Université Mohammed V
Faculté des Sciences-Rabat

Département de Mathématiques

Module : Algèbre 1
(S1)

Filière :
Sciences de Matière Physique et Chimie (SMPC)

Chapitre 3: Nombres complexes.

Par :

M. Abdellah ALLA
Mme. Nadia BOUDI
M. Ahmed HAJJI
M. Houssame MAHZOULI.

Année universitaire 2015-2016

Université Mohammed V, Faculté des Sciences RABAT. Avenue Ibn Battouta, B. P. 1014 RP, Rabat – Maroc. Site web : www.fsr.ac.ma, Tel : (+212) 05 37 77 18 76, Fax : (+212) 05 37 77 42 61.

Nombres complexs

1. Introduction

Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels, tous les nombres positifs ont une racine carrée. Par contre, aucun réel négatif n'a de racine carrée (réel). Les nombres complexes offrent la possibilité de pallier à cette insuffisance .

Définition 1.1 (Le nombre i)**.**
- *Le nombre i est un nombre dont le carré vaut -1. Ainsi, $i^2 = -1$.*
- *De plus, son opposé $-i$ a aussi pour carré -1. En effet : $(-i)^2 = i^2 = -1$.*
- *Les deux racines de -1 sont les deux nombres irréels i et $-i$.*

Un peu d'histoire : La notation i fut introduite par *Euler* en 1777, puis reprise par *Gauss* au début du XIX^{eme} siècle. Cependant, le premier à parler de nombre imaginaire fut *Descartes* en 1637.

Définition 1.2 (Nombres complexes)**.** *Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :*
- *$\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{C}$ contient le nombre irréel i (tel que $i^2 = -1$)*
- *L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.*
- *Tout nombre complexe z s'écrit de <u>manière unique</u> $z = a + ib$ avec a et b réels.*

2. Formes algébrique d'un nombre complexe

Définition 2.1 (Forme algébrique)**.** *Soit z un nombre complexe. L'écriture $z = a + ib$ avec a et b sont des réels est appelée forme algébrique de z.*
• a est la partie réelle de z, notée $Re(z)$, b est la partie imaginaire de z notée $Im(z)$.
• Si $b = 0$, le nombre z est un réel. Si $a = 0$, le nombre z est dit imaginaire pur. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Exemple 2.2. $Re(1 + 2i) = 1$ et $Im(1 + 2i) = 2$.

Les calculs avec les nombres complexes se font comme avec les nombres réels avec la convention $i^2 = -1$.

Exemple 2.3. $(1 + 2i)(5 - 3i) = 5 - 3i + 10i - 6i^2 = 11 + 7i$.

Le résultat suivant justifie l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.

Proposition 2.4 (Egalité de deux complexes)**.** *Soient x, y, x' et y' des nombres réels. Alors,*

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'.$$

En particulier, $x + iy = 0$ équivalent à $x = y = 0$.

Démonstration. Supposons que $x+iy = x'+iy'$. Alors, $x-x' = i(y-y')$. Ainsi, $(x-x')^2 = i^2(y-y')^2 = -(y-y')^2$. Par suite, $(x-x')^2+(y-y')^2 = 0$. Par conséquent, $x - x' = y - y' = 0$. Le sens inverse et clair.

Remarques 2.5. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$,

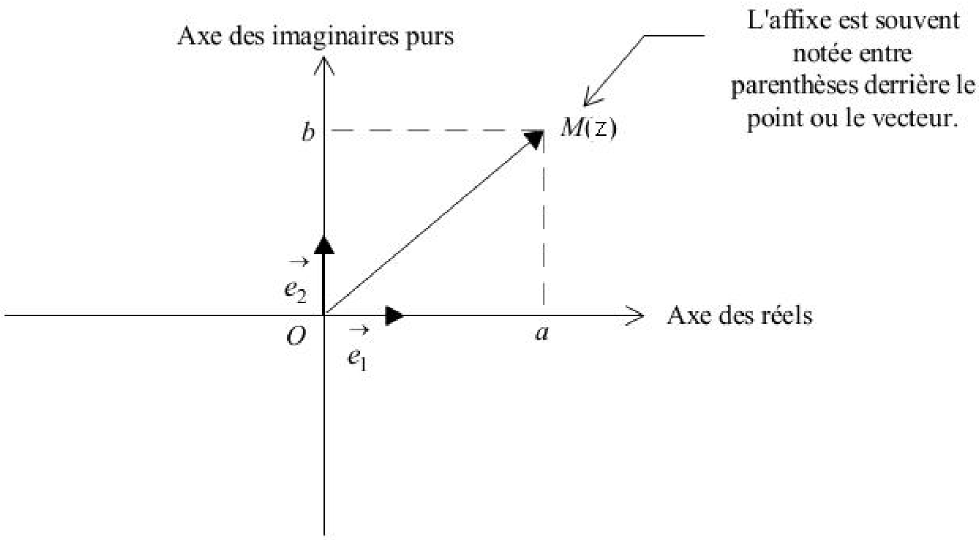
(1) il n'y a plus la notion d'ordre usuelle (On ne pourra pas comparer un nombre complexe à un autre ou dire s'il est positif ou négatif etc$\cdots$ excepté pour les imaginaires purs où l'on peut définir un ordre naturel comme pour les réels).

(2) on évitera l'usage abusif du symbole radical $\sqrt{\ }$ qui reste réservé aux réels positifs.

Définition 2.6 (Représentation géométrique des nombres complexes)**.** *Munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ direct.*

À tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec a et b réels), on peut associer le point $M(a; b)$.

- *le point $M(a; b)$ s'appelle l'image du nombre complexe $z = a + bi$.*
- *le nombre complexe $z = a + ib$ s'appelle l'affixe du point $M(a; b)$. ("Affixe" est un nom féminin)*
- *on note souvent $z = affixe(M)$ ou $z = aff(M)$.*
- *L'axe des abscisses est dénommé axe des réels (puisqu'il ne contient que les points dont les affixes sont des réels).*
- *L'axe des ordonnées est dénommé axe des imaginaires purs (puisqu'il ne contient que les points dont les affixes sont des imaginaires purs).*



Si $z_A = x_A + iy_A$ est l'affixe du point A et $z_B = x_B + iy_B$ est l'affixe du point B, on peut associer au vecteur $\overrightarrow{AB}$ le nombre complexe

$$z_B - z_A = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A),$$

dit affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, et on note

$$aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A.$$

Cela permet de traduire des problèmes de géométrie en relations entre nombres complexes. Par exemple, on utilisera souvent que deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont mêmes affixes. Ou encore, on utilisera que l'affixe d'une somme de deux vecteurs est la somme des affixes de ces vecteurs :

$$aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$$

Exemple 2.7. Soient $A(2, -1)$ et $B(-1, 3)$. Donc, $aff(A) = 2 - i$ et $aff(B) = -1 + 3i$. En plus,

$$aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = (-1 + 3i) - (2 - i) = -3 + 4i$$

Si on considère les points $I(1, 0)$ et $J(0, 1)$ alors $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OJ}$. Donc, $aff(\overrightarrow{e_1}) = aff(\overrightarrow{OI}) = z_I - z_0 = 1$ et de même $aff(\overrightarrow{e_2}) = i$.

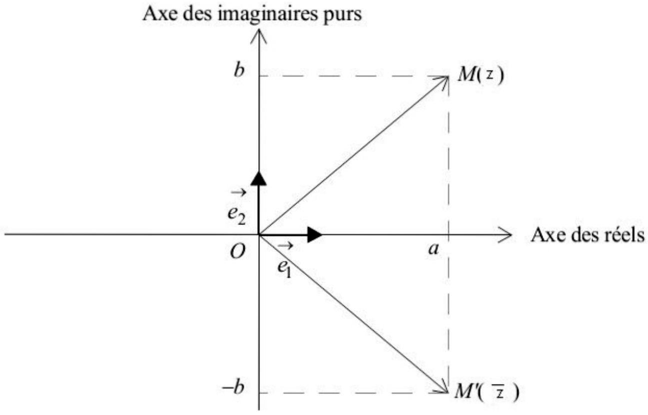
3. Conjugué d'un nombre complexe. Inverse d'un nombre complexe non nul

Définition 3.1 (Conjugué d'un nombre complexe)**.** *Soient a et b deux nombres réels. Le nombre complexe conjugué de $z = a+ib$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.*

Remarque 3.2. (1) Il est clair que le conjugué de $\bar{z}$ est z. On dit alors que z et $\bar{z}$ sont deux nombres complexes conjugués.

