Université Mohammed V
Faculté des Sciences-Rabat

Département de Mathématiques

Module : Algèbre 1
(S1)

Filière :
Sciences de Matière Physique et Chimie (SMPC)

Chapitre 2: Géométrie élémentaire dans IR^2 et IR^3

Par :

M. Abdellah ALLA
Mme. Nadia BOUDI
M. Ahmed HAJJI
M. Houssame MAHZOULI.

Année universitaire 2015-2016

Université Mohammed V, Faculté des Sciences RABAT. Avenue Ibn Battouta, B. P. 1014 RP, Rabat – Maroc. Site web : www.fsr.ac.ma, Tel : (+212) 05 37 77 18 76, Fax : (+212) 05 37 77 42 61.

Géométrie élémentaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Introduction

Dans ce chapitre, nous limiterons notre étude à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Nous reverrons la géométrie euclidienne traditionnelle, en utilisant et exploitant les propriétés algébriques développées dans le chapitre précédent. Lorsqu'on fait la géomètrie de cette manière, c'est à dire, en combinant Algèbre et Géométrie, on dit qu'on fait de la Géomètrie analytique. La Géomètrie analytique est basée sur la méthode des coordonnées, il est donc généralement nécessaire de choisir un repère de l'espace considéré.

Nous désignerons par $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et par $\mathcal{E}$ l'espace muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On dit que $\mathcal{P}$ est un espace à deux dimensions, et que $\mathcal{E}$ est un espace à 3 dimensions.

1. Rappels.

1.1. **Rappels sur le plan.** Considérons le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ fixé. On a la correspondance bijective suivante

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{P} \\ (x,y) & \mapsto & M(x,y) \end{array}.$$

Cette représentation permet d'identifier $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{P}$. Donc tout élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ est représenté graphiquement par un point de $\mathcal{P}$ d'abscisse x et d'ordonnée y. L'élément neutre $(0,0)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ correspond à l'origine O du repère $\mathcal{R}_0$.

On parle ausi de vecteurs dans le plan. Un vecteur est une grandeur qui détermine une longueur, une direction et un sens (Fig. 1). Etant donné deux points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ du plan, on associe à $\overrightarrow{MM'}$ le vecteur de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(x'-x, y'-y)$. Du théorème de Pythagore, on déduit que la longueur de $\overrightarrow{MM'}$ (ou la distance entre M et M') est

$$MM' = d(M,M') = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}\,.$$

Remarquons aussi que $d(M,M') = \|\overrightarrow{MM'}\|$.

Soient $u = \vec{u} = (x,y)$ et $v = \vec{v} = (x',y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ associés aux points $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ de $\mathcal{P}$. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peuvent être représentés par $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$. En particulier, $\vec{i}$ correspond à $(1,0)$ et $\vec{j}$ correspond à $(0,1)$.

Rappelons les relations suivantes pour tous points M, M' et M" du plan:

$$\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{M'M}, \quad \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M"} = \overrightarrow{MM"} \text{ (relation de Chasles).}$$

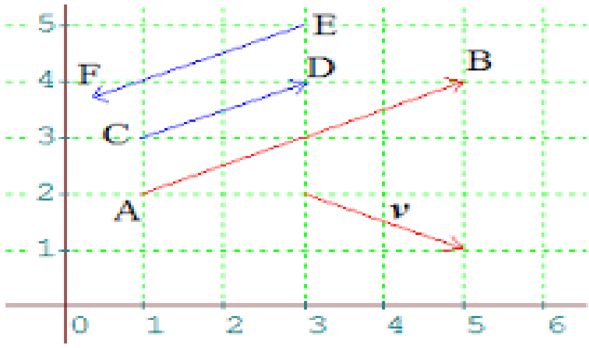

FIGURE 1. Vecteurs dans le plan

Remarquons qu'en travaillant dans $\mathbb{R}^2$ et en utilisant les propriétés de $(\mathbb{R}^2, +, .)$, ces relations restent vérifiées.

Notons que dans le plan, on peut avoir l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ même si les points A, B, C, et D sont des points distincts deux à deux du plan (Fig. 2). Plus exactement, on a

Lemme 1.1. *Soient A, B, C et D quatre points du plan. On a l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si, et seulement si la figure $(ABCD)$ est un parallélogramme.*

Si on veut faire directement l'addition de deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ dans le plan, on peut choisir 3 points A, B et C du plan de sorte que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ et on a $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$; ou bien on peut appliquer la règle du parallélogramme (Fig. 3).

Rappelons aussi le lemme suivant:

Lemme 1.2. *Soient A, M et M' trois points du plan. Alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires si, et seulement si les points M, M' et A sont alignés.*

Pour **l'orientation du plan**, on conviendra que le sens direct (on dit aussi: positif ou trigonométrique) est le sens inverse des aiguilles d'une montre. On dira que le repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est direct si la mesure de l'angle orienté entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ est égale à $\frac{\pi}{2}$. Lorsque la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est égale à $-\frac{\pi}{2}$, on dit que le repère $\mathcal{R}_0$ est indirect.

Définition 1.3. *Munissons le plan d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soient A et B deux points du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'angle orienté formé entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ (On tourne de $\overrightarrow{OA}$ vers $\overrightarrow{OB}$ dans le sens direct). Ainsi, $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$.*

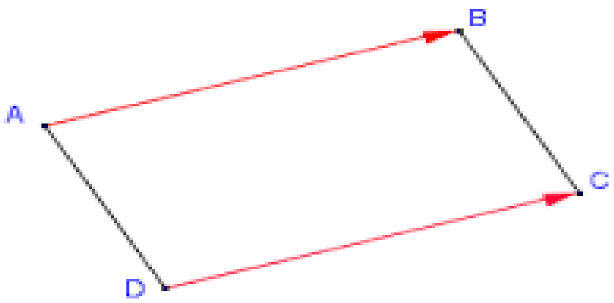

FIGURE 2. Egalité de vecteurs dans le plan

1.2. **Rappels sur l'espace.**
On munit l'espace $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On a la correspondance bijective suivante

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (x,y,z) & \longmapsto & M(x,y,z) \end{array}.$$

Cette représentation permet d'identifier $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{E}$. L'élément neutre $(0,0,0)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ correspond à l'origine O du repère $\mathcal{R}_0$. On parle ausi de vecteurs dans l'espace. Comme dans le plan, un vecteur est une grandeur qui détermine une longueur, une direction et un sens. Etant donné deux points $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$ de l'espace, on associe à $\overrightarrow{MM'}$ le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(x'-x, y'-y, z'-z)$. Notons que $\vec{i}$ correspond à $(1,0,0)$, $\vec{j}$ correspond à $(0,1,0)$ et $\vec{k}$ correspond à $(0,0,1)$. Rappelons aussi que $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est la base *canonique* de $\mathbb{R}^3$.
Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{E}$. Soit $M'(x,y,0)$ la projection orthogonale de M sur le plan (Oxy). En appliquant le théorème de Phytagore au triangle rectangle $OM'M$, on aboutit à

$$OM^2 = OM'^2 + M'M^2,$$

d'où $d(O,M) = OM = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \|\overrightarrow{OM}\|$, qui correspond à la norme euclidienne (issue du produit scalaire euclidien) de (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$.
Deux vecteurs quelconques de l'espace sont nécessairement dans un même plan. On peut donc se ramener au cas du plan pour les propriétés liées à l'étude de deux vecteurs (angles non orientés, addition, produit scalaire,...). Rappelons en particulier les relations suivantes pour tous points M, M' et $M"$ de l'espace:

$$\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{M'M}, \quad \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M"} = \overrightarrow{MM"} \text{ (relation de Chasles).}$$

Remarquons aussi qu'en travaillant dans $\mathbb{R}^3$ et en utilisant les propriétés de $(\mathbb{R}^3, +, .)$, ces relations restent vérifiées.

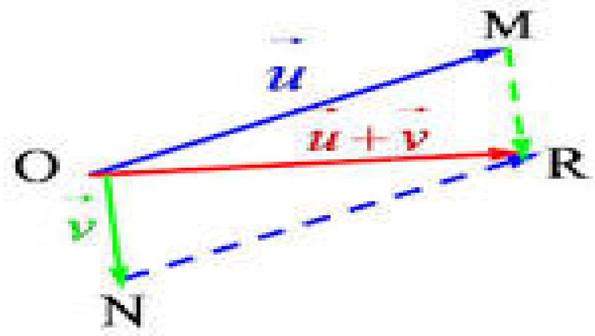

FIGURE 3. Addition de deux vecteurs-Règle du parallélogramme

Rappelons aussi que dans l'espace, on peut avoir l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ même si les points A, B, C, et D sont des points distincts deux à deux de l'espace. Plus exactement, on a l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si la figure $(ABDC)$ est un parallélogramme. En particulier, on en déduit que pour deux point quelconques $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ de l'espace

$$MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}.$$

Enfin, pour **l'orientation de l'espace**, on adoptera l'orientation usuelle. On dira donc que le repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est direct si un homme traversé par le vecteur $\overrightarrow{OC}$ de la tête aux pieds, regardant $\overrightarrow{OA}$, a le vecteur $\overrightarrow{OB}$ à sa gauche. Dans le cas contraire, on dit que le repère $\mathcal{R}_0$ est indirect. Ainsi, un repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est direct si $\vec{e_3}$ peut être déduit de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ par rotation dans le sens direct.

2. Modes de repérage dans le plan et l'espace

2.1. Coordonnes cartésiennes.

Dans le plans ou l'espace, on utilise divers repères, suivant les situations, pour faciliter les calculs. Tout point A du plan (resp. de l'espace) peut être vu comme origine d'un repère donné dans le plan (resp. dans l'espace).

Définition 2.1. *1) On appelle **base** du plan $\mathcal{P}$ tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ non colinéaires (autrement dit, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$).*
*2) On appelle **base** de l'espace $\mathcal{E}$ toute base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.*

Définition 2.2. *1) On appelle **repère cartésien** du plan $\mathcal{P}$ tout triplet $\mathcal{R} = (A, \vec{u}, \vec{v})$ où A est un point de $\mathcal{P}$ appelé origine du repère et $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan $\mathcal{P}$.*
*2) On appelle **repère cartésien** de l'espace $\mathcal{E}$ tout quadruplet $\mathcal{R} = \big(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big)$ où A est un point de $\mathcal{E}$ appelé origine du repère et $\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big)$ est une base de l'espace $\mathcal{E}$.*

Exemples 2.3. 1) Le triplet $(A(1,2), \vec{u}(3,4), \vec{v}(-1,4))$ est un repère cartésien du plan. En effet, A est un point du plan, et la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre.
2) Le quadruplet $(B(0,0,2), \vec{u}(1,7,8), \vec{v}(1,0,0), \vec{w}(1,-1,0))$ est un repère cartésien de l'espace. En effet, $B \in \mathcal{E}$; on vérifie que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est libre, et donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Le triplet $(A(4,-1), \vec{u}(2,4), \vec{v}(1,2))$ n'est pas un repère du plan. En effet, $\vec{u} = 2\vec{v}$, donc $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Vocabulaire.
1) Munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère cartésien $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Alors, comme $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan $\mathcal{P}$, il existe un unique couple (x, y) de réels tels que

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

$i)$ Le couple (x, y) s'appelle les **coordonnées cartésiennes** du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
$ii)$ Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, les coordonnées cartésiennes (x, y) du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont appelées les **coordonnées cartésiennes** du point M.

2) Munissons l'espace $\mathcal{E}$ d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace $\mathcal{E}$, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tels que

$$\vec{u} = \big(x, y, z\big) = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}.$$

$i)$ Le triplet (x, y, z) s'appelle les **coordonnées cartésiennes** du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.
$ii)$ Pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$, les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont appelées les **coordonnées cartésiennes** du point M.

3) Si trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace, on dit qu'ils sont **non coplanaires**.

Remarque 2.4. Pour parler de coordonnées cartésiennes dans le plan ou l'espace, il faut avoir fixé d'avance un repère cartésien. Lorsque le repère cartésien est clairement fixé, et qu'il n'y a pas de risque d'ambiguité, on peut parler de coordonnées cartésiennes sans préciser le repère.

Exercice 2.5. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, considérons deux points $A(x, y)$ et $B(x', y')$. Donner les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.

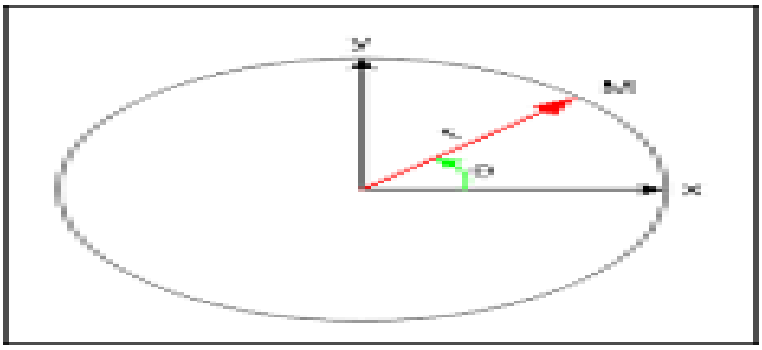

FIGURE 4. Coordonnées polaires

Solution. Soit $C(x_C, y_C)$ le milieu du segment $[A, B]$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} &\Leftrightarrow (x - x_C, y - y_C) = -(x' - x_C, y' - y_C) \\ &\Leftrightarrow x - x_C = -x' + x_C,\ y - y_C = -y' + y_C \\ &\Leftrightarrow C(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2}). \end{aligned}$$

2.2. **Coordonnées polaires.** Munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $M(x, y)$ un point fixé de $\mathcal{P}$, différent de l'origine O.
On pose $\theta = \big(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\big)$ (Fig. 4) et $r = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Alors

$$x = r\ \cos\theta,\ \text{et}\ y = r\ \sin\theta.$$

Définition 2.6. *Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ et $M(x, y)$ un point du plan $\mathcal{P}$. On dit que (r, θ) est un couple de coordonnées polaires pour M dans le plan si*

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & = r\ \cos\theta \\ y & = r\ \sin\theta. \end{array} \right.$$

Remarques 2.7. 1) Remarquons que si un point M du plan a pour coordonnées cartésiennes (x, y), et pour coordonnées polaires (r, θ) alors: $r^2 = x^2 + y^2$. Pour obtenir θ, on peut utiliser la fonction arctan:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = arctan(\frac{y}{x}) + k\pi.$$

2) Si l'on veut associer à chaque point M du plan différent de l'origine des coordonnées polaires (r, θ) de manière unique, on peut exiger que $r > 0$ et que $\theta \in [0, 2\pi[$.
3) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. On utilise souvent le repère orthonormal qui fait un angle θ avec $\mathcal{R}_0$: $(O, \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}, -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j})$.

