'(v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1) : \alpha', \beta' \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\gamma v_1 + \delta v_2 : \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}.
\end{aligned}$$

Pour l'unicité, remarquons que l'unique réel α vérifiant $\langle v_2 + \alpha u_1, u_1 \rangle = 0$ est $\alpha = -\langle u_1, v_2 \rangle$. D'autre part, $\langle \alpha u_1, u_1 \rangle \neq 0$ pour tout $\alpha \neq 0$. D'où, les éléments de $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ qui sont orthogonaux à u_1 sont de la forme $\alpha u_2'$. Pour qu'on ait $\langle v_2, \alpha u_2' \rangle > 0$, il faut avoir $\alpha > 0$. Et enfin, u_2 doit être unitaire, d'où l'unicité de son choix.

Etape 3 (si $r \geq 3$): Posons

$$u_3' = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2, \text{ alors } \langle u_1, u_3' \rangle = \langle u_2, u_3' \rangle = 0.$$

De plus,

$$\langle v_3, u_3' \rangle = \langle v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2, u_3' \rangle = \langle u_3', u_3' \rangle > 0.$$

Ensuite posons

$$u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|}.$$

La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ devient orthonormale. De plus, $\langle v_3, u_3 \rangle > 0$ et on vérifie que

$$\text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}.$$

Pour l'unicité, on procède comme ci-dessus, en étudiant d'abord les éléments de la forme $\alpha u_1 + \beta u_2 + v_3$ qui sont orthogonaux à u_1 et u_2.
Etape i (si $r \geq i$): La famille $\{u_1, \ldots, u_{i-1}\}$ est orthonormale. Posons $u_i' = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_i, u_k \rangle u_k$, alors $\langle u_i', u_t \rangle = 0$ pour tout $t \in \{1, \ldots, i-1\}$. On vérifie que

$$\langle v_i, u_i' \rangle = \langle v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_i, u_k \rangle u_k, u_i' \rangle = \langle u_i', u_i' \rangle > 0.$$

Ensuite, posons $u_i = \frac{u_i'}{\|u_i'\|}$. Alors la famille $\{u_1, \ldots, u_i\}$ est orthonormale. De plus,

$$\langle v_i, u_i \rangle > 0, \text{ et } \text{Vect}\{u_1, \ldots, u_i\} = \text{Vect}\{v_1, \ldots, v_i\}.$$

Exemples 2.25 *1) Dans $\mathbb{R}^2$, orthonormalisons la base $B = \{(1,1), (2,0)\}$.*
Posons

$$u_1 = \frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1).$$

Posons

$$u_2' = (2,0) - \frac{1}{2}\langle (2,0), (1,1) \rangle (1,1) = (2,0) - (1,1) = (1,-1).$$

Soit $u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.
Ainsi, $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})\}$ est l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base B.

2) Dans $\mathbb{R}^3$, orthonormalisons la base $B = \{(1,0,1), (0,1,-1), (0,1,1)\}$. Soit

$$u_1 = \frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1).$$

Posons

$$u_2' = (0,1,-1) - \frac{1}{2}\langle (1,0,1), (0,1,-1) \rangle (1,0,1) = (0,1,-1) + (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}).$$

Soit

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2}, 1, \frac{-1}{2}).$$

Posons

$$u_3' = (0,1,1) - \frac{2}{3}\langle(\frac{1}{2}, 1, \frac{-1}{2}), (0,1,1)\rangle(\frac{1}{2}, 1, \frac{-1}{2}) - \frac{1}{2}\langle(1,0,1), (0,1,1)\rangle(1,0,1).$$

Alors

$$u_3' = \frac{2}{3}(-1,1,1) \ \textit{et} \ u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1,1,1).$$

Donc l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base B est la famille

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2}, 1, \frac{-1}{2}), \frac{\sqrt{3}}{3}(-1,1,1)\}.$$

Finalement, résumons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt:

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\{v_1, \ldots, v_r\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

Etape 1: Posons

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Etape 2: (si $r \geq 2$): Posons $u_2' = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1$. Ensuite posons

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|}.$$

Etape 3 (si $r \geq 3$): Calculons

$$u_3' = v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2,$$

ensuite calculons $u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|}$

$$\vdots$$

Etape i (si $r \geq i$): Posons $u_i' = v_i - \sum_{k=1}^{i-1}\langle v_i, u_k\rangle u_k$, ensuite posons $u_i = \frac{u_i'}{\|u_i'\|}$.

$$\vdots$$

Etape r: On itère le procédé jusqu'à l'ordre r.

La famille obtenue $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est appelée orthonormalisée de Gram-Schmidt de $\{v_1, \ldots, v_r\}$.

Remarque 2.26 *Si on change l'ordre de la famille $\{v_1, \ldots, v_r\}$, il est clair que l'orthonormalisée de Gram-Schmidt change aussi.*