(2) $Re(z) = Re(\bar{z})$ et $Im(z) = -Im(\bar{z})$.

Les points M et M' d'affixes respectives z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport l'axe des réels :



Exemple 3.3. $\overline{2-3i} = 2+3i$ et $\overline{5i+1} = -5i+1$.

Proposition 3.4 (Critère pour qu'un nombre complexe soit réel (resp. imaginaire pur))**.** *Soit z un nombre complexe. Alors,*

$$z+\bar{z} = 2\,Re(z) \qquad ; \qquad z-\bar{z} = 2i\,Im(z).$$

En particulier,

$$(z \text{ est réel } \Longleftrightarrow z=\bar{z}) \qquad \text{et} \qquad (z \text{ est imaginaire pur } \Longleftrightarrow z=-\bar{z})\,.$$

Démonstration. Notons $z = a+ib$ avec a et b deux réels. Alors, $z+\bar{z} = 2a$ et $z-\bar{z} = 2ib$. En particulier,

$$z=\bar{z} \Leftrightarrow b=0 \Leftrightarrow z \text{ réel},$$

et

$$z=-\bar{z} \Leftrightarrow a=0 \Leftrightarrow z \text{ imaginaire pur}.$$

Proposition 3.5 (Inverse d'un nombre complexe)**.** *Tout nombre complexe non nul $z = a+ib$ (avec a et b deux réels non tout les deux nuls) admet un inverse pour la multiplication, noté $\frac{1}{z}$ dont la forme algébrique est*

$$\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

Démonstration. Cherchons $z' = a'+ib'$ tel que $z\,z' = 1$. On a

$$z\,z' = (aa'-bb') + i(ba'+ab').$$

Donc,

$$z\,z' = 1 \Leftrightarrow aa'-bb' = 1 \text{ et } ba'+ab' = 0 \Leftrightarrow a' = \frac{a}{a^2+b^2} \text{ et } b' = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Proposition 3.6 (propriétés du conjugué)**.** *Pour tout nombres complexes z et z', on a :*

(1) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

(2) $\overline{-z} = -\bar{z}$

(3) $\overline{z\,z'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

(4) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ $(n \in \mathbb{N})$

(5) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}(z' \neq 0)$.

Démonstration. Exercice.

Exemple 3.7. Le conjugué de $z = \frac{2-3i}{1+i}$ est $\bar{z} = \frac{2+3i}{1-i}$.

Exercice 3.8. Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{3+2i}{2-3i} \qquad z_2 = \left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2 \qquad z_3 = \frac{1+2i}{1-i} - \frac{1-2i}{1+i}.$$

4. Module d'un nombre complexe

Proposition 4.1. *Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec a et b réels), la quantité $z\,\bar{z}$ est un nombre réel positif :*

$$z\,\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Démonstration. Il suffit de calculer $z\,\bar{z}$.

Définition 4.2. *Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec a et b réels), on appelle module de z la quantité positive $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\,\bar{z}}$.*

Exemple 4.3. $|1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ et $|\sqrt{3}-2i| = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$.

Proposition 4.4 (Propriétés de module)**.** *Soient z et z' deux nombres complexes. On a :*

(1) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad , \quad |-z| = |z| \quad , \quad |z| = |\overline{z}| \quad ,$
$|z+z'| \leq |z| + |z'|$ *(Inégalité triangulaire).*

(2) $|z\,z'| = |z|\,|z'| \quad , \quad |z^n| = |z|^n \quad (n \in \mathbb{N})$

(3) *Pour* $z' \neq 0, \quad |\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Démonstration. (1) $|z| = 0$ est équivalent à $a^2 + b^2 = 0$ (avec a et b des réels tels que $z = a + ib$) ce qui est équivalent à $a = b = 0$.
On a $|z|^2 = z\,\bar{z} = (-z)\overline{(-z)} = |-z|^2$. Donc, $|z| = |-z|$.
On a $|z|^2 = z\,\bar{z} = \bar{z}\,z = |\bar{z}|^2$. Donc, $|z| = |\bar{z}|$.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ les formes algébriques de z et z'. Donc, $z + z' = (a + a') + i(b + b')$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (a + a')^2 + (b + b')^2 \\ &= (a^2 + b^2) + (a'^2 + b'^2) + 2aa' + 2bb' \\ &\leq (a^2 + b^2) + (a'^2 + b'^2) + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2} \\ &= \left(\sqrt{(a^2 + b^2)} + \sqrt{(a'^2 + b'2)}\right)^2 \\ &= (|z| + |z'|)^2 . \end{aligned}$$

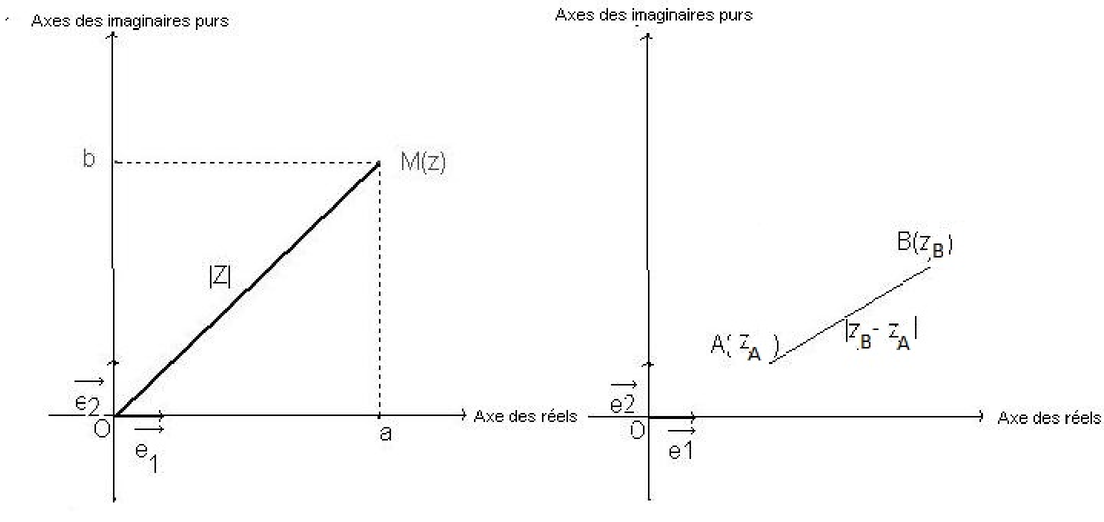
(2) On a

$$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = z\bar{z}z'\bar{z'} = |z|^2 |z'|^2 = (|z| |z'|)^2 .$$

Donc, $|z\, z'| = |z|\, |z'|$. La deuxième égalité est déduite de la première par une simple récurrence.
(3) On a $|z| = |\frac{z}{z'}z'| = |\frac{z}{z'}|\, |z'|$. Donc, $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Proposition 4.5 (Interprétation géométrique de la notion de module)**.** *Munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.*

(1) *Si z est l'affixe du point M alors $|z| = OM$.*
(2) *Si z_A et z_B sont respectivement les affixes des points A et B alors $AB = |z_B - z_A|$.*



Démonstration. On sait déjà en géométrie que si $M(a, b)$ alors $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$. Donc, $OM = |a + ib|$.
Aussi, si $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$ alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |z_B - z_A|.$$

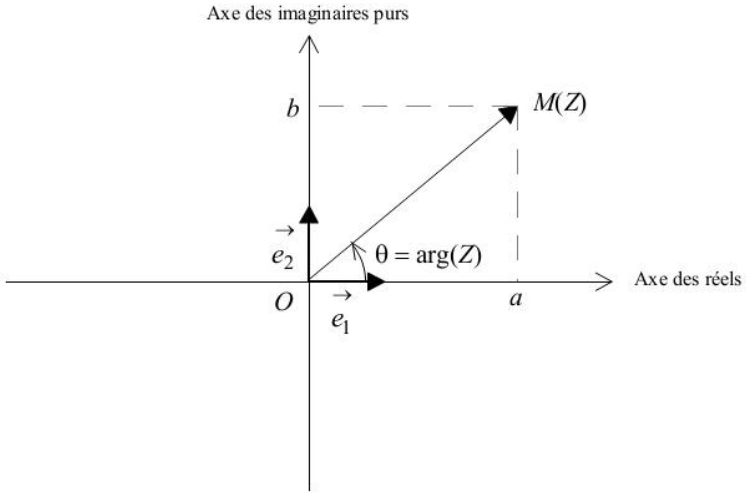
Exercice 4.6. Soit z un nombre complexe différent de 1, M le point d'affixe z et $z' = \frac{z+i}{z-1}$. Déterminer F l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.