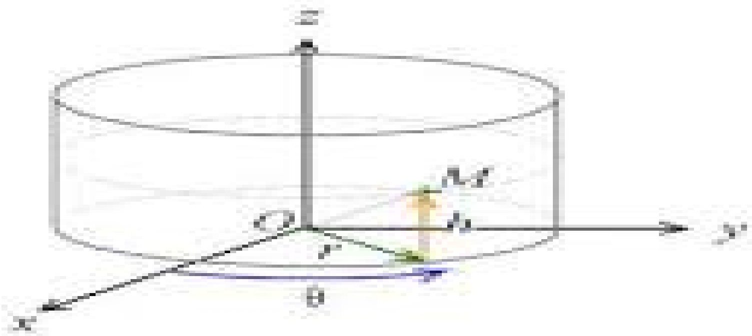

Figure 5. Coordonnées cylindriques

Exemples 2.8. 1) Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées polaires dans $\mathcal{R}_0$, $(2, \frac{\pi}{4})$. Alors les coordonnées cartésiennes de M sont

$$(2\cos(\frac{\pi}{4}), 2\sin(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}(1,1).$$

2) Soit $M \in \mathcal{P}$ un point de coordonnées cartésiennes $(-2, 2)$. Déterminons des coordonnées polaires (r, θ) de M.
On prend $r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. D'autre part,

$$\cos\theta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où, $\theta \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

2.3. **Coordonnées cylindriques.** On munit l'espace $\mathcal{E}$ du repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition 2.9. *Soit M un point de l'espace de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et soit $M' : (x, y, 0)$ la projection orthogonale de M dans le plan xOy. Les coordonnées cylindriques de M sont (r, θ, z) où (r, θ) sont les coordonnées polaires du point M' dans le plan xOy muni du repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et z est la cote du point M (sa troisième coordonnée dans le repère $\mathcal{R}_0$) (Fig. 5). On a donc*

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \textit{et } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemple 2.10. Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni du repère orthonormal $\mathcal{R}$, on a le point $A(3, 1, 2)$. Déterminer les coordonnées cylindriques de A.
Considérons le point $A'(3, 1, 0)$, qui est la projection de A sur le plan (xOy). Les coordonnées polaires (r, θ) de A' dans xOy vérifient:

$$r = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}, \ \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Par suite, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, et donc $\theta = \arccos(\frac{3}{\sqrt{10}})$. Les coordonnées cylindriques de A sont donc

$$(\sqrt{10}, \arccos(\frac{3}{\sqrt{10}}), 2).$$

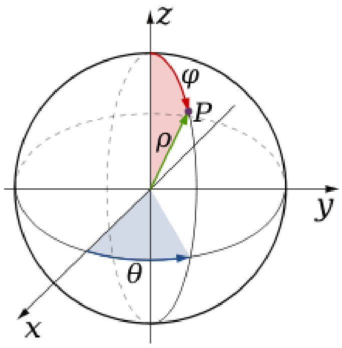

FIGURE 6. Coordonnées sphériques du point P

2.4. **Coordonnées sphériques.**

Définition 2.11. *Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace $\mathcal{E}$ muni du repère orthonormal direct $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $M'(x, y, 0)$ la projection orthogonale de M dans le plan xOy. Les coordonnées sphériques de M sont déterminées par le triplet $\big(\rho, \theta, \varphi\big)$, où $\varphi \in [0, \pi]$,*

$$\rho = \|\overrightarrow{OM}\| = OM,\ \theta = \big(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM'}\big),$$

et φ est la mesure de l'angle $\big(\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}\big)$. L'angle φ est appelé colatitude de M, et l'angle θ est appelé longitude de M.

Proposition 2.12. *Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace $\mathcal{E}$ muni du repère orthonormal direct $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Alors les coordonnées sphériques (ρ, θ, φ) de M vérifient:*

$$\begin{cases} x & = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y & = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z & = \rho \cos\varphi \\ \rho & = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

Preuve. Soit $M'(x, y, 0)$ la projection orthogonale de M dans le plan xOy. Alors

$$x = \|\overrightarrow{OM'}\| \cos\theta,\ y = \|\overrightarrow{OM'}\| \sin\theta.$$

D'autre part, $\vec{k} \perp \overrightarrow{OM'}$ et on a

$$\|\overrightarrow{OM'}\| = \rho \sin\varphi,\ \text{et} \quad z = \rho \cos\varphi.$$

D'où les égalités désirées. □

Remarque 2.13. Avec les notations de la définition ci-dessus, considérons la sphère de centre O et de rayon ρ. Coupons cette sphère par un plan contenant l'axe Oz et le point M, appelé plan méridien (ce plan contient donc les vecteurs $\vec{k}$ et $\overrightarrow{OM}$). Alors ce plan méridien coupe le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en la droite (OM').

Exercice 2.14. Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0$, considérons le point $A(-\sqrt{3}, -3, -2)$. Donner des coordonnées sphériques de A dans $\mathcal{R}_0$.

Réponse. 1) Trouvons (ρ, θ, φ) de sorte que $\rho > 0, \theta \in [0, 2\pi[, \varphi \in [0, \pi]$ et

$$x = \rho \sin\varphi \ \cos\theta, \quad y = \rho \sin\varphi \ \sin\theta, \quad z = \rho \cos\varphi.$$

On a $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4$. Comme $z = \rho \cos\varphi$ et $\varphi \in [0, \pi]$, on peut récupérer φ. On a $\cos\varphi = \frac{-1}{2}$ donc $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.
D'autre part, de $y = -3$ on déduit que $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. D'où $\theta = \pi + \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = \frac{-\pi}{3}$. Mais d'après le signe de x, $\cos\theta < 0$ donc $\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

2.5. **Changement de repère.** Supposons que $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{E}$) est muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (resp. $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$). Un changement de repère dans $\mathcal{P}$ consiste à considérer un nouveau repère $\mathcal{R}_2$ d'origine B et de base $(\vec{u}, \vec{v})$ (resp. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$) et trouver les nouvelles coordonnées de chaque point. Dans ce paragraphe, nous donnerons les formules explicites de changement de repère dans le cas du plan.

Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans l'ancien repère $\mathcal{R}_1$ et de coordonnées (x', y') dans le nouveau repère $\mathcal{R}_2$. Cherchons à exprimer les nouvelles coordonnées (x', y') en fonction des anciennes (x, y).
Notons (x_0, y_0) les coordonnées de A dans $\mathcal{R}_2$. On a

$$\begin{aligned} x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} \\ &= (x' - x_0)\vec{u} + (y' - y_0)\vec{v} \end{aligned}$$

Si (α, β), (γ, δ) désignent les coordonnées respectives de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ dans $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{u}, \vec{v})$, on déduit que

$$\begin{aligned} x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 &= x\big(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\big) + y\big(\gamma\vec{u} + \delta\vec{v}\big) \\ &= \big(\alpha\, x + \gamma\, y\big)\vec{u} + \big(\beta\, x + \delta\, y\big)\vec{v}. \end{aligned}$$

On obtient alors les formules de changement de repère suivantes:

Proposition 2.15 (**Formules de changement de repère**). *Les nouvelles coordonnées (x', y') de M en fonction des anciennes (x, y) sont données par les relations:*

$$\begin{cases} x' - x_0 &= \alpha x + \gamma y \\ y' - y_0 &= \beta x + \delta y \end{cases}$$

Conseil. Pour éviter de se tromper, il est conseillé de retrouver la formule. C'est à dire, faire le calcul à chaque fois, en utilisant la relation: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$.

Remarque 2.16. Dans le cas où les deux repères $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ et $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{u}, \vec{v})$ sont orthonormaux directs et $\theta = \big(\vec{u}, \vec{e_1}\big)$, alors

$$\vec{e_1} = \cos\theta\,\vec{u} + \sin\theta\,\vec{v} \quad \text{et } \vec{e_2} = -\sin\theta\,\vec{u} + \cos\theta\,\vec{v}.$$

Exemples 2.17. 1) Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans le repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $A \in \mathcal{P}$ de coordonées (x_A, y_A). Considérons le repère $\mathcal{R} = (A, \vec{i}, \vec{j})$. Alors M a pour coordonnées $(x - x_A, y - y_A)$ dans $\mathcal{R}$.
2) Supposons que le plan $\mathcal{P}$ est initialement muni du repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Considérons le repère cartésien $\mathcal{R}$ d'origine $A(0, 1)$ et de base $\{\vec{u}(1, 1), \vec{v}(-1, 0)\}$. Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}_0$. Trouvons les coordonnées (x', y') de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de (x, y).
On a $\vec{i} = -\vec{v}$ et $\vec{j} = \vec{u} + \vec{v}$. Donc

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{AM} & = & \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} \quad \Rightarrow \\ x'\vec{u} + y'\vec{v} & = & -\vec{j} + x\vec{i} + y\vec{j} \quad \Rightarrow \\ x' = -1 + y & ; & y' = -1 - x + y. \end{array}$$

Remarque 2.18. Supposons que l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère cartésien initial $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, et on se donne un nouveau repère $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$. Si un point M de l'espace a pour coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}_1$, pour trouver ses coordonnées dans $\mathcal{R}_2$ on procéde comme dans le cas du plan, en utilisant l'égalité évidente

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM},$$

et en faisant les calculs par rapport à la nouvelle base $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$.

3. Produit scalaire

3.1. **Produit scalaire dans le plan.**

Définition 3.1 (Définition géométrique du produit scalaire). *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$, muni du repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On définit le* ***produit scalaire*** *de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par:*

$$\begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos(\vec{u}, \vec{v}) & si\ \vec{u} \neq 0\ et\ \ \vec{v} \neq 0, \\ \vec{u}.\vec{v} = 0 & si\ \vec{u} = 0\ ou\ \ \vec{v} = 0 \end{cases}$$

Proposition 3.2. *Soient dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$ deux vecteurs $\vec{u}\,(x, y)$ et $\vec{v}\,(x', y')$. Alors:*

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' \ + \ yy'.$$

Preuve. Si $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$, l'égalité est clairement vérifiée. Supposons donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls. Soient $A, B \in \mathcal{P}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Posons $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$ et $(\vec{i}, \vec{u}) = \theta_0$. Alors A a pour coordonnées (x, y) et B a pour coordonnées (x', y') avec

$$x = \|\vec{u}\|\cos\theta_0, \quad y = \|\vec{u}\|\sin\theta_0$$

et

$$x' = \|\vec{v}\|\cos(\theta+\theta_0), \quad y' = \|\vec{v}\|\sin(\theta+\theta_0).$$

Donc

$$\begin{aligned} xx' + yy' &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\ (\cos\theta_0\cos(\theta+\theta_0) + \sin\theta_0\sin(\theta+\theta_0)) \\ &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta+\theta_0-\theta_0) \\ &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta \\ &= \vec{u}.\vec{v} \end{aligned}$$

□

Remarque 3.3. Le produit scalaire géométrique que l'on vient de définir coincide avec le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$. Donc on utilise les deux notations $\vec{u}.\vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$.

Corollaire 3.4. *1) Si un vecteur $\vec{u}$ a des coordonnées (x, y) dans une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan, alors:*

$$x = \vec{u}.\vec{i} \text{ et } y = \vec{u}.\vec{j}.$$

2) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si, et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont géométriquement orthogonaux (i.e. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$).
3) Si $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal, alors $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base orthonormale de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$.

Preuve. 1) Découle de la proposition 3.2.
2) Découle de la définition.
3) Comme $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires, non colinéaires et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. En particulier, $\vec{u}.\vec{v} = 0$. D'où, la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est orthonormale. □

Interprétation géomètrique du produit scalaire. Soient deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan. Soit $\vec{e}_2$ un vecteur unitaire orthogonal (géométriquement) à $\vec{u}$, donc le repère $\mathcal{R} = (O, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{e}_2)$ est un repère orthonormal. Soit M le point de $\mathcal{P}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$. Alors on a

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.\vec{v} = x',$$

où x' est l'abscisse de M dans $\mathcal{R}$. Autrement dit, si H est la projection orthogonale de M sur l'axe des abscisses dans le repère $(O, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{e}_2)$, alors

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\overrightarrow{OH}.$$

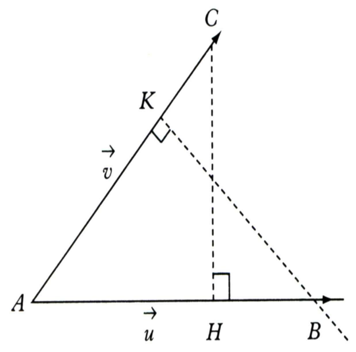

FIGURE 7. Produit Scalaire

3.2. **Produit scalaire dans l'espace.** Etant donné un point A de l'espace et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut considérer le plan déterminé par $A, \vec{u}$ et $\vec{v}$. On peut aussi identifier ce plan à $\mathbb{R}^2$, et on peut calculer le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Nous montrerons dans ce paragraphe que le cosinus géométrique coincide avec le cosinus défini via le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.5. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, leur produit scalaire est:*

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Si $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$, on pose $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Considèrons un plan déterminé par deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soient O, A, B trois points de ce plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, alors $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = d(A, B)$. Et on a:

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\big).$$

On en déduit la formule suivante:

Théorème 3.6. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et soit $\mathcal{R}_0 = \big(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\big)$ un repère orthonormal de $\mathcal{E}$. Supposons que $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ dans $\mathcal{R}$. Alors*

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Proof. Appliquons la formule

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\big).$$

Donc

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\big(x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2 - (z' - z)^2\big).$$

D'où l'égalité souhaitée. □

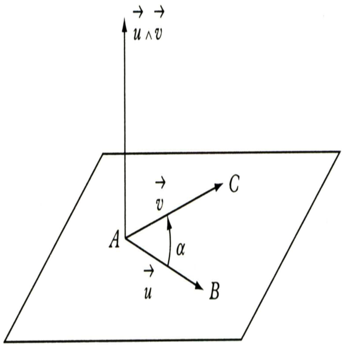

FIGURE 8. Produit Vectoriel

Interpretation géométrique du produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$.
Supposons que $\vec{u} \neq 0$ et soit A un point quelconque de l'espace. Choisissons deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ de $\mathcal{E}$ de sorte que $\mathcal{R} = (A, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ soit un repère orthonormal. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{v} = a\,\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + b\,\overrightarrow{e_2} + c\,\overrightarrow{e_3}.$$

Alors

$$\vec{u}.\vec{v} = a\,\|\vec{u}\|,\ (\text{ i.e : } \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.\vec{v} = a).$$

En particulier, on déduit immédiatement la proposition suivante:

Proposition 3.7. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et A un point de l'espace $\mathcal{E}$. Soient B et C les points définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. On désigne par H le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC) (voir la figure 7). Alors*

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AK}.$$

Le produit scalaire géométrique (dans l'espace) coincide avec le produit scalaire défini dans $\mathbb{R}^3$. Et on déduit:

Proposition 3.8. *1) Deux vecteurs non nuls de l'espace $\mathcal{E}$ sont orthogonaux (géométriquement) si leur produit scalaire est nul.*
*2) Un repère cartésien $\mathcal{R}' = (A, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ de l'espace est **orthonormal** si $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.*

4. Produit vectoriel

Définition 4.1. *Munissons l'espace d'un repère orthonormal direct. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{E}$. Le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ défini par:*

(1) *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u}\wedge\vec{v} = 0$.*

(2) *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal dans le sens direct au plan déterminé par $(O,\vec{u},\vec{v})$, et sa norme est*
$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\,|\sin(\vec{u},\vec{v})|, \quad \textit{(Fig. 8).}$$

Remarques 4.2. 1) De la définition, on déduit que le produit vectoriel est *antisymétrique* (on dit aussi *anti-commutatif*), c'est à dire:
$$\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}, \quad \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3.$$
2) En général, le produit vectoriel n'est pas *associatif*, c'est à dire:
$$\big(\vec{u}\wedge\vec{v}\big)\wedge\vec{w} \neq \vec{u}\wedge\big(\vec{v}\wedge\vec{w}\big), \quad \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3.$$
Un exemple simple: Soit $\mathcal{R}_0 = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace $\mathcal{E}$.
$$(\vec{i}\wedge\vec{i})\wedge\vec{j} = 0, \text{ mais } \vec{i}\wedge(\vec{i}\wedge\vec{j}) = \vec{i}\wedge\vec{k}\neq 0.$$

Exemples 4.3. Considérons l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormal direct $(A,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$. Alors
1) $\vec{e_1}\wedge\vec{e_2} = \vec{e_3},\ \vec{e_2}\wedge\vec{e_3} = \vec{e_1},\ \vec{e_3}\wedge\vec{e_1} = \vec{e_2}$.
2) Soit $a\in\mathbb{R}$. Alors $\vec{e_1}\wedge a\,\vec{e_2} = a\,\vec{e_3}$, et par antisymmétrie, on déduit que $a\,\vec{e_1}\wedge\vec{e_2} = a\vec{e_3}$. En effet, $\vec{e_1}\wedge a\,\vec{e_2}$ est orthogonal à $\vec{e_1}$ et à $\vec{e_2}$, donc il est colinéaire à $\overrightarrow{e_3}$. D'autre part, $\|\vec{e_1}\wedge a\,\vec{e_2}\| = |a|$, d'où
$$\vec{e_1}\wedge a\,\vec{e_2} = a\vec{e_3} \text{ ou } \vec{e_1}\wedge a\,\vec{e_2} = -a\vec{e_3}.$$
Comme le repère $(A,\vec{e_1},a\vec{e_2},\vec{e_1}\wedge a\,\vec{e_2})$ doit être direct, on déduit l'égalité souhaitée.