Exercice 4.7 (Identité du parallélogramme)**.** Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que $|z+z'|^2+|z-z'|^2 = 2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$.
(Indication : Utiliser la relation $|z|^2 = z\,z'$).

Exercice 4.8. Soient u et v deux nombres complexes distincts et de même module. Montrer que le nombre complexe $\frac{u+v}{u-v}$ est imaginaire pur.

5. Argument d'un nombre complexe

Définition 5.1 (Argument d'un nombre complexe)**.** *Munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. Soit z un nombre complexe non nul d'image M. On appelle argument de z toute mesure, en radians, de l'angle orienté $\theta := \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM}\right)$. On le note $\theta = arg(z)$.*



Un nombre complexe possède une infinité d'arguments. Si θ est un argument de z, tout autre argument de z est de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'unique argument θ appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ s'appelle l'argument principal.
On notera par exemple $arg(z) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ou $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$***modulo*** 2π *pour signifier que $arg(z)$ peut être égal à $\pi/4$ mais aussi égal à n'importe lequel des nombres $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ où ($k \in \mathbb{Z}$).*
Attention !! Le nombre complexe nul $z = 0$ ne possède pas d'arguments car, dans ce cas, l'angle $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM}\right)$ ne se défini pas.

Exemples 5.2. $arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$; $arg(1) = 0\ [2\pi]$; $arg(-1) = \pi\ [2\pi]$; $arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Remarques 5.3.
(1) un réel strictement positif a un argument égal á $0\,[2\pi]$ et un réel strictement négatif a un argument égal à $\pi\,[2\pi]$.

On peut dire :

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } arg(z) = 0\,[\pi]),$$

(2) un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive a un argument égal à $\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négative a un argument égal à $-\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
On peut dire :

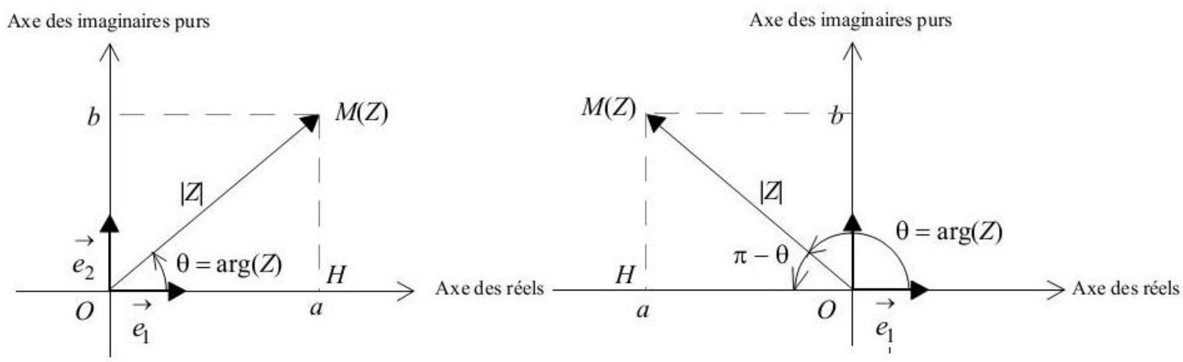
$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } arg(z) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]).$$

Méthode générale pour calculer l'argument principal d'un nombre complexe non nul :

On note $z = a + ib$ avec a et b des réels. Soit θ l'argument principal de z. Alors z est l'affixe du point $M(a,b)$ du plan. Des coordonnées polaires de M sont $(|z|, \theta)$ et on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} = \frac{Re(z)}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} = \frac{Im(z)}{|z|} \end{cases}.$$

Rappelons la preuve de ce résultat bien connu. Considérons d'abord les 2 cas suivants où θ est positif :



Cas où $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ **:**

$$\cos(\theta) = \frac{OH}{OM} = \frac{a}{|z|} = \frac{Re(z)}{|z|}, \quad et$$

$$\sin(\theta) = \frac{HM}{OM} = \frac{b}{|z|} = \frac{Im(z)}{|z|}.$$

Cas où $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ **:**

$$\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta) = -\frac{OH}{OM} = -\frac{-a}{|z|} = \frac{Re(z)}{|z|}, \quad et$$

$$\sin(\theta) = \frac{HM}{OM} = \frac{b}{|z|} = \frac{Im(z)}{|z|}.$$

Dans les cas où θ est négatif, on raisonne de même, en tenant compte du fait que $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ et $HM = -b$.
Dans tous les cas, nous avons :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} = \frac{Re(z)}{|z|} & ; \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} = \frac{Im(z)}{|z|} & . \end{cases}$$

Exemples 5.4. (1) Argument principal θ de $z = -2\sqrt{3}+2i$: On a $|z|^2 = 12+4 = 16$. Nous devons maintenant résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} & ; \\ \sin(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} & . \end{cases}$$

En utilisant le cercle trigonométrique, nous concluons : $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

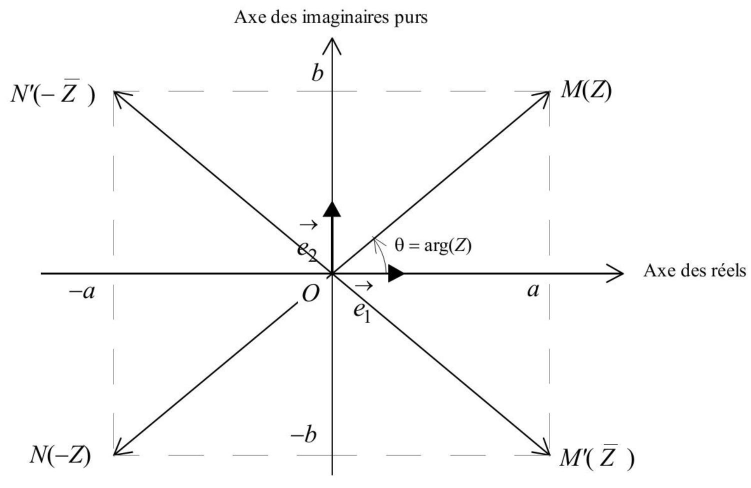
(2) Argument principal θ de $z = 3 - 4i$: On a $|z|^2 = 9 + 16 = 25$. Nous devons maintenant résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{3}{5} & ; \\ \sin(\theta) = \frac{-4}{5} & . \end{cases}$$

Ce ne sont pas des valeurs remarquables. La calculatrice donne $|\theta| = 0,9273$ rad. Mais $\sin(\theta)$ est négatif, donc θ est négatif : $\theta \approx -0,9273$ rad.

Exercice 5.5. Donner un argument du nombre complexe $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$.

De la figure suivante



on déduit le résultat suivant :

Proposition 5.6. *Pour tout nombre complexe non nul z, on a :*

$$arg(\bar{z}) = -arg(z)\,[2\pi], \quad arg(-z) = arg(z)+\pi\,[2\pi], \quad arg(-\bar{z}) = \pi - arg(z)\,[2\pi].$$

Remarques 5.7. Soit z un nombre complexe non nul et λ un réel non nul.

(1) Si $\lambda > 0$, $\quad arg(\lambda z) = arg(z)\,[2\pi]$,

(2) Si $\lambda < 0$, $\quad arg(\lambda z) = arg(z) + \pi\,[2\pi]$.

Les propriétés suivantes sur les arguments permettent de multiplier et diviser simplement deux nombres complexes :

Proposition 5.8. *Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, on a :*

(1) $arg(z\,z') = arg(z) + arg(z')\,[2\pi]$

(2) $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)\,[2\pi]$

(3) $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')\,[2\pi]$

(4) $arg\,(z^n) = n\,arg(z)\,[2\pi]$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. (1) Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ les fomres algébriques de z et z' respectivement. Donc, la forme algébrique de zz' est $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$. Soit α un argument de zz' et soient θ et θ' des arguments de z et z' respectivement. Donc,

$$\cos(\alpha) = \frac{aa' - bb'}{|zz'|} = \frac{a}{|z|}\frac{a'}{|z'|} - \frac{b}{|z|}\frac{b'}{|z'|} = \cos(\theta)cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') = \cos(\theta + \theta').$$

De même on trouve $\sin(\alpha) = \sin(\theta + \theta')$. Donc, $\alpha = \theta + \theta'\,[2\pi]$.
(2) On a $0 = arg(1) = arg\left(z.\frac{1}{z}\right) = arg(z) + arg\left(\frac{1}{z}\right)\,[2\pi]$. Donc, $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)\,[2\pi]$.
(3) On a $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg\left(z\frac{1}{z'}\right) = arg(z) + arg\left(\frac{1}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')\,[2\pi]$
(4) Le résultat est déduit sur $\mathbb{N}$ de (1) par une simple récurrence sur n, et il est prolongé à $\mathbb{Z}$ en utilisant (2).

Remarque 5.9. (1) On notera l'analogie entre ces relations et les propriétés de la fonction logarithme.

(2) Pour multiplier deux nombres complexes non nuls, on multiplie les modules et on additionne les arguments. Pour diviser deux nombres complexes non nuls, on divise les modules et on soustrait les arguments.

Exercice 5.10. Soient $u = 1 + i$ et $v = -1 + i\sqrt{3}$.

(1) Déterminer les modules de u et v.

(2) Donner un argument de u et un argument de v.

(3) Déterminer le modules et un argument des nombres complexes $\bar{u}$, uv, v^3 et $\frac{u}{v}$

(4) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right)$.

(5) Donner explicitement le nombre complexe v^3.

6. Forme trigonométrique, forme exponentielle d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul avec a et b deux réels. On peut aussi écrire

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Or $\sqrt{a^2+b^2} = |z|$, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\theta)$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(\theta)$ où θ est un argument de z. Donc,

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Définition 6.1. *Soit z un nombre complexe de module r et d'un argument θ. L'écriture $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ s'appelle une forme trigonométrique de z.*

Proposition 6.2. *Soit z un nombre complexe. Si $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta\,[2\pi]$.*

Démonstration. On a $|z| = \sqrt{r^2\cos(\theta)^2 + r^2\sin(\theta)^2} = r$. En outre, si α est un argument de z alors

$$\cos(\alpha) = \frac{r\cos(\theta)}{r} = \cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(\alpha) = \frac{r sin(\theta)}{r} = sin(\theta).$$

Donc, $\arg(z) = \theta\,[2\pi]$.

Définition 6.3. *Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$.*
Un nombre complexe de module r et d'argument θ sera écrit alors $re^{i\theta}$. Cette écriture est appelée une forme exponentielle de z.

Une simple transcription des propriétés vues sur les arguments donne alors :

Proposition 6.4. *Pour tout θ et θ' de $\mathbb{R}$, on a :*

$$e^{i\theta}\,e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad \left(e^{i(\theta)}\right)^n = e^{i(n\theta)} \quad \textit{pour tout}\, n \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 6.5 (Formule de Moivre)**.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

$$(\cos(\theta) - i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta).$$

Démonstration. Utilisons les formes exponentielles :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

D'où la première formule de Moivre.
Si on remplace θ par $-\theta$, on obtient la seconde formule.

Proposition 6.6 (Formule d'Euler)**.** *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. On a :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \quad \text{et} \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta).$$

D'où la formule d'Euler.

Exercice 6.7. Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes $z = e^{i\theta} + e^{i2\theta}$ et $z' = 1 + e^{i\theta}$.

Application la trigonométrie : Les nombres complexes sont très utiles pour de nombreux calculs de trigonométrie. Par exemple, les formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

ne sont qu'une autre écriture des parties réelles et imaginaires de $e^{ia}e^{ib}$.

► Linéarisation de $\cos^m(\theta)$ et $\sin^m(\theta)$:

Linéariser $\cos^m(\theta)$ et $\sin^m(\theta)$ c'est les exprimer comme combinaisons linéaires de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$. Cette opération est très utile en particulier pour trouver des primitives.

Exemple 6.8. Linéarisation de $\sin^6(\theta)$: En utilisant les formules d'Euler, on obteint :

$$\sin^6(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^6 = -\frac{1}{64}(e^{6i\theta} - 6e^{4i\theta} + 15e^{2i\theta} - 20 + 15e^{-2i\theta} - 6e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta}).$$

On regroupe les termes en $e^{ik\theta}$ et $e^{-ik\theta}$ de manière à faire apparaître $\cos(k\theta)$ ou $\sin(k\theta)$:

$$\begin{aligned} \sin^6(\theta) &= -\frac{1}{64}\left((e^{6i\theta} + e^{-6i\theta}) - 6(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}) + 15(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) - 20\right) \\ &= -\frac{1}{32}\left(cos(6\theta) - 6\cos(4\theta) + 15\cos(2\theta) - 10\right) \end{aligned}$$

► Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$:

Exemple 6.9. Pour exprimer $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, on commence par écrire la formule de Moivre :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5 = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta).$$

puis après avoir développé, par la formule de binôme, le premier membre de l'égalité, on identifie les parties réelles et imaginaires de deux membres de l'égalité obtenue, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\cos(5\theta) &= \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta)\\ \sin(5\theta) &= 5\cos^4(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^5(\theta)\end{aligned}$$

Si on remplace $\sin^2(\theta)$ par $1-\cos^2(\theta)$ dans l'expression précédente de $\cos(5\theta)$, on obtient :

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta).$$

7. Résolution dans $\mathbb{C}$ d' équations du second degré à coefficients réels

On se propose de résoudre l'équation (E) $az^2+bz+c=0$ dans $\mathbb{C}$ avec a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. On peut mettre l'équation (E) sous la forme $a(z+\frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$.
Considérons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation sera de la forme $(z+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$. En distinguant les cas suivant le signe de Δ, on obtient :

Proposition 7.1. *Etant donnés trois réels a, b et c avec $a \neq 0$, considérons l'équation :*

$$(E):\ az^2+bz+c=0,$$

et $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

(1) *Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une solution réelle (double) égale à : $-\frac{b}{2a}$.*
(2) *Si $\Delta \neq 0$, l'équation (E) admet deux solutions distinctes :*
   (a) *réelles si $\Delta > 0$: $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$,*
   (b) *complexes conjuguées si $\Delta < 0$: $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.*

Exemple 7.2. Résolution de l'équation $z^2+3z+3=0$.
On a $\Delta = 9-12 = -3$. Donc, les solutions sont

$$z_1 = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} \qquad z_2 = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}.$$

8. Résolution d'équations du second degré à coefficients complexes

Démarche pour résoudre l'équation $z^2 = z_0$ où z_0 est un complexe inconnu :

On pose $z_0 = a+ib = re^{i\theta}$ et $z = x+iy$.
Si un argument θ de z_0 est connu, l'équation est facile à résoudre, ses solutions sont :

$$z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad z_2 = -z_1.$$

Dans le cas contraire, on procède analytiquement pour obtenir :

$$\begin{cases} x^2+y^2=r, \\ x^2-y^2=a, \\ 2xy=b. \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} x^2=\frac{r+a}{2}, \\ y^2=\frac{r-a}{2}, \\ xy=\frac{b}{2}. \end{cases}$$

Le fait que $r=\sqrt{a^2+b^2}\geq |a|$ assure l'existence des x et y, et on choisit leur signe de telle sorte que leur produit soit du signe de b (afin de satisfaire la condition $2xy=b$).