Propriétés 4.4. (1) *Deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, leur produit vectoriel est nul.*
(2) *L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est la norme du produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$.*
(3) *Pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, et $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$, on a*
$$\vec{u}\wedge(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}) = \alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})+\beta(\vec{u}\wedge\vec{w}), \quad \textit{et}$$
$$(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\wedge\vec{w} = \alpha(\vec{u}\wedge\vec{w})+\beta(\vec{v}\wedge\vec{w}).$$

Preuve. 1) et 2) découlent de la définition du produit vectoriel.
3) Il suffit de démontrer la première égalité, la seconde sera déduite par antisymétrie. Munissons $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R}_0 = (O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ et calculons d'abord $\vec{u_1}(a',b',c') = \vec{e_3}\wedge\vec{v}$, où $\vec{v} = a\vec{e_1}+b\vec{e_2}+c\vec{e_3}$, et $a,b,c\in\mathbb{R}$.
$$\vec{u_1}.\vec{e_3} = 0 \Rightarrow c' = 0, \text{ et } \vec{u_1}.\vec{v} = 0 \Rightarrow a'a+b'b = 0.$$
D'où, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $(a',b') = \lambda(-b,a)$. Et par suite $(a',b',c') = \lambda(-b,a,0)$. D'autre part,
$$\|\vec{u_1}\| = \|\vec{v}\|\,|\sin(\vec{e_3},\vec{v})| = \|a\vec{e_1}+b\vec{e_2}\|.$$

D'où,

$$\vec{u_1} = -b\vec{e_1} + a\vec{e_2} \text{ ou } \vec{u_1} = b\vec{e_1} - a\vec{e_2}.$$

Comme $(O, \vec{e_3}, \vec{v}, \vec{u_1})$ est direct, on a

$$\vec{u_1} = -b\vec{e_1} + a\vec{e_2} = -\langle \vec{e_2}, \vec{v} \rangle \vec{e_1} + \langle \vec{e_1}, \vec{v} \rangle \vec{e_2}.$$

Maintenant, pour $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ quelconques, si $\vec{u} = 0$, l'égalité 3) est évidente. Supposons donc que $\vec{u} \neq 0$ et choisissons $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ dans $\mathcal{E}$ de sorte que $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|})$ soit un repère orthonormal direct.

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \wedge (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &= -\langle \vec{e}_2, \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{e}_1, \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \rangle \vec{e}_2 \\
&= (-\alpha\langle \vec{e}_2, \vec{v} \rangle - \beta\langle \vec{e}_2, \vec{w} \rangle)\vec{e}_1 + (\alpha\langle \vec{e}_1, \vec{v} \rangle + \beta\langle \vec{e}_1, \vec{w} \rangle)\vec{e}_2 \\
&= \alpha\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \wedge \vec{v} + \beta\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \wedge \vec{w}
\end{aligned}$$

En multipliant de part et d'autre par $\|\vec{u}\|$, on déduit l'égalité désirée. □

Exercice 4.5. Considérons l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormal direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. En utilisant uniquement la définition du produit vectoriel, donner

$$1)\ \vec{w'} = (\vec{i} + \vec{j}) \wedge (\vec{i} - \vec{j}) \qquad 2)\ \vec{w} = \vec{k} \wedge (\vec{i} - 2\vec{j}).$$

Réponse. 1) $\vec{w'}$ est orthogonal au plan déterminé par $\vec{i}$ et $\vec{j}$, donc il est colinéaire à $\vec{k}$. De plus, $\|\vec{w'}\| = \sqrt{2}\ \sqrt{2}\ \sin\frac{\pi}{2} = 2$. Donc $\vec{w'} \in \{2\vec{k}, -2\vec{k}\}$. L'orientation de la base $\{\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j}, \vec{w'}\}$ doit être directe, donc $\vec{w'} = -2\vec{k}$.
2) $\vec{w}$ doit être orthogonal à $\vec{k}$ donc il doit être de la forme $(a, b, 0)$. De plus, il doit être orthogonal à $\vec{i} - 2\vec{j}$, donc il est colinéaire à $2\vec{i} + \vec{j}$. Comme $\|\vec{w}\| = \|\vec{k}\|\ \|\vec{i} - 2\vec{j}\|\ \sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{5}$, alors $\vec{w} \in \{2\vec{i} + \vec{j}, -2\vec{i} - \vec{j}\}$. L'orientation de la base $\{\vec{k}, \vec{i} - 2\vec{j}, \vec{w}\}$ doit être directe, on déduit que $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Théorème 4.6. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = \big(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\big)$, soient les vecteurs $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$. Alors*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \big(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx'\big).$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la linéarité et l'antisymétrie du produit vectoriel.

$$\begin{aligned}\vec{u}\wedge\vec{v} &= (x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})\\ &= (xy'-x'y)(\vec{i}\wedge\vec{j})+(xz'-x'z)(\vec{i}\wedge\vec{k})+(yz'-zy')(\vec{j}\wedge\vec{k})\\ &= (xy'-x'y)\vec{k}-(xz'-x'z)\vec{j}+(yz'-zy')\vec{i}.\end{aligned}$$

□

Exemple 4.7. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $\big(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\big)$, calculons $\vec{u}\wedge\vec{v}$, où $\vec{u}=(-3,-1,2)$ et $\vec{v}=(-2,-2,3)$:

$$\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+4\\-(-9+4)\\6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}.$$

5. Déterminant.

5.1. Cas du plan.

Définition 5.1 (Définition géométrique du déterminant). *Munissons le plan d'un repère orthonormal direct. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{P}$. On définit le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par:*

$$\begin{cases}\det\big(\vec{u},\vec{v}\big) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\sin(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u}\neq 0 \text{ et } \vec{v}\neq 0,\\ \det\big(\vec{u},\vec{v}\big) = 0 & \text{si } \vec{u}=0 \text{ ou } \vec{v}=0\end{cases}$$

*$det\big(\vec{u},\vec{v}\big)$ est aussi appelé **produit mixte** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on le note aussi $[\vec{u},\vec{v}]$.*

On a le résultat suivant, analogue à la Proposition 3.2:

Proposition 5.2. *Considérons le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R}_0=(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{P}$ ayant pour coordonnées respectives (x,y) et (x',y') dans $\mathcal{R}_0$. Alors:*

$$det\big(\vec{u},\vec{v}\big)=xy' - x'y.$$

Preuve. Si $\vec{u}=0$ ou $\vec{v}=0$, l'égalité souhaitée est claire. Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls. Soient $A,B\in\mathcal{P}$ tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$. Posons $(\vec{u},\vec{v})=\theta$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OA})=\theta_0$. Supposons que A a pour coordonnées (x,y) et B a pour coordonnées (x',y') dans $\mathcal{R}_0$. Alors

$$\begin{aligned}xy'-x'y &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\,(\cos\theta_0\sin(\theta+\theta_0)-\sin\theta_0\cos(\theta+\theta_0))\\ &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\theta+\theta_0-\theta_0)\\ &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta\\ &= [\vec{u},\vec{v}].\end{aligned}$$

□

Notation. Si $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ sont deux vecteurs de $\mathcal{P}$, on note

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}.$$

Remarque 5.3. On a en particulier $det\big(\vec{u},\vec{u}\big) = 0$, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan.

Proposition 5.4 (Déterminant et base). *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques du plan. Alors*
1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det\big(\vec{u},\vec{v}\big) = 0$.
2) $\{\vec{u},\vec{v}\}$ est une base si, et seulement si, $\det\big(\vec{u},\vec{v}\big) \neq 0$.

Preuve. 1) Remarquons que

$$\det\big(\vec{u},\vec{v}\big) = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \;\text{ ou }\; \|\vec{v}\| = 0 \text{ ou } \sin(\vec{u},\vec{v}) = 0.$$

2) Découle de 1), puisque $\{\vec{u},\vec{v}\}$ est une base si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires. □

Interprétation de déterminant en terme d'aire. L'aire du parallélogramme construit sur deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan est égale à $|\det(\vec{u},\vec{v})|$.

Propriétés 5.5 (Propriétés du déterminant). *1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$. Alors $det\big(\vec{u},\vec{v}\big) = -\,det\big(\vec{v},\vec{u}\big)$. On dit que le déterminant est* ***antisymétrique****.*
2) Soient $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ trois vecteurs, et λ_1, λ_2 deux réels. Alors:

$$det\big(\vec{u},\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2\big) \;=\; \lambda_1\, det\big(\vec{u},\vec{v}_1\big) + \lambda_2\, det\big(\vec{u},\vec{v}_2\big),$$

et par antisymétrie:

$$\det\big(\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2,\vec{u}\big) \;=\; \lambda_1 \det\big(\vec{v}_1,\vec{u}\big) + \lambda_2 \det\big(\vec{v}_2,\vec{u}\big).$$

On dit que le déterminant est ***linéaire*** *par rapport à chacune de ses variables.*

Preuve. 1)

$$\begin{aligned} det\big(\vec{u},\vec{v}\big) &= \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\sin(\vec{u},\vec{v}) \\ &= -\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\sin(\vec{v},\vec{u}) \\ &= -det\big(\vec{v},\vec{u}\big). \end{aligned}$$

2) Supposons que $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O,\vec{i},\vec{j})$. Soient (x,y) les coordonnées de $\vec{u}$ et $(x_1',y_1'),(x_2',y_2')$ les coordonnées respectives de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. D'après la Proposition 5.2, on a

$$\begin{aligned} det\big(\vec{u},\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2\big) &= x(\lambda_1 y_1'+\lambda_2 y_2') - y(\lambda_1 x_1'+\lambda_2 x_2') \\ &= \lambda_1(xy_1'-yx_1') + \lambda_2(xy_2'-yx_2') \\ &= \lambda_1\, det\big(\vec{u},\vec{v}_1\big) + \lambda_2\, det\big(\vec{u},\vec{v}_2\big) \end{aligned}$$

□

Exercice 5.6. Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R}_0$, considérons les vecteurs $\vec{u}(1,1)$ et $\vec{v}(0,-1)$. Donner l'angle $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$.

Solution. On a

$$\vec{u}.\vec{v} = -1 = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta, \text{ donc } \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Or,

$$[\vec{u}, \vec{v}] = -1 = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\theta < 0 \text{ donc } \sin\theta < 0.$$

D'où, $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

5.2. **Cas de l'espace.**

Définition 5.7. *Munissons l'espace d'un repère orthonormal direct. Le* ***déterminant*** *(ou* ***produit mixte****) de trois vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *est le nombre réel défini par le produit scalaire du premier vecteur avec le produit vectoriel des deux autres:*

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot \big(\vec{v} \wedge \vec{w}\big)$$

Le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ *est aussi noté* $det\big(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\big)$.

Exemples 5.8. Soit $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct de l'espace. On a

$$[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = [\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}] = [\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}] = 1.$$

Remarques 5.9. 1) La valeur absolue du produit mixte de trois vecteurs est le volume du parallélépipède défini par ces vecteurs.
2) Soient $\vec{u}(x, y, z)$, $\vec{v}(x', y', z')$ et $\vec{w}(x'', y'', z'')$ trois vecteurs de l'espace (muni du repère orthonormal direct $\mathcal{R}_0$). On utilise aussi la notation suivante pour le produit mixte

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

3) Le signe du produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ d'une base orthonormale $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ indique son orientation.

Proposition 5.10 (coplanarité). *Trois vecteurs non nuls de* $\mathbb{R}^3$ *sont* ***coplanaires*** *(ou forment une famille liée) si, et seulement si, leur produit mixte est nul.*

Preuve. Soient $\vec{u}, \vec{v}$, et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Supposons que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée. Alors soit $\vec{u} \in Vec\{\vec{v}, \vec{w}\}$ ou $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ est liée. Si $\vec{u} \in Vec\{\vec{v}, \vec{w}\}$, alors $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v} \wedge \vec{w}$ et donc $\vec{u} \cdot \big(\vec{v} \wedge \vec{w}\big) = 0$. Si la paire $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ est liée, alors $\vec{v} \wedge \vec{w} = 0$.
Réciproquement, supposons que $\vec{u} \cdot \big(\vec{v} \wedge \vec{w}\big) = 0$. Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v} \wedge \vec{w}$ sont orthogonaux. Donc soit $\vec{u} = 0$ ou $\vec{v} \wedge \vec{w} = 0$ ou $\vec{u}$ est parallèle à tout plan dirigé par $\vec{v}, \vec{w}$. Ainsi, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est linéairement dépendente. $\square$

Proposition 5.11. *Le produit mixte est linéaire par rapport à chaque variable: Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $\vec{u}, \vec{u'}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, on a*

$$[\alpha\vec{u} + \beta\vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \beta[\vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}],$$

$$[\vec{v}, \alpha\vec{u} + \beta\vec{u'}, \vec{w}] = \alpha[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] + \beta[\vec{v}, \vec{u'}, \vec{w}],$$

$$[\vec{v}, \vec{w}, \alpha\vec{u} + \beta\vec{u'}] = \alpha[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] + \beta[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u'}].$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
[\alpha\vec{u} + \beta\vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}] &= (\alpha\vec{u} + \beta\vec{u'}).(\vec{v} \wedge \vec{w}) \\
&= \alpha\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) + \beta\vec{u'}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) \\
&= \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \beta[\vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}].
\end{aligned}$$

On démontre les autres égalités de la même manière. □

Proposition 5.12. *1) Le produit mixte est antisymétrique, c'est à dire que si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace, alors le signe de $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ change si on permute deux des trois vecteurs:*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}].$$

2) Le produit mixte est invariant par permutation circulaire, c'est à dire, si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace, alors

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}].$$

Preuve. 1)

$$[\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Rightarrow$$

$$[\vec{u} + \vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] + [\vec{u} + \vec{v}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Rightarrow$$

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Rightarrow$$

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}].$$

On établit l'autre identité de la même manière.
2)

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}].$$

□

Proposition 5.13. *Soient $\vec{u}(x, y, z)$, $\vec{v}(x', y', z')$, et $\vec{w}(x'', y'', z'')$ trois vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$, muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Alors*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x(y'z'' - y''z') - x'(yz'' - y''z) + x''(yz' - y'z).$$

On dit qu'on a développé le déterminant par rapport à la première ligne.

Preuve.

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}, x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}, x''\overrightarrow{i} + y''\overrightarrow{j} + z''\overrightarrow{k}]$.

En utilisant la proposition 5.11, on déduit que

$$\begin{aligned}[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] &= xy'z''[\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}] + xz'y''[\overrightarrow{i},\overrightarrow{k},\overrightarrow{j}]\\ &+yx'z''[\overrightarrow{j},\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}] + yz'x''[\overrightarrow{j},\overrightarrow{k},\overrightarrow{i}]\\ &+zx'y''[\overrightarrow{k},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}] + zy'x''[\overrightarrow{k},\overrightarrow{j},\overrightarrow{i}].\end{aligned}$$

Pour conclure, on utilise le fait que $[\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}] = 1$ et la Proposition 5.12. $\square$

Remarque 5.14. Dans la proposition ci-dessus, on aurait pu aussi développer le déterminant par rapport à la deuxième ligne, ou la troisième. On peut aussi développer le déterminant par rapport aux colonnes au lieu des lignes.

Exemple 5.15. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ où

$$u_1 = (1,5,7), \quad u_2 = (-1,2,1) \quad u_3 = (2,1,0),$$

est linéairement indépendante. En effet, on a

$$\det(u_1,u_2,u_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2\\ 5 & 2 & 1\\ 7 & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

Développons ce déterminant par rapport à la colonne 3, on obtient

$$\det(u_1,u_2,u_3) = 2\begin{vmatrix} 5 & 2\\ 7 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1\\ 7 & 1\end{vmatrix} = 2(5-14) - (1+7) = -26 \neq 0.$$

Remarque 5.16. On peut aussi utiliser la définition d'une famille libre, c'est à dire supposer que pour des scalaires réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, on a

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i = 0,$$

et travailler le système. L'avantage de l'utilisation du déterminant, est qu'on travaille uniquement avec les coordonnées des u_i.

6. Equations de plans et de droites.

6.1. **Droites dans le plan.**

Soient M et M' deux points du plan. La droite (MM') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

Exemples 6.1. Munissons $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O,\vec{i},\vec{j})$.
1) La droite d'équation $y = 1$ passe par le point $(0,1)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{i}$.
2) La droite d'équation $y = 3x$ passe par le point O et est dirigée par le vecteur $(1,3)$.

Soient A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur du plan. La droite $\mathcal{D}$ passant par A et dirigée par $\vec{u}$ est formée par les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Autrement dit

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} : \overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vec}\{\vec{u}\}\}.$$

On déduit le résultat bien connu suivant:

Proposition 6.2. *Toute droite du plan $\mathcal{P}$ admet une équation cartésienne du type:*

$$ax + by + c = 0, \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Réciproquement, toute équation de la forme $ax+by+c=0$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ représente une droite du plan.

Preuve. Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan passant par un point fixé $A(a_0, b_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(x_0, y_0)$. Soit $M(x,y)$ un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \{\overrightarrow{AM}, \vec{u}\} \text{ liée} \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a_0 & x_0 \\ y-b_0 & y_0 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow -x_0(y-b_0) + y_0(x-a_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow y_0x - x_0y - a_0y_0 + b_0x_0 = 0. \end{aligned}$$

Réciproquement, étant donné une équation (E) de la forme $ax+by+c = 0$ où $(a,b) \neq (0,0)$, considérons trois points du plan $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ et $M(x,y)$ qui vérifient (E). Alors

$$c = -ax_0 - by_0, \ a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0) = 0, \text{ et } a(x-x_0)+b(y-y_0) = 0.$$

Si $a \neq 0$, alors

$$x_1 - x_0 = -\frac{b}{a}(y_1 - y_0), \text{ et } x - x_0 = -\frac{b}{a}(y - y_0).$$

D'où,

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \begin{vmatrix} x_1-x_0 & x-x_0 \\ y_1-y_0 & y-y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient la même conclusion si $b \neq 0$. Donc (E) représente la droite (AB). $\square$

Définition 6.3. *Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan dirigée par un vecteur $\vec{u}$. Un vecteur non nul $\vec{n}$ du plan est dit normal à $\mathcal{D}$ s'il est orthogonal à $\vec{u}$, c'est à dire $\vec{n}.\vec{u} = 0$.*

Remarque 6.4. Soient $\mathcal{D}$ une droite du plan et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$. Alors $\vec{n}$ est géométriquement orthogonal à $\mathcal{D}$.

Exemple 6.5. Donnons l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1,-1)$ et dirigée par le vecteur $(3,0)$. Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \{\overrightarrow{AM},(3,0)\} \text{ linéairement dépendante} \\ &\Leftrightarrow \det((x-1,y+1),(3,0)) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(y+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = -1. \end{aligned}$$

Donc l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est :" $y=-1$."
Donnons un vecteur normal à $\mathcal{D}$. Soit $\vec{v}(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\vec{v}$ est normal à $\mathcal{D}$ ssi

$$\langle (3,0), \vec{v}\rangle = 0, \text{ c'est à dire } 3x = 0.$$

D'où, $(0,1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Proposition 6.6 (vecteur directeur, vecteur normal). *Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *et* $c \in \mathbb{R}$. *Soit* $\mathcal{D}$ *la droite d'équation cartésienne*

$$ax + by + c = 0.$$

Alors le vecteur $\vec{u} = (-b,a)$ *est un vecteur* ***directeur*** *de* $\mathcal{D}$ *et le vecteur* $\overrightarrow{n} = (a,b)$ *est un vecteur* ***normal*** *à* $\mathcal{D}$.

Preuve. Soient $M\ (x,y)$ et $M'\ (x',y')$ deux points de la droite $\mathcal{D}$. Alors $\mathcal{D}$ est dirigée par $\overrightarrow{MM'}$.

$$\begin{aligned} ax+by+c=0 \text{ et } ax'+by'+c=0 \quad &\Rightarrow \\ a(x'-x)+b(y'-y)=0 \quad &\Rightarrow \\ \det\left((-b,a),\overrightarrow{MM'}\right) = 0 = \langle (a,b),\overrightarrow{MM'}\rangle & \end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ et MM' sont colinéaires et $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MM'}$. □

Remarques et Astuces.

- Pour trouver une équation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$ passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on peut écrire:

$$M \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow det\big(\overrightarrow{AM},\vec{u}\big) = 0.$$

- Pour trouver une équation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$ passant par un point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$, on peut considérer la proposition:

$$M \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0.$$

- Pour trouver une équation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$ passant par deux points distincts A et B, on peut considérer:

$$M \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow A,B,M \text{ alignés } \Longleftrightarrow det\big(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\big) = 0.$$

Rappelons que deux droites sont dites parallèles si elles ont la même direction.

Proposition 6.7. *Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites d'équations cartésiennes respectives $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.*

- *$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles ($\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$) si, et seulement si, les vecteurs (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont proportionnels, c'est à dire, si la famille $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$ est liée.*
- *$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires ($\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$) si, et seulement si, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.*

Preuve. $\mathcal{D}_1$ est dirigée par le vecteur $(-b_1, a_1)$ et $\mathcal{D}_2$ est dirigée par le vecteur $(-b_2, a_2)$. D'où

$$\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \{(-b_1, a_1), (-b_2, a_2)\} \text{ est liée } \Leftrightarrow \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\} \text{ est liée, et}$$

$$\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \langle(-b_1, a_1), (-b_2, a_2)\rangle = 0 \Leftrightarrow b_1b_2 + a_1a_2 = 0.$$

□

Définition 6.8. *Soit $\mathcal{D}$ une droite dirigée et orientée par un vecteur unitaire $\vec{u}$. Soient A et B deux points de $\mathcal{D}$. On appelle mesure algébrique $\overline{AB}$, du couple de points (A, B), l'unique réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\, \vec{u}$.*

Remarque 6.9. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ont le même sens, alors $\overline{AB} = AB$. Sinon, $\overline{AB} = -AB$.

Rappelons que si $\mathcal{D}$ est une droite du plan et $M \in \mathcal{P}$ alors la distance de M à $\mathcal{D}$ est égale à $\|\overrightarrow{MH}\|$, où H est la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$. De plus, $d(M, \mathcal{D}) \leq d(M, N)$ pour tout point N de $\mathcal{D}$.

Proposition 6.10. *Distance d'un point à une droite*
Munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x_M, y_M) et soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Si $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, alors la distance de M à $\mathcal{D}$ est

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Preuve. Le vecteur (a, b) est normal à la droite $\mathcal{D}$. Donc si H (x_H, y_H) est la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$, alors $\overrightarrow{MH}$ et le vecteur (a, b) sont colinéaires. De plus, $ax_H + by_H + c = 0$ puisque $H \in \mathcal{D}$. D'où,

$$\begin{aligned} |\langle \overrightarrow{MH},\ (a, b)\rangle| &= \|\overrightarrow{MH}\|\ \|(a, b)\| \Rightarrow \\ \|\overrightarrow{MH}\| &= \frac{|(x_H - x_M)a + (y_H - y_M)b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \\ d(M, \mathcal{D}) &= \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

□

Exemple 6.11. Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2x + y - 1 = 0$ et A le point du plan de coordonnées $(3, 0)$. Donnons $d(A, \mathcal{D})$.

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|2 \times 3 - 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{5\sqrt{5}}{5}.$$

Exercice 6.12. Soit $M \in \mathcal{P}$ et soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Désignons par H la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$. Montrer que pour tout point M' de $\mathcal{D}$,

$$d(M', M) = d(M, \mathcal{D}) \Leftrightarrow M' = H.$$

Solution. On a

$$d(M', M) = \|\overrightarrow{M'M}\| = \|\overrightarrow{M'H} + \overrightarrow{HM}\|.$$

Or, $\overrightarrow{M'H} \perp \overrightarrow{HM}$. D'où,

$$\|\overrightarrow{M'H} + \overrightarrow{HM}\|^2 = \|\overrightarrow{M'H}\|^2 + \|\overrightarrow{HM}\|^2 = \|\overrightarrow{M'H}\|^2 + d(M, H)^2.$$

Ainsi,

$$d(M', M) = d(M, H) \Leftrightarrow M' = H.$$

Proposition 6.13. *Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (0, \vec{i}, \vec{j})$. Une équation de $\mathcal{D}$ en coordonnées polaires est de la forme:*
1) $\theta = \theta_0$ si $\mathcal{D}$ passe par O.
2) $r = \frac{1}{\alpha\ \cos\theta + \beta\ \sin\theta}$ si $\mathcal{D}$ ne passe pas par O.

Preuve. Supposons d'abord que $\mathcal{D}$ passe par l'origine et soit A un point de $\mathcal{D}$ de coordonnées polaires (r_0, θ_0). Alors pour point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées polaires (r, θ), on a

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \theta = \theta_0.$$

Ainsi, $\mathcal{D}$ peut être déterminée par l'angle qu'elle fait avec l'axe (Ox). par Supposons maintenant que la droite $\mathcal{D}$ ne passe pas par l'origine. Soit (E) : $ax + by + c = 0$ l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$. Alors $c \neq 0$. Ecrivons en coordonnées polaires

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Donc

$$\text{(E)} \ \Leftrightarrow r(a\cos\theta + b\sin\theta) = -c \Leftrightarrow r = \frac{-c}{a\ \cos\theta + b\ \sin\theta}.$$

□

Exemple 6.14. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0$, considérons la droite verticale $\mathcal{D}$ qui passe par le point $A(2, 0)$. Donnons son équation polaire.

$\mathcal{D}$ est la droite dirigée par le vecteur $(0,1)$ et passe par A. Donc une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $x=2$. D'où, une équation polaire de $\mathcal{D}$ est

$$r=\frac{2}{\cos\theta}.$$

Proposition 6.15 (Equation paramétrique d'une droite). *Dans le plan $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0=(0,\vec{i},\vec{j})$, une droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\vec{u}=(u_x,u_y)$ et passant par un point A de coordonnées (x_A,y_A) peut être paramétrée par:*

$$\begin{cases} x &= x_A+t\,u_x \\ \\ y &= y_A+t\,u_y \end{cases}, \ \textit{avec } t\in\mathbb{R}.$$

Preuve. Soit $M(x,y)\in\mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{D} &\Leftrightarrow \{\overrightarrow{MA},\vec{u}\} \text{ liée} \\ &\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{MA}=t\vec{u} \\ &\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\ (x_A-x,y_A-y)=t(u_x,u_y). \end{aligned}$$

□

Exemple 6.16. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $(1,2)$ et dirigée par $(2,-1)$. Alors une paramétrisation de $\mathcal{D}$ est

$$\begin{cases} x &= 1+2t \\ \\ y &= 2-t \end{cases}, \ \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

Exercice 6.17. Soient A, B et C trois points du plan vérifiant

$$AB+BC=AC.$$

Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Réponse. TD.

6.2. **Plans dans l'espace.**

Proposition 6.18. *Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, considèrons le plan $\mathcal{P}$ dirigé par les vecteurs $\vec{u}=(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\vec{v}=(\alpha',\beta',\gamma')$ et passant par le point $A(x_A,y_A,z_A)$. Alors on a les équations paramétriques suivantes de $\mathcal{P}$:*

$$\begin{cases} x-x_A &= t\alpha+t'\alpha' \quad (1) \\ y-y_A &= t\beta+t'\beta' \quad (2) \\ z-z_A &= t\gamma+t'\gamma' \quad (3) \quad \textit{avec } t,t'\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

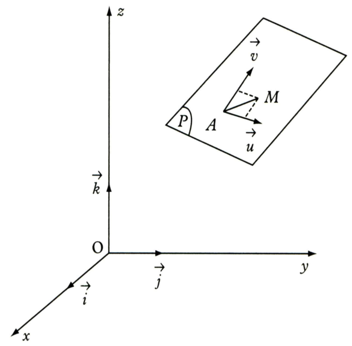

FIGURE 9. Plan dans l'espace

Preuve. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Si $M \in \mathcal{P}$, alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur de $\mathcal{P}$. La réciproque est aussi vraie. D'où,

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}.$$

□

Théorème 6.19. *Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormal, soit $\mathcal{P}$ un plan quelconque. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par:*

$$ax + by + cz + d = 0.$$

De plus, le vecteur $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ est orthogonal au plan $\mathcal{P}$.

Preuve. Supposons que $\mathcal{P}$ est déterminé par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et deux vecteurs $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ de $\mathcal{E}$. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}] = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & x - x_A \\ \beta & \beta' & y - y_A \\ \gamma & \gamma' & z - z_A \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

On développe le déterminant et on obtient

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (\beta\gamma' - \beta'\gamma)(x - x_A) + (\alpha'\gamma - \alpha\gamma')(y - y_A) + (\alpha\beta' - \beta\alpha')(z - z_A) = 0.$$

D'où l'équation désirée. □

Exemple 6.20. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0$, donnons une équation cartésienne du plan (ABC), déterminé par les points de l'espace $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 2, 1)$ et $C(0, 3, 3)$.

Soit $M \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\} \text{ linéairement dépendante .} \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z-3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow -\begin{vmatrix} y-2 & 0 \\ z-3 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ z-3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow x + y - z = 0.
\end{aligned}$$

Proposition 6.21 (**Distance d'un point à un plan**). *Soit $\mathcal{P}$ un plan et $M(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace. Alors on a les deux formules suivantes pour $d(M, \mathcal{P})$.*

(1) *Si $\mathcal{P}$ admet une équation cartésienne: $ax + by + cz + d = 0$, alors la distance de M à $\mathcal{P}$ est:*

$$d\big(M, \mathcal{P}\big) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(2) *Si A est un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, alors la distance de M à $\mathcal{P}$ est:*

$$d\big(M, \mathcal{P}\big) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{n}\|}{\|\overrightarrow{n}\|}.$$

Preuve. Considérons la projection orthogonale $H(x_H, y_H, z_H)$ de M sur le plan $\mathcal{P}$. Alors $H \in \mathcal{P}$ et $d\big(M, \mathcal{P}\big) = \|\overrightarrow{MH}\|$. De plus, $\overrightarrow{MH}$ et la normale au plan $\vec{n}(a, b, c)$ sont colinéaires. Ainsi,

$$\begin{aligned}
|\langle \overrightarrow{MH}, \vec{n} \rangle| &= \|\overrightarrow{MH}\| \, \|\vec{n}\| & \Rightarrow \\
|a(x_H - x_0) + b(y_h - y_0) + c(z_H - z_0)| &= \|\overrightarrow{MH}\| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} & \Rightarrow \\
|-d - ax_0 - by_0 - cz_0| &= \|\overrightarrow{MH}\| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} & \Rightarrow \\
d\big(M, \mathcal{P}\big) &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.
\end{aligned}$$

D'autre part, soit $\theta = (\vec{n}, \overrightarrow{AM})$. On a $\overrightarrow{AH} \perp \vec{n}$, et

$$|\sin\theta| = \frac{\|\overrightarrow{AH}\|}{\|\overrightarrow{AM}\|}.$$

Par suite,

$$\frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{n}\|}{\|\vec{n}\|} = \|\overrightarrow{AM}\| \, |\sin\theta| = \|\overrightarrow{AH}\|.$$

□

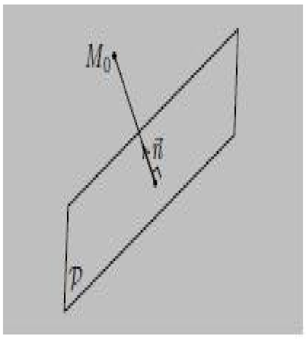

FIGURE 10. Distance d'un point à un plan

6.3. **Position relative de deux plans dans l'espace.** Donnons d'abord des définitions abstraites de plans parallèles et de plans perpendiculaires.