– Si $b\geq 0$, on prend :

$$z_1=\sqrt{\frac{r+a}{2}}+i\sqrt{\frac{r-a}{2}} \quad ; \quad z_2=-z_1=-\sqrt{\frac{r+a}{2}}-i\sqrt{\frac{r-a}{2}}.$$

– Si $b\leq 0$, on prend :

$$z_1=\sqrt{\frac{r+a}{2}}-i\sqrt{\frac{r-a}{2}} \quad ; \quad z_2=-z_1=-\sqrt{\frac{r+a}{2}}+i\sqrt{\frac{r-a}{2}}.$$

Exemples 8.1. Résolution de l'équation $z^2=i$.
On a

$$z^2=i\Leftrightarrow z^2=e^{i\pi/2}\Leftrightarrow z=e^{i\pi/4} \text{ ou } z=-e^{i\pi/4}.$$

Résolution de l'équation $z^2=-7-24i$.
On a $|-7-24i|=\sqrt{7^2+24^2}=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}=25$. Si θ est argument de $-7-24i$ alors

$$\cos(\theta)=\frac{-7}{25} \qquad \sin(\theta)=\frac{-24}{25}.$$

Ces valeurs ne sont pas connues et ne nous donne pas idée sur la valeur exacte de θ. Alors, l'autre choix est de travailler d'une manière analytique.
On pose $z=x+iy$ (la forme algbrique de z). On a :

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2-y^2=-7, \\ 2xy=-24. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} x^2=\frac{18}{2}=9, \\ y^2=\frac{32}{2}=16, \\ xy=-12. \end{cases}$$

Donc, $(x,y)=(3,-4)$ ou $(x,y)=(-3,4)$. Ainsi, les solutions de l'équation sont $z_1=3-4i$ et $z_2=-3+4i$.

On se propose maintenant de résoudre l'équation (E) $az^2+bz+c=0$ dans $\mathbb{C}$ avec a,b et c sont des nombres complexes et $a\neq 0$. On peut mettre l'équation (E) sous la forme $a(z+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}=0$.
Considérons le discriminant $\Delta=b^2-4ac$ (Attention!! ici Δ est un complexe). On considère δ tel que $\Delta=\delta^2$ (On a déjà vu l'existence). L'équation sera de la forme $(z+\frac{b}{2a})^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2=0$. Enfin, l'équation s'écrit de la forme $\left(z+\frac{b+\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b-\delta}{2a}\right)=0$.

Proposition 8.2. *Etant donnés trois complexes a,b et c avec $a\neq 0$, considérons l'équation :*

$$(E):\ az^2+bz+c=0,$$

et $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.

(1) *Si $\Delta=0$, l'équation (E) admet une solution (double) égale à : $-\frac{b}{2a}$.*
(2) *Si $\Delta\neq 0$, en appelant δ une racine carrée de Δ, l'équation (E) admet deux solutions distinctes :*

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a} \quad ; \quad z_2=\frac{-b-\delta}{2a}.$$

Exemple 8.3. Résolution de l'équation $iz^2+(1-5i)z+6i-2=0$.
On a :

$$\begin{aligned}\Delta &= (1-5i)^2-4i(6i-2)=1-10i-25+24+8i=-2i=2e^{-i\pi/2}\\ &= \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^2=\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2=(1-i)^2.\end{aligned}$$

Alors, les solutions de notre équation sont :

$$z_1=\frac{-1+5i+1-i}{2i}=2 \quad ; \quad z_2=\frac{-1+5i-1+i}{2i}=i+3.$$

Remarque 8.4. Contrairement aux équations dont les coéfficients sont des réels, ici les nombres complexes z_1 et z_2 ne sont pas nécessairement conjugués.

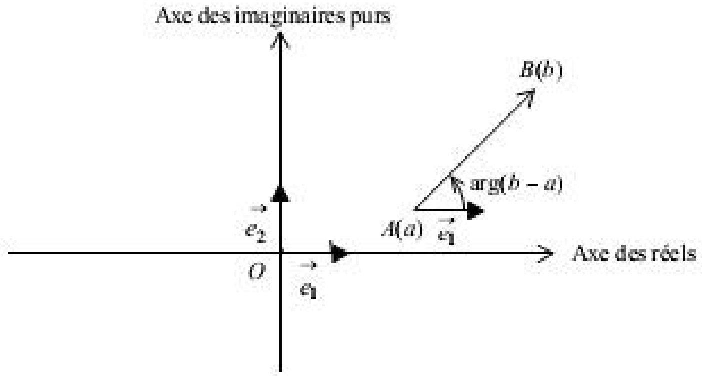
Exercice 8.5. Soit l'équation $(E): z^3-iz+1-i=0$.
(1) Montrer que (E) admet une racine réelle.
(2) Donner les solutions de (E).

9. Nombres complexes et Géométrie

Dans toute cette section, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

Proposition 9.1 (Calcul d'angles)**.** *Si A et B sont deux points distincts du plan d'affixes respectives a et b alors :*

$$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AB})=arg(b-a)\,[2\pi].$$



Démonstration. Soit M une point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Donc
$z_M = z_B - z_A = b - a$, et

$$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}) = arg(z_M) = arg(b-a)\,[2\pi].$$

Corollaire 9.2. *Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives a, b et c alors :*

$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\ [2\pi].$$

En particulier :

$$\frac{b-c}{a-c} \text{ est réel } \Leftrightarrow \text{ les points } A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés,}$$

$$\frac{b-c}{a-c} \text{ est imaginaire pur } \Leftrightarrow \text{ les droites } (CA) \text{ et } (CB) \text{ sont perpendiculaires.}$$

Démonstration. On a

$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CB}\right) - \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{CA}\right) = arg(b-c) - arg(a-c) = arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\ [2\pi].$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\frac{b-c}{a-c} \text{ est réel } &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = 0; \pi\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \text{ les points } A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{b-c}{a-c} \text{ est imaginaire pur } &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \text{ les droites } (CA) \text{ et } (CB) \text{ sont perpendiculaires.}\end{aligned}$$

10. Nombres complexes et quelques transformations du plan

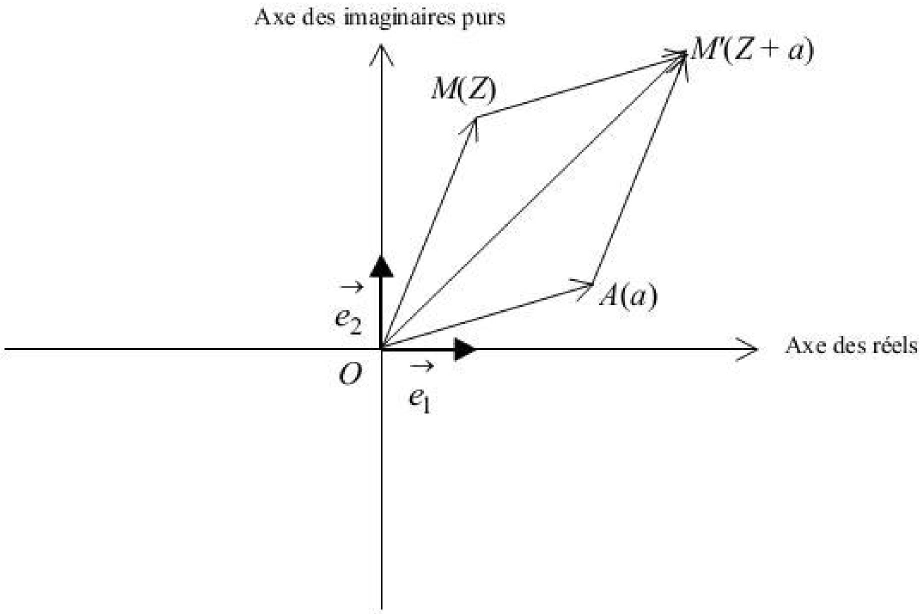
10.1. **Transformations du plan.** Munissons $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormal $\mathcal{R}_0$. Rappelons qu'une translation t de $\mathcal{P}$ de vecteur $\vec{u}$ est une application

$$\begin{array}{rcl} t : \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ M & \mapsto & M' \end{array}$$

tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. On la note $t_{\vec{u}}$.
Donc si $M(x, y) \in \mathcal{P}$ et $\vec{u}\ (x_0, y_0)$, alors $t_{\vec{u}}(M) = M'(x + x_0, y + y_0)$.