Définition 6.22. *1) Deux plans de l'espace sont parallèles, s'ils admettent un vecteur normal non nul commun.*
2) Deux plans de l'espace sont perpendiculaires, s'ils admettent des vecteurs normaux non nuls orthogonaux.

Exemple 6.23. Considérons l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit α un réel non nul. Le plan (xOy) a pour équation $z = 0$ et est parallèle au plan d'équation $z = \alpha$.

Proposition 6.24 (Caractérisation de la perpendicularité ou du parallélisme de deux plans à partir de leurs équations cartésiennes respectives). *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans d'équations cartésiennes respectives:*

$$ax + by + cz = d \text{ et } a'x + b'y + c'z = d'.$$

(1) *Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si, et seulement si, il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que:*
$$a' = \lambda a, b' = \lambda b \text{ et } c' = \lambda c.$$
(2) *Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus si, et seulement si, il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que:*
$$a' = \lambda a, b' = \lambda b, c' = \lambda c \text{ et } d' = \lambda d.$$
(3) *Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si,*
$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

Preuve. Le vecteur $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ est normal à $\mathcal{P}$ et le vecteur $\overrightarrow{n}' = (a', b', c')$ est normal à $\mathcal{P}'$.
1)
$$\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \Leftrightarrow \{\vec{n}, \vec{n'}\} \text{ est liée } \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ (a', b', c') = \lambda(a, b, c).$$
Certainement, λ doit être non nul.

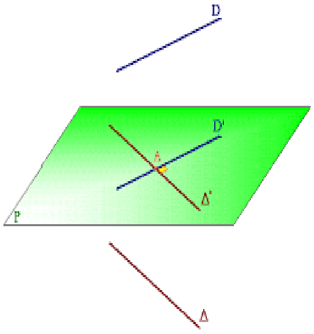

FIGURE 11. Droites dans l'espace

2) Supposons qu'en plus, $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$. Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{P}$. Alors $ax+by+cz=d$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P}' &\Leftrightarrow a'x+b'y+c'z=d' \\ &\Leftrightarrow \lambda ax+\lambda by+\lambda cz=d' \\ &\Leftrightarrow d'=\lambda d. \end{aligned}$$

3)

$$\vec{n} \perp \vec{n'} \;\Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n'} = 0 \Leftrightarrow\; aa'+bb'+cc'=0.$$

□

Proposition 6.25. *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace. Alors on a l'un des cas suivants:*

(1) *$\mathcal{P} = \mathcal{P}'$, c'est à dire que les deux plans sont confondus.*
(2) *$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles et $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$. Dans ce cas, $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$.*
(3) *Les deux plans sont sécants, et donc leur intersection est une droite.*

Preuve. Supposons que $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$ et que $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \neq \emptyset$. Soit $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$. Considérons un repère orthonormal $\mathcal{R} = (A, \vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{P}$ et un repère orthonormal $\mathcal{R}' = (A, \vec{u'}, \vec{v'})$ de $\mathcal{P}'$. Comme $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$, on a soit $\vec{u'} \notin \mathcal{P}$ ou $\vec{v'} \notin \mathcal{P}$. Supposons par exemple que $\vec{u'} \notin \mathcal{P}$. Alors la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u'}\}$ est libre. Donc c'est une base de l'espace. Par suite, il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{v'} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{u'}, \text{ d'où } \vec{v'} - z\vec{u'} = x\vec{u} + y\vec{v} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'.$$

Ainsi, $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ contient la droite passant par A et dirigée par $x\vec{u} + y\vec{v}$. Soit $M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Soit $M' \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ et supposons que $\{\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM}\}$ est libre. Alors pour tout $M" \in \mathcal{E}$ vérifiant $\overrightarrow{AM"} = \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{AM'}$, $M"$ vérifie les équations de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. D'où $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ contient le plan $(A, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})$. Ce qui contredit notre hypothèse. D'où, $\{\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM}\}$ est liée et $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite. □

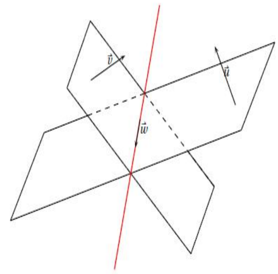

FIGURE 12. Intersection de deux plans

6.4. **Droites dans l'espace.**

Proposition 6.26. *Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considèrons une droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \big(\alpha, \beta, \gamma\big)$. Alors une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est de la forme:*

$$\begin{cases} x - x_A &= t\alpha \\ y - y_A &= t\beta \\ z - z_A &= t\gamma \end{cases}$$

Proof. Tout point $M(x, y, z)$ de $\mathcal{D}$ est tel que:

$$\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

D'où les équations ci-dessus. □

Toute droite peut être définie comme l'intersection de deux plans sécants. Soulignons que les deux plans qui définissent une droite ne sont pas uniques.

Proposition 6.27 (Equations cartésiennes d'une droite). *Toute droite $\mathcal{D}$ de l'espace admet des équations cartésiennes de la forme:*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{cases}$$

avec (a, b, c) et (a', b', c') non colinéaires.

Preuve. Supposons que $\mathcal{D}$ admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x - x_A &= t\alpha \\ y - y_A &= t\beta \\ z - z_A &= t\gamma \end{cases},$$

où $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{D}$ et $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ dirige $\mathcal{D}$. Alors $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$. Supposons par exemple que $\alpha \neq 0$, alors on déduit que

$$t = \frac{x - x_A}{\alpha},\ y = y_A + \frac{x - x_A}{\alpha}\beta,\ z = z_A + \frac{x - x_A}{\alpha}\gamma.$$

D'où, $\mathcal{D}$ est déterminée par l'intersection des deux plans d'équations

$$-\beta x + \alpha y - \alpha y_A + \beta x_A = 0, \quad -\gamma x + \alpha z - \alpha z_A + \gamma x_A = 0.$$

Remarquons que $(-\beta, \alpha, 0)$ et $(-\gamma, 0, \alpha)$ sont non colinéaires, donc les deux plans sont bien sécants.

□

Proposition 6.28. *L'intersection d'un plan $\mathcal{P}$ et d'une droite $\mathcal{D}$ est:*

- *soit vide: $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$,*
- *soit un point: $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants,*
- *soit la droite $\mathcal{D}$: $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.*

Preuve. Munissons l'espace $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Supposons que l'équation de $\mathcal{P}$ est $ax+by+cz+d = 0$ et que $\mathcal{D}$ passe par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et est dirigée par $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$.

$$M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \text{ et } \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - x_A & = t\alpha \\ y - y_A & = t\beta \\ z - z_A & = t\gamma. \end{cases}$$

Donc il suffit de résoudre l'équation (en t)

$$t(a\alpha + b\beta + c\gamma) + ax_A + by_A + cz_A + d = 0.$$

Trois cas se présentent:
Cas 1: $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ et $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$. Donc $A \in \mathcal{P}$ et $\vec{u}.\vec{n} = 0$, où $\vec{n}$ est la normale à $\mathcal{D}$. D'où, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}$.
Cas 2: $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ et $ax_A + by_A + cz_A + d \neq 0$. Alors le système n'a pas de solution et $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$.
Cas 3: $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$. Alors le système admet une unique solution et $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ se réduit à un seul point. □

Exercice 6.29. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0$, soit $\mathcal{D}$ une droite dirigée par un vecteur $\vec{u}(a, b, c)$, où $a \neq 0$.
1) Donner les équations des plans orthogonaux à $\mathcal{D}$.
2) Soit $M(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace. Donner l'équation du plan orthogonal à $\mathcal{D}$ et passant par M.

Réponse. TD

Exercice 6.30. 1) Donnons une preuve algébrique du résultat bien connu suivant:
" Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites du plan. Alors soit $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$, ou $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est réduit à un point."
2) Dans l'espace, donner un exemple de droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ qui ne sont ni parallèles, ni sécantes.

Réponse. 1) Munissons le plan d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0$. Supposons que $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $ax+by+c = 0$ et $\mathcal{D}'$ a pour équation cartésienne $a'x + b'y + c' = 0$.

Supposons que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, alors leurs vecteurs directeurs $(-b, a)$ et $(-b', a')$ ne sont pas colinéaires. Par suite

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Alors

$$M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} ax + by & = -c \\ a'x + b'y & = -c'. \end{array} \right.$$

Donc ce système d'équations est un système de Cramer, et admet une unique solution.

2) Dans l'espace, soit $\mathcal{D}$ la droite d'équations $x = y = 0$ et soit $\mathcal{D}'$ la droite d'équations $x = 1, z = 0$. Alors

$$\mathcal{D} = \{M(0, 0, z) \in \mathcal{E},\ z \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathcal{D}' = \{M(1, y, 0) \in \mathcal{E},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$. D'autre part, $\mathcal{D}$ est dirigée par $(0, 0, 1)$ et $\mathcal{D}'$ est dirigée par $(0, 1, 0)$, donc elles ne sont pas parallèles.

7. Equations caractéristiques de cercles, de sphères et d'ellipses

7.1. **Cercles.**

Proposition 7.1. *Munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (0, \vec{i}, \vec{j})$.*
1) Le cercle $\mathcal{C}(A, R)$ de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon R admet pour équation:

$$\big(x - x_A\big)^2 + \big(y - y_A\big)^2 = R^2.$$

2) Tout cercle admet une équation cartésienne du type:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

où a, b et c sont des réels constants.

Preuve. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Alors

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}(A, R) &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\| = R \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\|^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow \big(x - x_A\big)^2 + \big(y - y_A\big)^2 = R^2. \end{aligned}$$

Pour 2), il suffit de développer l'équation du cercle. □

Remarque 7.2. Si on a une équation cartésienne du type $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, on remarque que:

$$x^2 + ax = \big(x + \frac{a}{2}\big)^2 - \frac{a^2}{4} \text{ et } y^2 + by = \big(y + \frac{b}{2}\big)^2 - \frac{b^2}{4},$$

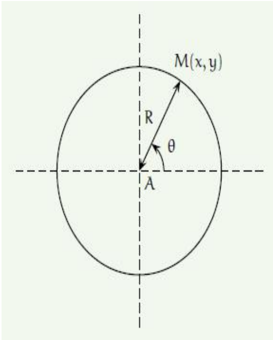

FIGURE 13. Paramétrage du cercle

et si $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \geq 0$, on se ramène à une équation du type:

$$\left(x - x_A\right)^2 + \left(y - y_A\right)^2 = R^2,$$

avec: $x_A = -\frac{a}{2}$, $y_A = -\frac{b}{2}$ et $R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$.

Proposition 7.3. *Soient A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan pour lesquels* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ *est un angle droit est le cercle de diamètre* $[AB]$.

Preuve. Soit O le milieu de $[AB]$ et considérons le repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, tel que A et B soient sur l'axe des abscisses. Donc A et B ont pour coordonnées respectives $(x_0, 0)$ et $(-x_0, 0)$. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Alors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow (x_0 - x)(-x_0 - x) + y^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x_0^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x_0^2 \\
&\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(O, x_0).
\end{aligned}$$

□

Proposition 7.4 (Paramétrage du cercle). *Dans le plan* $\mathcal{P}$ *muni du repère orthonormal* $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$, *une équation paramétrique du cercle de centre* $A(x_A, y_A)$ *et de rayon* R *est donnée par les relations:*

$$\begin{cases} x &= x_A + R\cos\theta \\ \\ y &= y_A + R\sin\theta \end{cases}, \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Soit $M \in \mathcal{C}(A, R)$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}_0$. Considérons le repère $\mathcal{R} = (A, \vec{i}, \vec{j})$. Alors M a pour coordonnées $(x - x_A, y - y_A)$ dans $\mathcal{R}$. D'autre part, les coordonnées polaires de M dans $\mathcal{R}$ sont $(R\cos\theta, R\sin\theta)$, où θ est l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{AM})$. D'où,

$$x = x_A + R\cos\theta, \quad y = y_A + R\sin\theta.$$

□

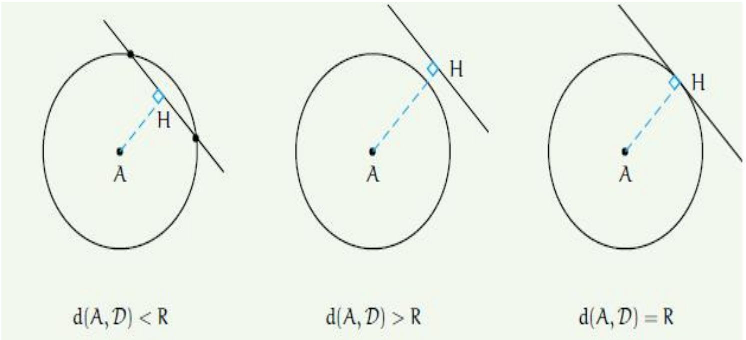

FIGURE 14. Intersection d'un cercle et d'une droite

Propriétés 7.5 (**Intersection d'un cercle et d'une droite**). *Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre A et de rayon R, et soit $\mathcal{D}$ une droite du plan $\mathcal{P}$.*
1) Si $d(A,\mathcal{D}) > R$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ n'ont aucun point d'intersection.
2) Si $d(A,\mathcal{D}) = R$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont un seul point d'intersection qui est la projection orthogonale H de A sur $\mathcal{D}$. Dans ce cas, $\mathcal{D}$ est dite ***tangente*** *à $\mathcal{C}$ en H.*
3) Si $d(A,\mathcal{D}) < R$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont deux points d'intersection distincts.

Preuve. Cas 1. $d(A,\mathcal{D}) > R$. Alors pour tout $M \in \mathcal{D}$, $d(A,M) > R$. D'où, $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \emptyset$.
Cas 2. $d(A,\mathcal{D}) = R$. Soit $H \in \mathcal{D}$ tel que $d(A,H) = R$. Alors H est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}$. Il est clair que $H \in \mathcal{C}$ et H est unique (Exercice 6.12).
Cas 3. Si $d(A,\mathcal{D}) < R$. Soit H la projection orthogonale de A sur $\mathcal{D}$. Alors $\|\overrightarrow{AH}\| < R$. Donc l'équation

$$\|\overrightarrow{HM}\|^2 = R^2 - \|\overrightarrow{AH}\|^2, \quad M \in \mathcal{D}$$

admet deux solutions (opposées par rapport à H) M_1 et M_2. Considérons le triangle rectangle (AHM_1). On a

$$\|\overrightarrow{HA}\|^2 + \|\overrightarrow{HM_1}\|^2 = \|\overrightarrow{AM_1}\|^2,$$

donc $\|\overrightarrow{AM_1}\|^2 = R^2$. D'où $M_1 \in \mathcal{C}$. De même pour le point M_2. □

7.2. **Sphère.**

Définition 7.6. *Soient A un point de l'espace $\mathcal{E}$ et ρ un réel strictement positif.*

- *La* ***sphère*** *$\mathcal{S}$ de centre A et de rayon ρ est l'ensemble des points M de l'espace tels que:*

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \rho.$$

- *La* ***boule*** *$\mathcal{B}$ de centre A et de rayon ρ est l'ensemble des points M de l'espace tels que:*

$$\|\overrightarrow{AM}\| \leq \rho.$$

On déduit facilement l'équation cartésienne d'une sphère.

Proposition 7.7 (Equation cartésienne d'une sphère). *L'équation de la sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre $A(x_0, y_0, z_0)$ et de rayon ρ est:*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \rho^2.$$

Exemple 7.8. Déterminons la nature de l'ensemble d'équation cartésienne:

$$(E): \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0.$$

On a:

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + y^2 + (z+2)^2 - 4 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 6.\end{aligned}$$

Donc (E) est l'équation d'une sphère de centre $(1, 0, -2)$ et de rayon $\sqrt{6}$.

7.3. **Equation cartésienne réduite de l'ellipse.** Donnons la définition bifocale de l'ellipse.

Définition 7.9. *Soient F et F' deux points distincts fixés dans le plan. Posons $d(F, F') = 2c$, où $c \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a > c$. Alors l'ensemble*

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} : d(M, F) + d(M, F') = 2a\}$$

est une ellipse de foyers F et F'. La distance focale de $\mathcal{E}$ est la quantité $d(F, F')$.

Avec les notations de la définition ci-dessus, soit $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a^2 - c^2 = b^2$. Soit O le milieu de $[FF']$. Considérons le repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que F et F' soient sur l'axe des abscisses. Déduisons l'équation réduite de $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}M(x,y) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow d(M,F) + d(M,F') = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow 4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow (cx - a^2)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \\ &\Leftrightarrow a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.\end{aligned}$$

O est le centre de l'ellipse. Les sommets de l'ellipse ont pour coordonnées $(a, 0), (-a, 0)$ et $(0, b), (0, -b)$.
La droite (FF') est appelée axe focal de l'ellipse. La médiatrice du segment $[FF']$ est appelée axe non focal de l'ellipse (Fig. 15).

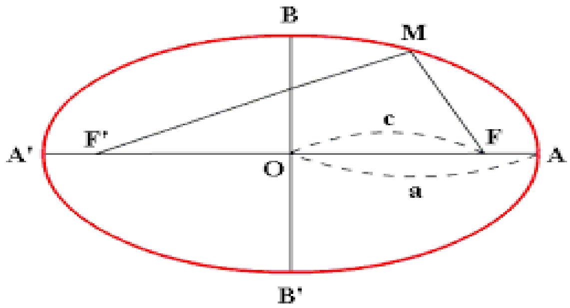

FIGURE 15. Ellipse

Proposition 7.10. *Dans le plan muni du repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$, l'équation cartesienne réduite de l'ellipse de centre O et d'axes $(O, \vec{i})$, $(O, \vec{j})$ s'écrit:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $0 < b < a$.

Exercice 7.11. Dans le plan muni du repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$, considérons l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ où } a, b \in \mathbb{R} \text{ et } 0 < b < a.$$

Posons $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $e = \frac{c}{a}$ et considérons le point F de coordonnées $(c, 0)$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = \frac{a^2}{c}$.
Montrer que

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} : d(M, F) = ed(M, \mathcal{D})\}.$$

Réponse. Soit $M(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned}
d(M, F) = ed(M, \mathcal{D}) \quad &\Leftrightarrow \quad d(M, F)^2 = e^2 d(M, \mathcal{D})^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (c - x_0)^2 + y_0^2 = \frac{c^2}{a^2}(x_0 - \frac{a^2}{c})^2 \\
&\Leftrightarrow \quad c^2 + x_0^2 - 2cx_0 + y_0^2 = \frac{c^2}{a^2}x_0^2 + a^2 - 2cx_0 \\
&\Leftrightarrow \quad c^2 + x_0^2 + y_0^2 = x_0^2 - \frac{b^2}{a^2}x_0^2 + a^2 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 + y_0^2 = -\frac{b^2}{a^2}x_0^2 + a^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad M \in \mathcal{E}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer la définition monofocale de l'ellipse

Définition 7.12. *Soient F un point de $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$ et $e \in]0,1[$. Alors l'ellipse de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e est l'ensemble*

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} : d(M,F) = ed(M,\mathcal{D})\}.$$

7.4. **Barycentre.**

Définition 7.13. *Soient $M_1, \dots, M_n$ des points de $\mathcal{E}$. On associe à chaque point M_i un réel α_i. Alors on dit que la famille des points (M_i, α_i) est* ***pondérée****.*

Théorème 7.14. *Soit $(M_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$ une famille finie de points pondérés de l'espace tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Alors il existe un unique point G de $\mathcal{E}$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GM_i} = 0$. De plus, pour tout point H de $\mathcal{E}$, on a*

$$\overrightarrow{HG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{HM_i}.$$

Le point G est appelé ***barycentre*** *de la famille $(M_i, \alpha_i)_{1\le i\le n}$.*

Preuve. Soit H un point quelconque de l'espace. Munissons l'espace $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormal $\mathcal{R}$ d'origine H et supposons que dans $\mathcal{R}$, M_i a pour coordonnées (x_i, y_i, z_i) pour tout i. Soit $G(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GM_i} &= 0 \Leftrightarrow \\
\sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - x, y_i - y, z_i - z) &= 0 \Leftrightarrow \\
(x,y,z) &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i, y_i, z_i).
\end{aligned}$$

□

Proposition 7.15. *1) L'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B de l'espace est la droite passant par A et B.*

2) L'ensemble des barycentres de 3 points non alignés A, B et C est le plan défini par A, B et C.

Preuve. Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormal fixé de $\mathcal{E}$.
1) Soient (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) les coordonnées respectives de A et B dans $\mathcal{R}$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que que $\alpha+\beta \neq 0$. Alors le barycentre G de (A,α) et (B,β) a pour coordonnées

$$\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha x_A + \beta x_B, \alpha y_A + \beta y_B, \alpha z_A + \beta z_B), \quad \text{d'où}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$$

En particulier, $G \in (AB)$.
Réciproquement, si $G \in (AB)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Choisissons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha + \beta \neq 0$ et $\lambda = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$. Alors G est le barycentre de (A, α) et (B, β).
2) Soient (x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B) et (x_C, y_C, z_C) les coordonnées respectives de A, B et C et soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Alors le barycentre G de (A, α) , (B, β) et (C, γ) a pour coordonnées

$$\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C, \alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C, \alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C),$$

$$\text{d'où} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}).$$

En particulier, G est dans le plan contenant A, B et C.
Réciproquement, si G est un point du plan défini par A, B et C, alors il existe $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AB} + \lambda'\overrightarrow{AC}$. Clairement, on peut trouver α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{et} \quad \lambda' = \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Alors, G est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ).

□

Vocabulaire. Soient A, B et C trois points non alignés fixés de l'espace et soit M un point du plan défini par A, B et C. Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est tel que $x + y + z \neq 0$ et M est le barycentre de (A, x), (B, y) et (C, z), on dit que (x, y, z) est le triplet de coordonnées barycentriques de M relativement à (A, B, C). Si de plus, on suppose que $x+y+z = 1$, on dit que (x, y, z) est le triplet de coordonnées barycentriques normalisées du point M. De la preuve ci-dessus, on déduit que le triplet de coordonnées barycentriques normalisées est unique.

8. Quelques transformations principales du plan et de l'espace

8.1. **Définitions et quelques propriétés.** Une transformation du plan $\mathcal{P}$ (resp. de l'espace $\mathcal{E}$) est une application du plan $\mathcal{P}$ (resp. de l'espace) dans lui-même. Dans ce cours, nous étudierons des exemples de transformations géométriques simples du plan et de l'espace. Certaines d'entre elles sont bijectives, comme les translations, les rotations, d'autres ne le sont pas, comme les projections.
Certains auteurs emploient le terme "transformation" uniquement dans le cas bijectif. Dans ce cours, nous utiliserons ce terme au sens général.

Translations.

Définition 8.1. *1) Une **translation** t **de** $\mathcal{P}$ **de vecteur** $\vec{u}$ est une application*

$$\begin{array}{rcl} t : \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M & \mapsto & M' \end{array}$$

tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. On la note $t_{\vec{u}}$.
*2) Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. L'application $t_{\vec{u}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui à chaque point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ est appelée **translation de vecteur** $\vec{u}$.*

Remarques 8.2. 1) Dans $\mathcal{P}$, $t_{\vec{0}} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$, où $\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ est l'application identité

$$\mathrm{id}_{\mathcal{P}}(M) = M, \quad \forall M \in \mathcal{P}.$$

De même, dans $\mathcal{E}$, $t_{\vec{0}} = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

2) Munissons $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{E}$) d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0$. Si $M(x, y) \in \mathcal{P}$ (resp. $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$) et $\vec{u}\ (x_0, y_0)$ (resp. $\vec{u}\ (x_0, y_0, z_0)$) est un vecteur de $\mathcal{P}$ (resp. de $\mathcal{E}$), alors $t_{\vec{u}}(M) = M'(x + x_0, y + y_0)$, (resp. $t_{\vec{u}}(M) = M'(x + x_0, y + y_0, z + z_0)$).

Lemme 8.3. *Si t est une translation non triviale du plan ou de l'espace ($t \neq \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$), alors t n'admet pas de point invariant.*

Preuve. Faisons la preuve dans le plan. Le cas de l'espace est similaire.
Posons $t = t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ a pour coordonnées (x_0, y_0) dans $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormal $\mathcal{R}_0$. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$.
Comme $t \neq \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$, alors $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. D'où,

$$t_{\vec{u}}(M) = M'\ (x + x_0, y + y_0) \neq (x, y).$$

Par suite, t n'admet pas de point invariant. □

Proposition 8.4. *1) Pour tous points M, M' du plan ou de l'espace, $t = t_{\overrightarrow{MM'}}$ est l'unique translation du plan vérifiant $t(M) = M'$.*
2) Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.
3) Toute translation $t_{\vec{u}}$ sur $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{E}$ est bijective et $t_{\vec{u}}^{-1} = -t_{\vec{u}}$.

Preuve. Traitons le cas du plan. Le cas de l'espace est similaire.
Munissons $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0$.
1) Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points du plan. Soit $\vec{u}(x_0, y_0)$ un vecteur du plan.

$$\begin{array}{rcl} t_{\vec{u}}(M) = M' & \Leftrightarrow & (x + x_0, y + y_0) = (x', y') \\ & \Leftrightarrow & x_0 = x' - x \text{ et } y_0 = y' - y \\ & \Leftrightarrow & \vec{u} = \overrightarrow{MM'}. \end{array}$$

2) Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Soient (x_0, y_0) et (x'_0, y'_0) les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a

$$\begin{aligned}(t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}})(M) &= t_{\vec{u}}(t_{\vec{v}}(M)) \\ &= t_{\vec{u}}(M'(x + x'_0, y + y'_0) \\ &= M''(x + x'_0 + x_0, y + y'_0 + y_0) \\ &= t_{\vec{u}+\vec{v}}(M).\end{aligned}$$

3) Soient (x_0, y_0) les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathcal{R}_0$. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$.

$$t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{-\vec{u}+\vec{u}} = t_{\vec{0}} = t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}},$$

Or, $t_{\vec{0}} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$, d'où $t_{\vec{u}}$ est bijective et sa bijection réciproque est $t_{-\vec{u}}$. □

Proposition 8.5. *L'image d'une droite $\mathcal{D}$ par une translation $t_{\vec{u}}$ est une droite $\mathcal{D}'$ qui est parallèle à $\mathcal{D}$. Si de plus, $\vec{u}$ dirige $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.*

Preuve. $\mathcal{D}$ et $\vec{u}$ sont dans un même plan. Donc on peut se ramener au cas du plan.
Munissons $\mathcal{P}$ du repère orthonormal $\mathcal{R}_0$. Soit $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de $\mathcal{D}$, où a, b et c sont des constantes réelles.
Soient (x_0, y_0) les coordonnées de $\vec{u}$ et soit $M(x', y') \in \mathcal{D}$. Alors $ax' + by' + c = 0$. On a

$t_{\vec{u}}(M) = M'(x'+x_0, y'+y_0)$ et $a(x'+x_0)+b(y'+y_0)+c-ax_0-by_0 = 0$.

D'où, $t_{\vec{u}}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}'$, où $\mathcal{D}'$ est la droite d'équation

$$(\mathrm{E}) : \ ax + by + c - ax_0 - by_0 = 0.$$

D'autre part, soient $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E). Soit $M_1 \in \mathcal{D}$ de coordonnées $(x - x_0, y - y_0)$. Alors $t_{\vec{u}}(M_1) = M(x, y)$. Ainsi, $t_{\vec{u}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$.
Enfin, supposons que $\vec{u}$ dirige $\mathcal{D}$. Alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = (-tb, ta)$. Or

$$c - a(-tb) - b(ta) = c,$$

D'où $t_{\vec{u}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.

□

Notation. Si A et M sont deux points du plan ou de l'espace, on note

$$M = A + \overrightarrow{AM}, \text{ d'où } M = A + \overrightarrow{AM} = t_{\overrightarrow{AM}}(A).$$

Remarque 8.6. Avec la notation ci-dessus, si $\mathcal{D}$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}$ et passant par le point A dans le plan ou l'espace, on a

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{E} : M = A + \vec{v}, \text{ où } \vec{v} \in \mathrm{Vec}\{\vec{u}\}\} = A + \mathrm{Vec}\{\vec{u}\}.$$

Homothéties.

Définition 8.7. *1) Soit A un point du plan et soit k un réel non nul. Une **homothétie** h **de centre** A **et de rapport** k est une transformation $h : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ définie par*

$$M \mapsto M' \text{ et tel que } \overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}.$$

On la note aussi $h_{A,k}$.
*2) Soient $A \in \mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{R}$. L'application $h_{A,k} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui à chaque point $M \in \mathcal{E}$ associe M' tel que $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$ est appelée **homothétie de centre** A **et de rapport** k.*

Remarque 8.8. Dans $\mathcal{P}$, $h_{A,1} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ et dans $\mathcal{E}$, $h_{A,1} = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

Proposition 8.9. *1) Soit h une homothétie de centre A et de rapport k du plan ou de l'espace. Si $k \neq 1$, alors h admet un unique point invariant qui est A.*
2) Soient A et B deux points du plan (resp. de l'espace) et soient k et k' deux réels différents de 1. Si $h_{A,k} = h_{B,k'}$ alors $A = A'$ et $k = k'$.