Proposition 10.1 (Ecriture complexe d'une translation)**.** *La translation de vecteur $\vec{u}$, d'affixe a, transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :*

$$z' = z + a.$$



Démonstration. Dire que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Ce qui se traduit, en termes d'affixes, par $z' - z = a$.

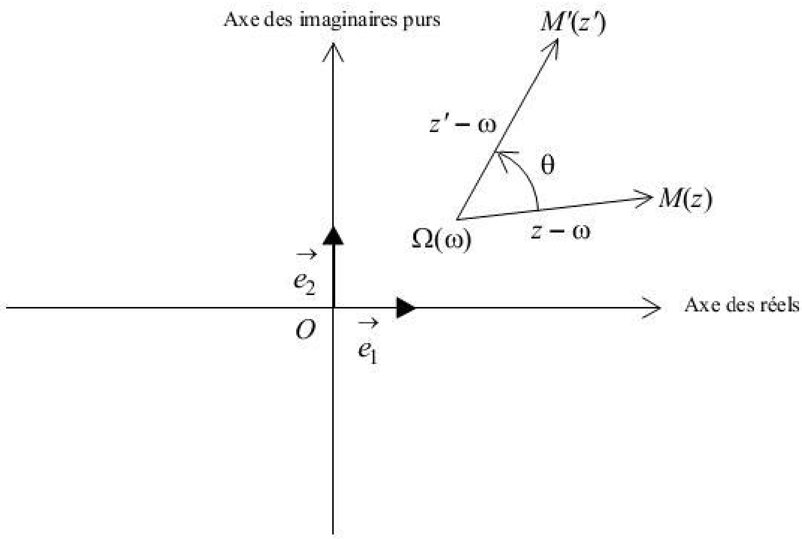
Soient θ un réel et Ω un point du plan. Rappelons que la rotation r de centre Ω et d'angle θ est la transformation $r : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, qui laisse Ω invariant, et si M est un point du plan distinct de Ω alors

$$r(M) = M' \text{ avec } (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta, \quad \text{et} \quad \Omega M = \Omega M'.$$

On la note aussi $r_{\Omega,\theta}$.

Proposition 10.2 (Ecriture complexe d'une rotation)**.** *La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ transforme $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :*

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$



Démonstration. Si $M = \Omega$, la relation $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est vérifiée. Supposons désormais $M \neq \Omega$. Dire que M' est l'image de M par la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ signifie que :

$$\begin{cases} \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1, \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\,[2\pi]. \end{cases}$$

Ce qui se traduit, en termes d'affixes, par :

$$\begin{cases} \frac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = 1, \\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta\,[2\pi], \end{cases}$$

On en déduit alors que $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$. D'où le résultat.

Cas particuliers :

- Si $\omega = 0$, alors l'écriture complexe de la rotation devient :

$$z' = e^{i\theta} z.$$

- Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ (quart de tour de sens direct), alors l'écriture complexe de la rotation devient :

$$z' - \omega = i(z - \omega).$$

- Si $\omega = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors l'écriture complexe de la rotation devient :

$$z' = iz.$$

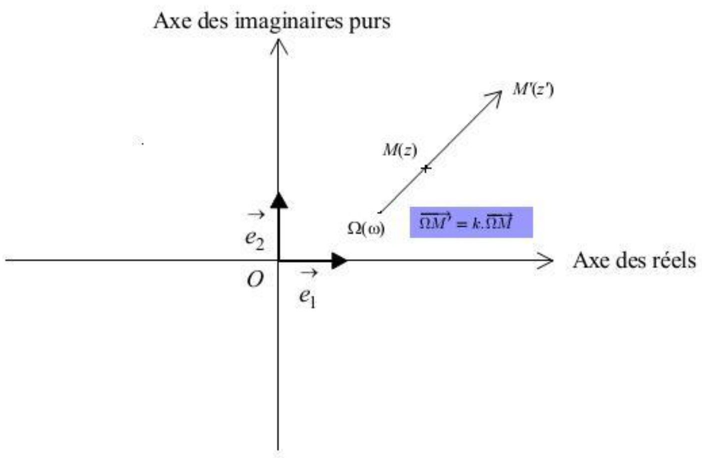
Soit Ω un point du plan et soit k un réel non nul. Rappelons qu'une **homothétie** h **de centre** Ω **et de rapport** k est une transformation $h : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ définie par

$$M \mapsto M' \text{ et tel que } \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$

On la note aussi $h_{\Omega,k}$.

Proposition 10.3 (Ecriture complexe d'une homothétie)**.** *L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ transforme $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :*

$$z' - \omega = k(z - \omega).$$



Démonstration. Dire que M' est l'image de M par l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ signifie que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. Ce qui se traduit, en termes d'affixes, par $z' - \omega = k(z - \omega)$. D'où le résultat.

Exercice 10.4. On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $(E) :\ z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.

(1) (a) Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme $(z - 2)(az^2 + bz + c) = 0$ où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.

(b) En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

(2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On considère les points A, B et D d'affixes respectives $z_A = -2-2i$, $z_B = 2$ et $z_D = -2 + 2i$.
Calculer l'affixe z_C du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

(3) Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et F l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

(a) Calculer les affixes z_E et z_F des points E et F.

(b) Vérifier que $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$. En déduire la nature du triangle AEF.

Soit Ω un point du plan. Rappelons que la symétrie s de centre Ω est la transformation $s : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, qui laisse Ω invariant, et si M est un point du plan distinct de Ω alors $s(M) = M'$ tel que Ω est le milieu du segment $[MM']$, c'est à dire $\overrightarrow{\Omega M} = -\overrightarrow{\Omega M'}$.

Proposition 10.5. *(Expression complexe d'une symétrie centrale). La symétrie de centre $\Omega(\omega)$ transforme le point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :*

$$z' = 2\omega - z.$$

Soit Δ une droite du plan. Rappelons que la symétrie axiale s_Δ d'axe Δ (ou réflexion) est la transformation $s_\Delta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, qui laisse la droite Δ invariante, et si M est un point du plan extérieur à Δ alors $s_\Delta(M) = M'$ tel que Δ est la médiatrice du segment $[MM']$.

Proposition 10.6. *(Expression complexe d'une symétrie axiale d'axe Δ passant par l'origine). Soit $A(z_0)$ un point du plan, tel que $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. Alors si Δ est la droite passant par O et A et $M(z)$ est un point du plan. $M' = s_\Delta(M)$ a pour affixe $z' = e^{2i\theta_0}\overline{z}$.*

Démonstration. (Vérification.) Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan avec $z = re^{i\theta}$ et $z' = e^{2i\theta_0}\overline{z}$. Alors $z' - z = re^{2i\theta_0 - \theta} - re^{i\theta}$.

Donc

$$z' - z = re^{i\theta_0}(e^{i(\theta_0-\theta)} - e^{-i(\theta_0-\theta)}) = 2ir\sin(\theta_0 - \theta)e^{i\theta_0}.$$

Or, pour tout réel α, si $\vec{u}(e^{i\alpha})$ et $\vec{v}(ie^{i\alpha})$, on a $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$. Donc $\overrightarrow{MM'} \perp (\Delta)$. D'autre part,

$$\frac{z+z'}{2} = \frac{r}{2}(e^{i(2\theta_0-\theta)} + e^{i\theta}) = \frac{r}{2}e^{i\theta_0}(e^{i(\theta_0-\theta)} + e^{-i(\theta_0-\theta)} = r\cos(\theta_0-\theta)e^{i\theta_0}.$$

Donc, le milieu B du segment $[MM']$ est dans la droite (Δ). Ainsi, la droite Δ est la médiatrice du segment $[MM']$ et M' est l'image de M par s_Δ.