Preuve. Faisons les preuves dans le cas du plan. Le cas de l'espace est similaire.
1) Soit $M \in \mathcal{P}$ un point invariant pour h.

$$h(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 0 \text{ (puisque } k \neq 1).$$

D'où, $M = A$.
2) Supposons que $h_{A,k} = h_{B,k'}$. Comme k et k' sont différents de 1, alors l'unique point invariant est $A = B$. Soit $M \in \mathcal{P}$, $M \neq A$. Posons $h_{A,k}(M) = M'$. Alors

$$\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM} = k'\overrightarrow{AM}.$$

Or $\overrightarrow{AM} \neq 0$, d'où $k = k'$. □

Proposition 8.10. *Soit A un point du plan (resp. de l'espace) et soit $h = h_{A,k}$ une homothétie de centre A et de rapport k, où $k \in \mathbb{R}^*$.*
1) *L'homothétie h agrandit les figures si $k > 1$, et les réduit si $k < 1$.*
2) *Soit $\mathcal{F}$ une figure du plan (resp. de l'espace). L'aire de $h(\mathcal{F})$ est multipliée par k^2.*
3) *Si $k < 0$, alors h change l'orientation des figures.*
4) *Si $k \neq 1$, l'image d'une droite $\mathcal{D}$ par h est une droite $\mathcal{D}'$, telle que:*
 ✓ *$\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ si A est sur $\mathcal{D}$.*
 ✓ *$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ si A n'est pas sur $\mathcal{D}$.*
5) *Soit $k' \in \mathbb{R}^*$. Alors $h_{A,k'} \circ h_{A,k} = h_{A,kk'}$.*

Preuve. Traitons le cas du plan. Le cas de l'espace est similaire. Si $M \in \mathcal{P}$, notons $h(M) = M'$. Soit $\mathcal{F}$ une figure donnée dans le plan. Si $M_1, M_2 \in \mathcal{F}$, alors

$$\overrightarrow{M_1'M_2'} = \overrightarrow{M_1'A} + \overrightarrow{AM_2'} = k(\overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AM_2}) = k\overrightarrow{M_1M_2}.$$

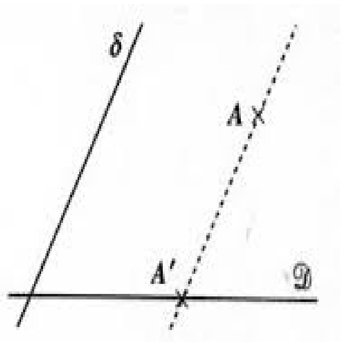

FIGURE 16. Projection sur une droite $\mathcal{D}$ parallélement à une droite δ

Donc si $k > 1$, h agrandit la figure et si $k < 1$, h réduit la figure, d'où 1). On en déduit aussi 2). D'autre part, si $k < 0$, h change l'orientation de $\mathcal{F}$, ce qui prouve 3).
Pour 4), si $M_1, M_2 \in \mathcal{D}$, alors

$$\overrightarrow{M_1'M_2'} = k\overrightarrow{M_1M_2}.$$

Donc si $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{D}$, leurs images M_1', M_2', M_3' restent alignés. Donc l'image de $\mathcal{D}$ est contenue dans une droite $\mathcal{D}'$ qui a la même direction que $\mathcal{D}$. D'autre part, étant donné un point $M' \in \mathcal{D}'$, l'équation $\overrightarrow{M_1'M'} = k\overrightarrow{M_1M}$ admet un unique point M solution. D'où $h(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$. En particulier, si $A \in \mathcal{D}$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un point commun. D'où $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
Finalement, pour 5), si $M \in \mathcal{P}$, posons $h_{A,k'}(M') = M_1$. Alors

$$\overrightarrow{AM_1} = k'\overrightarrow{AM'} = kk'\overrightarrow{AM}.$$

D'où $h_{A,k'} \circ h_{A,k}(M) = h_{A,kk'}(M)$. □

Projections.

Définition 8.11. *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes du Plan $\mathcal{P}$. On appelle **projection sur $\mathcal{D}$ parallélement à $\mathcal{D}'$** l'application qu'on note $P_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}$ et qui à un point M du plan associe le point M', qui est le point intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'_M$, la droite paralléle à $\mathcal{D}'$ et passant par M (Fig. 16).*
Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales, $P_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$, et on la note $P_{\mathcal{D}}$.

Remarques 8.12. 1) Avec les notations de la définition ci-dessus, on a: $P_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.
2) Pour toute projection $P = P_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}$, on a: $P^2 = P$.

Exemple 8.13. Dans $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal, soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = 2$ et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation $y = x + 1$. Donnons l'image du point $M(1,1)$ par $P_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}$. Posons $P_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}(M) = M'(x,y)$. Alors:

$$M' \in \mathcal{D} \text{ et } (MM') \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow x = 2 \text{ et } \{(2,y),(1,1)\} \text{ liée.}$$

D'où, M' a pour coordonnées $(2,2)$.

Définition 8.14. *Dans l'espace $\mathcal{E}$, soient $\mathcal{P}$ un plan et Δ une droite qui n'est pas contenue dans $\mathcal{P}$. La **projection sur $\mathcal{P}$ parallélement à** Δ est l'application notée $P_{\mathcal{P},\Delta}$ qui à chaque point M de l'espace associe le point M' qui est le point intersection de $\mathcal{P}$ avec la droite Δ_M, qui est paralléle à Δ et passe par M (Fig. 17). Si Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$, on la note $P_{\mathcal{P}}$, c'est la projection orthogonale usuelle.*

Exemple 8.15. Soit $\mathcal{P}$ le plan (xOy) dans l'espace muni du repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit Δ la droite dirigée par $\vec{i}+\vec{k}$ et soit $M(x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{E}$. Trouvons $M'(x,y,z) = P_{\mathcal{P},\Delta}(M)$.

$$\begin{aligned} M' \in \mathcal{P} \cap \Delta_M &\Leftrightarrow z = 0 \text{ et } \{\overrightarrow{MM'}, \vec{i}+\vec{k}\} \text{ liée} \\ &\Leftrightarrow z = 0 \text{ et } \exists t \in \mathbb{R}, (x,y,z) = (t+x_0, y_0, t+z_0) \\ &\Leftrightarrow t = -z_0, x = x_0 - z_0, y = y_0, z = 0. \end{aligned}$$

D'où $M'(x_0 - z_0, y_0, 0)$.

Remarque 8.16. Soit P une projection (comme définie ci-dessus). Alors $P^2 = P$. Cette propriété caractérise les projections.

Exercice 8.17. Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni du repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y+z=1$ et D la droite dirigée par $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ et passant par l'origine. Donnons l'expression analytique de la projection $P_{\mathcal{P},D}$ par rapport à $\mathcal{P}$, parallélement à D.

Réponse. Soit $M : (x,y,z)$ un point de l'espace et soit $M' : (x',y',z')$ son image par rapport à $P_{\mathcal{P},D}$. Il faut avoir

$$M' \in \mathcal{P} \text{ et } \overrightarrow{MM'} \in \text{ Vect}\{\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\}.$$

Donc on a

$$x' + y' + z' = 1$$

et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rr} x' - x = & \lambda \\ y' - y = & \lambda \\ z' - z = & -\lambda \end{array}\right.$$

Par suite, $1 - x - y - z = \lambda$. D'où

$$\left\{\begin{array}{rr} x' = & -y - z + 1 \\ y' = & -x - z + 1 \\ z' = & x + y + 2z - 1 \end{array}\right.$$

Rotations dans le plan.

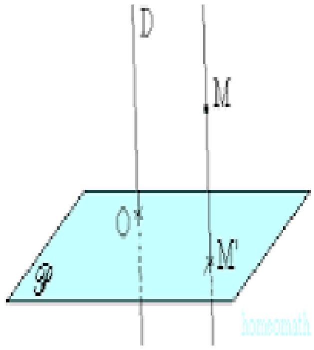

FIGURE 17. Projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à D

Définition 8.18. *Soient α un réel et A un point du plan. La* ***rotation*** *r* ***de centre*** *A* ***et d'angle*** *α est la transformation $r : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, qui laisse A invariant, et si M est un point du plan distinct de A alors*

$$r(M) = M' \text{ avec } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \alpha, \quad \text{et } AM = AM'.$$

On la note aussi $r_{A,\alpha}$.

Remarques 8.19. Soit $r = r_{A,\alpha}$ une rotation de centre A et d'angle α.
1) Soit $M \in \mathcal{P}$. Si M a pour coordonnées $(\rho\cos\theta_0, \rho\sin\theta_0)$ dans le repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (A, \vec{i}, \vec{j})$, où $\rho \in \mathbb{R}$, alors $r_{A,\alpha}(M) = M'$ où M' a pour coordonnées $(\rho\cos(\alpha+\theta_0), \rho\sin(\alpha+\theta_0))$.
2) $r_{A,-\alpha} \circ r_{A,\alpha} = r_{A,\alpha} \circ r_{A,-\alpha} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

Propriétés 8.20. *Soit r une rotation de centre A et d'angle α qui à chaque point M du plan associe un point M'. Alors*
1) r preserve les angles, c'est à dire si M_1, M_2 sont deux points du plan, $(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}) = (\overrightarrow{AM'_1}, \overrightarrow{AM'_2})$.
2) r conserve les distances, c'est à dire si M_1, M_2 sont deux points du plan, alors $M_1M_2 = M'_1M'_2$.
3) L'image par r d'une droite $\mathcal{D}$ est une droite $\mathcal{D}'$ telle que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ forment un angle α.

Preuve. 1) Appliquons la relation de Chasles pour les angles orientés:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AM'_1}, \overrightarrow{AM'_2}) &= (\overrightarrow{AM'_1}, \overrightarrow{AM_1}) + (\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}) + (\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{AM'_2}) \\ &= -\alpha + (\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}) + \alpha \\ &= (\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}).\end{aligned}$$

2) Considérons les triangles (AM_1M_2) et $(AM'_1M'_2)$. On déduit de 1) et du fait que $AM'_1 = AM_1$, $AM'_2 = AM_2$ que $M_1M_2 = M'_1M'_2$.

(On peut aussi faire la preuve algébriquement en constatant que $\langle \overrightarrow{AM_1'}, \overrightarrow{AM_2'} \rangle = \langle \overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2} \rangle$, et en utilisant la relation

$$\|\overrightarrow{M_1'M_2'}\|^2 = \|\overrightarrow{M_1'A} + \overrightarrow{AM_2'}\|^2.)$$

3) Soient A, B et C trois points alignés de $\mathcal{P}$, où B est entre A et C. Alors $AB + BC = AC$. Donc d'après 2), $A'B' + B'C' = A'C'$. De l'exercice 6.17, on déduit que A', B' et C' sont alignés. D'où, 3). $\square$

Rotations dans l'espace.

Définition 8.21. *Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. Soit $\mathcal{P}$ un plan normal à $\vec{u}$. On dit que ce plan est orienté par $\vec{u}$ si une base directe de ce plan est $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tel que $\{\vec{u}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ est une base directe de $\mathcal{E}$.*

Définition 8.22. *Soit θ un réel, et soit (Δ) une droite de l'espace orientée par un vecteur $\vec{u}$ fixé. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, soit $\mathcal{P}_M$ le plan passant par M, orthogonal à $\vec{u}$ et orienté par $\vec{u}$. On appelle **rotation de mesure θ autour de l'axe** Δ l'application $R_{\vec{\Delta},\theta}$ qui laisse la droite Δ invariante, et qui à chaque point $M \in \mathcal{E}$, associe le point M' situé dans $\mathcal{P}_M$ tel que $M' = r_{A,\theta}(M)$, où A est le point intersection de $\mathcal{P}_M$ avec la droite Δ et $r_{A,\theta}$ est la rotation plane de centre A et d'angle orienté θ (Fig. 18).*

Exemple 8.23. Soit $R = R_{\vec{\Delta},\frac{\pi}{2}}$ une rotation de mesure $\frac{\pi}{2}$ autour d'une droite Δ dirigée et orientée par un vecteur unitaire $\vec{u}(a, b, c)$. Exprimons analytiquement l'image d'un point $M(x_0, y_0, z_0)$ de l'espace. Posons $R(M) = M'(x', y', z')$.
Soit $\mathcal{P}_M$ le plan orthogonal à $\vec{u}$ qui passe par M. Soit $N(x, y, z) \in \mathcal{E}$.

$$N \in \mathcal{P}_M \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{MN}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Soit $A(a', b', c')$ le point intersection de Δ et $\mathcal{P}_M$. Alors $\overrightarrow{AM} \perp \vec{u}$ et $M' = r_{A,\frac{\pi}{2}}(M)$. Donc $M' \in \mathcal{P}_M$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $\overrightarrow{AM'} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}$ (puisque $\|\overrightarrow{AM'}\| = \|\overrightarrow{AM}\|$). D'où, on peut déduire x', y' et z' à partir de l'équation:

$$\begin{pmatrix} x' - a' \\ y' - b' \\ z' - c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_0 - a \\ y_0 - b \\ z_0 - c \end{pmatrix}.$$

Symétries dans le plan:

Définition 8.24. *Une **symétrie centrale** s de centre O est une transformation définie par:*

$$s : \quad M \longrightarrow M' \text{ tel que } O \text{ est le milieu de } [MM'].$$

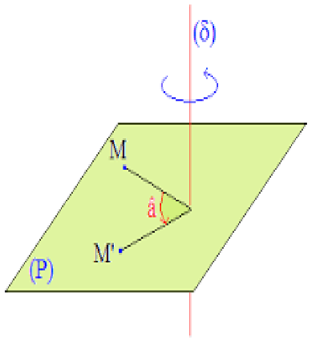

FIGURE 18. Rotation d'axe δ et d'angle â

Remarque 8.25. 1) Une symétrie centrale est une rotation d'angle π. Donc les propriétés des rotations s'appliquent.
2) $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

Définition 8.26. *Une **symétrie orthogonale** (ou **axiale**) s d'axe Δ est une transformation définie par:*

$$s: \quad M \longrightarrow M' \text{ tel que } \Delta \text{ est la médiatrice de } [MM'].$$

*Une symétrie orthogonale d'axe Δ est aussi appelée **réflexion** d'axe Δ, et notée s_Δ (Fig.19).*

Remarques 8.27. Soit s une une symétrie orthogonale d'axe Δ.
1) L'ensemble des points invariants par s est l'axe Δ.
2) $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.
3) Supposons que Δ est dirigée par un vecteur unitaire $\vec{e}_1$ et soit A un point de Δ. Choisissons un vecteur unitaire e_2 du plan de sorte que $\mathcal{R} = (A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ soit un repère orthonormal direct. Si M a pour coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, alors $M' = s(M)$ a pour coordonnées $(x, -y)$. De plus, si $(\vec{e}_1, \overrightarrow{AM}) = \alpha$, alors $(\vec{e}_1, \overrightarrow{AM'}) = -\alpha$.

Propriétés 8.28. *Soit s une symétrie orthogonale d'axe Δ. Alors*
1) s conserve la mesure des angles, mais ne conserve pas leur orientation.
2) L'image d'une droite $\mathcal{D}$ par s est une droite $\mathcal{D}'$, telle que:

✓ $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ *si* $\mathcal{D} = \Delta$ *ou si* $\mathcal{D} \perp \Delta$.
✓ $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ *si* $\mathcal{D} \parallel \Delta$.
✓ *Δ est la bissectrice de l'angle formé par les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ dans les autres cas.*

Preuve. Munissons $\mathcal{P}$ du repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $A \in \Delta$ et $\vec{e}_1$ dirige Δ.

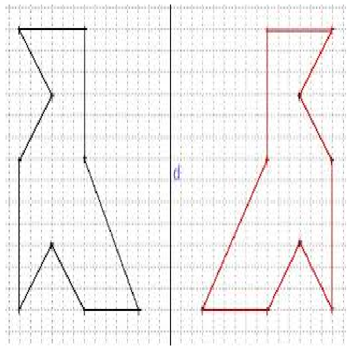

FIGURE 19. Symétrie axiale d'axe d

1) Soient $M, N \in \mathcal{P}$ tel que $s(M) = M'$ et $s(N) = N'$. Alors

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AN'}) &= (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{e_1}) + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AN'}) \\ &= -(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{e_1}) - (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AN}) \\ &= -(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}).\end{aligned}$$

2) Si $\mathcal{D} \cap \Delta = \emptyset$. Alors $\mathcal{D} \parallel \Delta$ et $\mathcal{D}$ a pour équation $y = a$, où $a \in \mathbb{R}$. Si $M(x, a) \in \mathcal{D}$, alors $M' = s(M)$ a pour coordonnées $(x, -a)$. D'où, $s(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}'$ où $\mathcal{D}'$ est la droite d'équation $y = -a$. De plus, tout point de $\mathcal{D}'$ est image d'un point de $\mathcal{D}$, d'où l'égalité.
Supposons maintenant que $\mathcal{D} \cap \Delta \neq \emptyset$. Donc on peut supposer que $A \in \mathcal{D} \cap \Delta$. Dans ce cas, $\mathcal{D}$ a pour équation $\theta = \alpha$. Soit $M \in \mathcal{D}$. Alors $(\vec{e}_1, \overrightarrow{AM}) = \alpha$, et $(\vec{e}_1, \overrightarrow{AM'}) = -\alpha$. D'où, l'image de $\mathcal{D}$ est contenue dans la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $\theta = -\alpha$. En plus, tout point de $\mathcal{D}'$ est image d'un point de $\mathcal{D}$. D'où, $s(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$. Ainsi, Δ est la bissectrice de l'angle formé par les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. En particulier, si $\mathcal{D} \perp \Delta$, ou $\mathcal{D} = \Delta$, alors $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$. $\square$

Exercice 8.29. Soit $\mathcal{P}$ le plan muni du repère orhonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit T la transformation du plan qui laisse O invariant et qui à chaque point M de coordonnées (x, y) du plan associe le point M' de coordonnées $(x, -y)$.
1) Donner la nature de T.
2) Peut on dire que T est une rotation du plan de centre O?