10.2. **Similitudes.**

Définition 10.7. *Soit $S : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une transformation du plan, qui à chaque point M du plan associe un point M' et soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que S est une similitude de rapport k si*

$$\|\overrightarrow{M'N'}\| = k\|\overrightarrow{MN}\|, \quad \forall M, N \in \mathcal{P}.$$

Exemples 10.8. 1) Soit $h_{A,k}$ une homothétie du plan de centre le point A et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$. Alors $h_{A,k}$ est une similitude de rapport $|k|$.

2) Soit S la transformation du plan qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = az + b$, où $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, alors S est une similitude de rapport $|a|$.

3) Si S est la transformation du plan qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = a\overline{z} + b$, où $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, alors S est une similitude de rapport $|a|$.

Faisons la vérification pour l'exemple 2), l'exemple 3) se fait de la même manière, et les homothéties ont la forme 2) :
Soient $M(z)$ et $N(w)$ deux points du plan. Soient M' et N' leurs images par S. Alors $az + b$ et $aw + b$ sont leurs affixes respectives.

$$\|\overrightarrow{MN}\| = |w - z|, \text{ et } \|\overrightarrow{M'N'}\| = |a(w - z)| = |a|\|\overrightarrow{MN}\|.$$

Exercice 10.9. Soit S une similitude de rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$. Soit A un point quelconque du plan. Montrer que $h_{A,\frac{1}{k}} \circ S$ est une similitude de rapport 1 (c'est à dire, une isométrie). Déduire, qu'il existe une isométrie T tel que $S = h_{A,k} \circ T$.

Proposition 10.10. *Soit S une similitude du plan. Alors S préserve la mesure des angles en valeur absolue.*

Preuve. Pour tout $M \in \mathcal{P}$, notons $S(M) = M'$ et soit k le rapport de S. Soient $M, N, P \in \mathcal{P}$. Alors

$$\langle \overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'} \rangle = \|\overrightarrow{M'N'}\| \, \|\overrightarrow{M'P'}\| \cos(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}).$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'} \rangle &= \\
\frac{-1}{2}(\|\overrightarrow{M'N'} - \overrightarrow{M'P'}\|^2 - \|\overrightarrow{M'N'}\|^2 - \|\overrightarrow{M'P'}\|^2) &= \\
\frac{-1}{2}(\|\overrightarrow{P'N'}\|^2 - \|\overrightarrow{M'N'}\|^2 - \|\overrightarrow{M'P'}\|^2) &= \\
\frac{-1}{2}k^2(\|\overrightarrow{PN}\|^2 - \|\overrightarrow{MN}\|^2 - \|\overrightarrow{MP}\|^2) &= \\
k^2 \langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP} \rangle &= \\
k^2 \|\overrightarrow{MN}\| \, \|\overrightarrow{MP}\| \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}). & \qquad (1)
\end{aligned}$$

D'où, on déduit que

$$\cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \cos(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}).$$

□

Avec un simple schéma, on peut voir que toute similitude conserve l'orientation des angles, ou inverse l'orientation des angles. Donc on peut énoncer la définition

Définition 10.11. *Soit S une similitude du plan.*
1) Si S préserve les orientations, on dit que S est une similitude directe.
2) Si S inverse les orientations, on dit que S est une similitude indirecte.

Exemples 10.12. Soient a, b deux nombres complexes, avec $a \neq 0$. Alors :

1) Si S est la transformation du plan qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = az + b$, alors S est une similitude directe de rapport $|a|$. En effet, considérons le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Soient $A, M \in \mathcal{P}$ tel que A a pour affixe 1 et M a pour affixe z, où $|z| = 1$. Alors b est l'affixe de $O' = S(O)$, $a + b$ est l'affixe de $S(A) = A'$ et $az + b$ est l'affixe de $S(M) = M'$. Posons $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta$. M est l'image de A par une rotation de centre O et d'angle θ, donc $z = e^{i\theta}$. D'autre part, a et $az = ae^{i\theta}$ sont les affixes respectives de $\overrightarrow{O'A'}$ et $\overrightarrow{O'M'}$. Donc $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'M'}) = \theta$. D'où, S préserve l'orientation des angles.

2) Si S est la transformation du plan qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = a\overline{z} + b$, alors S est une similitude indirecte de rapport $|a|$ (la preuve est analogue à celle du premier exemple).

Théorème 10.13. *Soit S une similitude du plan.*
1) Si S est directe, alors il existe $a, b \in \mathbb{C}$, tel que $a \neq 0$ et S est la transformation du plan qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = az + b$.
2) Si S est indirecte, alors il existe $a, b \in \mathbb{C}$, tel que $a \neq 0$ et S est la transformation du plan qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = a\overline{z} + b$.

Preuve. Considérons le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Soient $A, M \in \mathcal{P}$ tel que A a pour affixe 1 et M a pour affixe z. Soit b l'affixe de $O' = S(O)$, α l'affixe de $S(A) = A'$ et z' l'affixe de $S(M) = M'$.

Cas 1. S préserve l'orientation des angles. Soit

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'M'}) = \theta.$$

Soit N le point du plan d'affixe $\frac{z}{\|\overrightarrow{OM}\|}$, alors N est l'image de A par une rotation de centre O et d'angle θ, donc

$$z = e^{i\theta}\|\overrightarrow{OM}\|.$$

De même, comme

$$\left(\frac{\overrightarrow{O'A'}}{\|\overrightarrow{O'A'}\|}, \frac{\overrightarrow{O'M'}}{\|\overrightarrow{O'M'}\|}\right) = \theta, \quad \text{alors}$$

$$\frac{z'-b}{\|\overrightarrow{O'M'}\|} = e^{i\theta}\frac{\alpha-b}{\|\overrightarrow{O'A'}\|}.$$

Or, si k est le rapport de la similitude S, alors

$$\|\overrightarrow{O'M'}\| = k\|\overrightarrow{OM}\| \quad \text{et } \|\overrightarrow{O'A'}\| = k\|\overrightarrow{OA}\|.$$

D'où,

$$z'-b = \|\overrightarrow{OM}\|e^{i\theta}(\alpha-b).$$

Donc on déduit que $z' = (\alpha-b)z+b$.

Cas 2. S inverse l'orientation des angles. Soit $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, alors $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'M'}) = -\theta$. On a toujours

$$z = e^{i\theta}\|\overrightarrow{OM}\|, \text{ donc } \overline{z} = e^{-i\theta}\|\overrightarrow{OM}\|.$$

Et on a

$$\frac{z'-b}{\|\overrightarrow{O'M'}\|} = e^{-i\theta}\frac{\alpha-b}{\|\overrightarrow{O'A'}\|}.$$

On procède comme dans le premier cas, on déduit que $z' = (\alpha-b)\overline{z} + b$. $\square$

Exemples 10.14. 1) Les rotations sont des similitudes directes.
2) Les symétries axiales sont des similitudes indirectes.
3) Les translations sont des similitudes directes.

Exercice 10.15. Si S est une similitude du plan, et A, B et C sont 3 points alignés de S, alors leurs images respectives par S, A', B' et C' sont alignés.

Exercice 10.16. Soit S une similitude directe non triviale (c'est à dire : différente de l'identité). Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$ et si $M \in \mathcal{P}$ a pour affixe z, $S(M) = M'$ a pour affixe $az+b$.
1) Montrer que S admet un point invariant si, et seulement si $a \neq 1$, et dans ce cas, le point invariant est unique.
2)Vérifier que si S n'admet pas de point invariant, S est une translation.

Exercice 10.17. Soit S une similitude directe, d'expression complexe $z \mapsto az+b$, où $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. Soient $A, B, M \in \mathcal{P}$. Soient A', B' et M' leurs images respectives par S. Montrer que

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \arg(a) \ [2\pi].$$

Remarque 10.18. Soit S une similitude directe. Si S admet un point invariant, il est appelé centre de S. L'argument de a est appelé angle de S.