Réponse. 1) T est une symétrie axiale d'axe $(O, \vec{i})$.
2) Remarquons que T ne préserve pas l'orientation des angles. Donc T ne peut pas être une rotation de centre l'origine.

Exercice 8.30. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes, qui se rencontrent en un point A.
1) Montrer que $s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'}$ est une rotation de centre A.
2) Réciproquement, soient $B \in \mathcal{P}$ et r une rotation de centre B et d'angle α. Montrer que r se décompose en la composée de deux réflexions d'axes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécants en B.

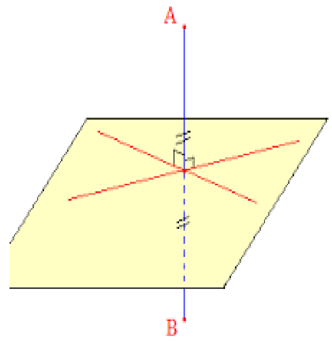

FIGURE 20. Symétrie par rapport à un plan

Solution. TD.

Symétries dans l'espace.

Définition 8.31. *Soient $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On appelle **symétrie orthogonale (ou réflexion) par rapport à** $\mathcal{P}$ l'application définie de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à chaque point M de l'espace associe le point M' vérifiant $M' = P_{\mathcal{P}}(M) + \overrightarrow{MP_{\mathcal{P}}(M)}$, c'est à dire $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MP_{\mathcal{P}}(M)}$ (Fig. 20).*

Exemple 8.32. Dans l'espace muni du repère orthonormal $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit $s_{\mathcal{P}}$ la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P} = (Oxy)$. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. Alors $P_{\mathcal{P}}(M) = (x, y, 0)$. Posons $M'(x', y', z') = s_{\mathcal{P}}(M)$. Alors

$$(x', y', z') = (x, y, 0) + (0, 0, -z) = (x, y, -z).$$

Exercice 8.33. Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit (P) le plan d'équation $z = c$. Donner l'expression analytique de la réflexion $S_{\mathcal{P}}$ par rapport à $\mathcal{P}$.

Réponse. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Désignons par $M'(x', y', z')$ son image par $S_{\mathcal{P}}$. On a

$$M' = P_{\mathcal{P}}(M) + \overrightarrow{MP_{\mathcal{P}}(M)},$$

où $P_{\mathcal{P}}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$. Posons $P_{\mathcal{P}}(M) = H$. Alors $H \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à $\vec{k}$. Donc H a pour coordonnées (x, y, c). Comme $M' = H + \overrightarrow{MH}$, alors

$$x' = x, \quad y' = y \quad \text{et} \quad z' = -z + 2c.$$

8.2. **Isométries et applications affines de l'espace et du plan.** Soit $O \in \mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{P}$). A toute transformation f de l'espace (resp. du plan), on associe une transformation vectorielle $\overrightarrow{f_O} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) définie par $\overrightarrow{f_O}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$. Remarquons que cette transformation vectorielle dépend en géneral du point O. Dans ce paragraphe, nous étudierons des transformations de l'espace (ou du plan) auxquelles on peut associer de manière naturelle une unique transformation vectorielle.

Définition 8.34. *1) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application. On dit que f est une **isométrie** de $\mathcal{E}$ si elle préserve les distances, c'est à dire pour tous points A et B de l'espace, on a*

$$d(A, B) = d(f(A), f(B)).$$

*2) Une application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est appelée **isométrie** si*

$$d(A, B) = d(f(A), f(B)), \quad \forall A, B \in \mathcal{P}.$$

Exemples 8.35. 1) Toute rotation du plan est une isométrie.
2) Toute translation de l'espace est une isométrie qui conserve l'orientation.

Remarque 8.36. Si f est une isométrie de l'espace (resp. du plan), et A et B sont deux points quelconques de l'espace (resp. du plan), alors l'image de la médiatrice du segment $[AB]$ est égale à la médiatrice du segment $[f(A)f(B)]$.

Théorème 8.37. *Soit f une isométrie du plan ou de l'espace.*
1) Supposons que f laisse fixes 3 points non alignés A, B et C de $\mathcal{E}$, alors f est égale à l'identité.
2) Supposons que f laisse fixes deux points distincts A et B de l'espace. Alors f est soit égale à l'identité, soit égale à la symétrie d'axe (AB).

Preuve. Faisons les preuves pour l'espace, le cas du plan est traité de manière analogue.
1) Faisons la preuve par l'absurde et supposons que $f \neq \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$. Soit $M \in \mathcal{E}$ tel que $f(M) = M' \neq M$.

$$d(f(M), f(A)) = d(M', A) = d(M, A).$$

Donc A est dans la médiatrice de M et M'. De même pour B et C. D'où les 3 points A, B et C sont alignés, ce qui contredit l'hypothèse.
2) Supposons que $f \neq \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$. Soit $M \in \mathcal{E}$ tel que $f(M) = M' \neq M$. Alors comme dans 1), on voit que A et B sont dans la médiatrice de M et M'. D'où, f est la symétrie d'axe (AB). $\square$

Définition 8.38. *1) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est **linéaire** si*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemples 8.39. 1) Soit $k \in \mathbb{R}$. L'application

$$k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & kx \end{array}$$

est une application linéaire.

2) Soit $\vec{u}$ un vecteur fixé de $\mathbb{R}^3$. Alors l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\vec{v} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ est linéaire.

2) Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs fixés de $\mathbb{R}^3$. Alors l'application $[\vec{u}, \vec{v}, .] : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\vec{w} \mapsto [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est linéaire.

Définition 8.40. *1) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application. On dit que f est* ***affine*** *s'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que*

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) \quad \forall A, B \in \mathcal{E}.$$

2) Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une application. On dit que f est ***affine*** *s'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que*

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) \quad \forall A, B \in \mathcal{E}.$$

Exemples 8.41. 1) Toute translation de l'espace $t_{\vec{u}}$ est une application affine, l'application linéaire associée est l'identité. En effet, dans $\mathcal{E}$, soient les points M_1, M_2 et posons $M_1' = M_1 + \vec{u}$ et $M_2' = M_2 + \vec{u}$. Alors $\overrightarrow{M_1'M_2'} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

2) Toute translation du plan est une application affine, l'application linéaire associée est l'identité.

3) Toute homothétie $h_{A,k}$ de l'espace est une application affine, l'application linéaire associée est $k\, id_{\mathbb{R}^3}$. En effet, soient $M_1, M_2 \in \mathcal{E}$ et posons $M_1' = h_{A,k}(M_1)$ et $M_2' = h_{A,k}(M_2)$. Alors

$$\overrightarrow{M_1'M_2'} = \overrightarrow{M_1'A} + \overrightarrow{AM_2'} = k\overrightarrow{M_1A} + k\overrightarrow{AM_2} = k\overrightarrow{M_1M_2}.$$

4) Toute homothétie $h_{A,k}$ du plan est une application affine, l'application linéaire associée est $k\, id_{\mathbb{R}^2}$.

Remarque 8.42. L'application linéaire associée à une application affine est unique.

Lemme 8.43. *Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application et soit A un point fixé du plan. Supposons qu'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f}$ vérifiant*

$$\overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) \quad \forall M \in \mathcal{E},$$

alors f est affine.

Preuve. Soient M_1 et M_2 deux points quelconques de l'espace. Alors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f}(\overrightarrow{M_1M_2}) &= \overrightarrow{f}(\overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{AM_2}) \\
&= \overrightarrow{f}(\overrightarrow{M_1A}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM_2}) \\
&= \overrightarrow{f(M_1)f(A)} + \overrightarrow{f(A)f(M_2)} \\
&= \overrightarrow{f(M_1)f(M_2)}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 8.44. Le Lemme ci-dessus reste valable dans le cas du plan.

Théorème 8.45. *1) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application qui conserve le produit scalaire, c'est à dire,*

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Alors f est linéaire.
2) Toute isométrie de l'espace est une application affine.
3) Toute isométrie du plan est une application affine.

Preuve. 1) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\|\alpha f(x) + \beta f(y)\|^2 = & = \\
\alpha^2\|f(x)\|^2 + \beta^2\|f(y)\|^2 + 2\langle \alpha f(x), \beta f(y)\rangle & = \\
\alpha^2\|x\|^2 + \beta^2\|y\|^2 + 2\alpha\beta\langle f(x), f(y)\rangle & = \\
\alpha^2\|x\|^2 + \beta^2\|y\|^2 + 2\alpha\beta\langle x, y\rangle & = \\
\|\alpha x + \beta y\|^2 & .
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\|f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)\|^2 & = \\
\|f(\alpha x + \beta y)\|^2 + \|\alpha f(x) + \beta f(y)\|^2 - 2\langle f(\alpha x + \beta y), \alpha f(x) + \beta f(y)\rangle & = \\
2\|\alpha x + \beta y\|^2 - 2\alpha\langle f(\alpha x + \beta y), f(x)\rangle - 2\beta\langle f(\alpha x + \beta y), f(y)\rangle & = \\
2\|\alpha x + \beta y\|^2 - 2\alpha\langle \alpha x + \beta y, x\rangle - 2\beta\langle \alpha x + \beta y, y\rangle & = \\
2\|\alpha x + \beta y\|^2 - 2\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle & = \\
2\|\alpha x + \beta y\|^2 - 2\|\alpha x + \beta y\|^2 = 0. &
\end{aligned}$$

D'où, f est linéaire.
2) Soit f une isométrie de l'espace et soit $A \in \mathcal{E}$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, posons $\overrightarrow{f_A}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)f(M)}$. Soient $M, N \in \mathcal{E}$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{f(A)f(M)}, \overrightarrow{f(A)f(N)}\rangle &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{f(M)f(A)}\|^2 + \|\overrightarrow{f(A)f(N)}\|^2 - \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\|^2) \Rightarrow \\
\langle \overrightarrow{f(A)f(M)}, \overrightarrow{f(A)f(N)}\rangle &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{AN}\|^2 - \|\overrightarrow{MN}\|^2) \Rightarrow \\
\langle \overrightarrow{f_A}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{f_A}(\overrightarrow{AN})\rangle &= \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\rangle.
\end{aligned}$$

D'après 1), $\overrightarrow{f_A}$ est linéaire. D'où, f est affine.
La preuve de 3) est similaire à celle de 2). □

Les rotations de l'espace sont des applications affines, déterminons les rotations vectorielles associées:

Théorème 8.46. *Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de l'espace, muni du repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $R_{\overrightarrow{\Delta},\theta}$ la rotation de mesure θ autour de l'axe Δ dirigé par le vecteur unitaire $\vec{u}$. Soit $\overrightarrow{R_{\overrightarrow{\Delta},\theta}}$ la transformation vectorielle définie par:*
1) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

$$\overrightarrow{R}_{\theta,\vec{u}}(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)\ \vec{u} \wedge \vec{v}.$$

2) Si $\vec{v}$ est quelconque,

$$\overrightarrow{R}_{\theta,\vec{u}}(x) = \langle \vec{u}, x\rangle \vec{u} + \cos(\theta)(\vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle \vec{u}) + \sin(\theta)\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Alors $\overrightarrow{R_{\vec{\Delta},\theta}}$ est l'application vectorielle linéaire associée à $R_{\vec{\Delta},\theta}$.

Preuve. Soient $M_1, M_2 \in \mathcal{E}$. Posons $R_{\vec{\Delta},\theta} = R$, et $R(M_1) = M_1'$, $R(M_2) = M_2'$. Désignons par $\mathcal{P}_{M_1}$ (resp. $\mathcal{P}_{M_2}$) le plan orthogonal à $\vec{u}$ qui passe par M_1 (resp. M_2). Procédons comme dans l'exemple 8.23. Soient A le point intersection de Δ et $\mathcal{P}_{M_1}$ et B le point d'intersection de Δ et $\mathcal{P}_{M_2}$. Alors $\overrightarrow{AM_1} \perp \vec{u}$. et on a: $M_1' = r_{A,\theta}(M)$. Donc $M_1' \in \mathcal{P}_{M_1}$ et $(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_1'}) = \theta$. Donc

$$\overrightarrow{AM_1'} = \cos\theta\, \overrightarrow{AM_1} + \sin\theta\, \vec{u} \wedge \overrightarrow{AM_1} \text{ (puisque } \|\overrightarrow{AM_1'}\| = \|\overrightarrow{AM_1}\|).$$

De même,

$$\overrightarrow{BM_2'} = \cos\theta\, \overrightarrow{BM_2} + \sin\theta\, \vec{u} \wedge \overrightarrow{BM_2}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_1'M_2'} &= \overrightarrow{M_1'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_2'} \\
&= \cos\theta\,(\overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{BM_2}) + \sin\theta\,(\vec{u} \wedge \overrightarrow{M_1A} + \vec{u} \wedge \overrightarrow{BM_2}) + \overrightarrow{AB} \\
&= \cos\theta\,(\overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{AB}) + \sin\theta\,(\vec{u} \wedge \overrightarrow{M_1M_2} - \vec{u} \wedge \overrightarrow{AB}) + \langle \vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}\rangle \vec{u} \\
&= \cos\theta\,(\overrightarrow{M_1M_2} - \langle \vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}\rangle \vec{u}) + \sin\theta\,(\vec{u} \wedge \overrightarrow{M_1M_2}) + \langle \vec{u}, \overrightarrow{M_1M_2}\rangle \vec{u}.
\end{aligned}$$

Finalement, remarquons que dans le cas 1) x peut être identifié à $\overrightarrow{AM_1}$, tandis que le cas général peut être identifié à $\overrightarrow{M_1M_2}$. □

Proposition 8.47. *Toute rotation de l'espace est une isométrie.*

Preuve. Soit $R = R_{\vec{\Delta},\theta}$ une rotation de l'espace, où Δ est dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Soit $M \in \mathcal{E}$ et posons $R(M) = M'$. Désignons par $\mathcal{P}_M$ le plan orthogonal à $\vec{u}$ qui passe par M. Soit A un point fixé de Δ et soit B le point intersection de Δ et $\mathcal{P}_M$. Alors

$$\|\overrightarrow{BM'}\| = \|\overrightarrow{BM}\|, \ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BM'}.$$

D'où

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BM}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BM'}\|^2 = \|\overrightarrow{AM'}\|^2.$$

Ainsi, pour tout vecteur $\vec{v}$ de l'espace, $\|\overrightarrow{R}(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$, d'où R est une isométrie. □

Exercice 8.48. 1) Montrer que les projections $P_{\mathcal{P},\mathcal{D}}$ sur un plan $\mathcal{P}$, parallélement à une droite $\mathcal{D}$ sont des applications affines.
2) Même question pour les réflexions de l'espace.

Réponse. TD.

En conclusion de ce chapitre, énonons la définition abstraite de la structure affine de l'espace.

Définition 8.49. *L'espace affine $\mathcal{E}$ est un ensemble non vide de points, pour lequel il existe une application de $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}^3$, qui à chaque couple de points A, B associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et qui vérifie les deux propriétés suivantes:*
1) Pour tout point $A \in \mathcal{E}$ et pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique point $M \in \mathcal{E}$ vérifiant $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$, et on note $M = A + \vec{u}$.
2) Pour tous points A, B et C de $\mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

La structure du plan affine est définie de manière analogue.