Exercice 3.8.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3+2i}{2-3i} = \frac{(3+2i)\overline{(2-3i)}}{(2-3i)\overline{(2-3i)}} = \frac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} \\ &= \frac{6+9i+4i+9}{2^2+3^2} = \frac{15+13i}{13} = \frac{15}{13}+i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^2 = \left(\frac{-1+3i}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1-6i-9}{4} = \frac{-8-6i}{4} = -2-\frac{3}{2}i. \end{aligned}$$

On peut bien aussi calculer les carrés des composantes de la fractions z_2 (numérateur et dénominateur), et ensuite chercher la forme algébrique de z_2 :

$$\begin{aligned} z_2 &= \left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2 = \frac{(1+2i)^2}{(1-i)^2} = \frac{1+4i-4}{1-2i-1} \\ &= \frac{-3+4i}{-2i} = \frac{(-3+4i)i}{(-2i)i} = \frac{-4-3i}{2} = -2-\frac{3}{2}i. \end{aligned}$$

Pour simplifier z_3 on peut mettre les deux fractions de cette différence sur un même dénominateur :

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{1+2i}{1-i} - \frac{1-2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1+i)-(1-2i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{1+i+2i-2-1+i+2i+2}{1+1} = \frac{6i}{2} = 3i. \end{aligned}$$

Si on remarque que $\frac{1+2i}{1-i} = \overline{\frac{1-2i}{1+i}}$, on peut déduire que :

$$z_3 = 2i\, Im\left(\frac{1+2i}{1-i}\right).$$

Or,

$$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+2i-2}{1+1} = \frac{-1+3i}{2}.$$

Donc,

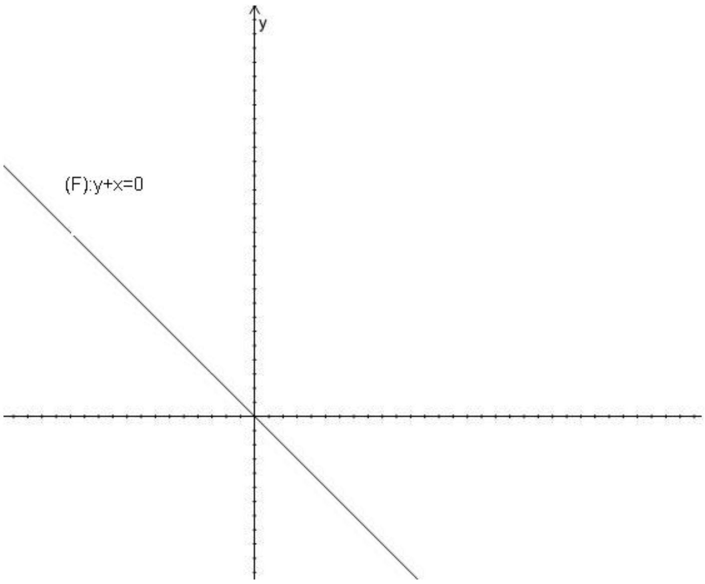
$$z_3 = 2i\left(\frac{3}{2}\right) = 3i.$$

Exercice 4.6. Cherchons F l'ensemble des points $M(z = x+iy)$ tels que $\left|\frac{z+i}{z-1}\right| = 1$.

Méthode1 :

$$\begin{aligned}
|\frac{z+i}{z-1}| = 1 &\Leftrightarrow |z+i|^2 = |z-1|^2 \\
&\Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}-i) = (z-1)(\bar{z}-1) \\
&\Leftrightarrow z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1 = z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 \\
&\Leftrightarrow -i(z-\bar{z}) = -(z+\bar{z}) \\
&\Leftrightarrow -i2i\, Im(z) = -2Re(z) \\
&\Leftrightarrow Im(z) = -Re(z) \\
&\Leftrightarrow x + y = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, F est la droite d'équation $x + y = 0$.



Méthode2 : On considère les points $A(-i)$ et $B(1)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
|\frac{z+i}{z-1}| = 1 &\Leftrightarrow |z+i| = |z-1| \\
&\Leftrightarrow AM = BM \\
&\Leftrightarrow F \text{ est la droite médiatrice du segment } [AB].
\end{aligned}$$

Exercice 4.7.

$$\begin{aligned}
|z+z'|^2 + |z-z'|^2 &= (z+z')\overline{(z+z')} + (z-z')\overline{(z-z')} \\
&= z\bar{z} + z\bar{z'} + z'\bar{z} + z'\bar{z'} + z\bar{z} - z\bar{z'} - z'\bar{z} + z'\bar{z'} \\
&= 2(z\bar{z} + z'\bar{z'}) \\
&= 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).
\end{aligned}$$

Exercice 4.8. Soient u et v deux nombres complexes distincts et de même module. Montrons que le nombre complexe $\frac{u+v}{u-v}$ est imaginaire

pur.
Puisuqe u et v sont distincts et de même module, ils sont tout les deux non nuls. On a alors,

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{u+v}{u-v}\right)} &= \frac{\bar{u}+\bar{v}}{\bar{u}-\bar{v}} = \frac{u\bar{u}+u\bar{v}}{u\bar{u}-u\bar{v}} = \frac{|u|^2+u\bar{v}}{|u|^2-u\bar{v}} = \frac{|v|^2+u\bar{v}}{|v|^2-u\bar{v}} = \frac{v\bar{v}+u\bar{v}}{v\bar{v}-u\bar{v}} \\ &= \frac{v+u}{v-u} = -\frac{u+v}{u-v}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.
Exercice 5.5. Pour chercher un argument de z, il faut d'abord le mettre sous forme algébrique :

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{4} = i.$$

Donc, $arg(i) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
Exercice 5.10. Soit θ un argument de $u = 1+i$ et θ' un argument de $v = -1+i\sqrt{3}$.

(1) $|u|\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et $|v| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

(2) Argument de u : On a

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad ; \qquad \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc, $\theta = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.
Argument de v : On a

$$\cos(\theta') = \frac{-1}{2} \qquad ; \qquad \sin(\theta') = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc, $\theta' = \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.

(3) On a $|\bar{u}| = |u| = \sqrt{2}$; $|uv| = |u|\,|v| = 2\sqrt{2}$; $|v^3| = |v|^3 = 8$ et $\left|\frac{u}{v}\right| = \frac{|u|}{|v|} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Pour les arguments on a :
$arg(\bar{u}) = -arg(u) = -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$
$arg(uv) = arg(u) + arg(v) = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}\,[2\pi]$
$arg(v^3) = 3\,arg(v) = 3\frac{2\pi}{3} = 2\pi = 0\,[2\pi]$
$arg\left(\frac{u}{v}\right) = arg(u) - arg(v) = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{-5\pi}{12}\,[2\pi]$.

(4) On a

$$\begin{aligned}\frac{u}{v} &= \frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(-1-i\sqrt{3})}{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})} = \frac{-1-i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{1+3} \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3}+1}{4}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right) = \frac{\frac{-1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad ; \quad \sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right) = \frac{\frac{-1-\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

(5) On a $|v^3| = 8$ et $arg(v^3) = 0\,[2\pi]$.
Donc, $v^3 = 8(\cos(0) + i\sin(0)) = 8$.

Exercice 6.7. Dans ce genre d'exercices, on factorise souvent par la moyenne des deux arguments :

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta} + e^{i2\theta} = e^{3i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = 2\cos(\theta/2)\,e^{3i\theta/2} \\ &= 2\cos(\theta/2)\left(\cos(3\theta/2) + i\sin(\cos(3\theta/2)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z' &= 1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2} \\ &= 2\cos(\theta/2)\left(\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)\right). \end{aligned}$$

Comme $\theta \in]-\pi;\pi[$, $\theta/2 \in]-\pi/2;\pi/2[$, et par conséquent $\cos(\theta/2) > 0$. Donc, $2\cos(\theta/2)$ est bien le module de z et z'.

Exercice 8.5.

(1) Soit x une racine réelle de (E). Alors, $x^3 - ix + 1 - i = 0$. Ainsi, $(x^3+1) - i(x+1) = 0$. Par suite, $x^3 + 1 = 0$ et $x + 1 = 0$. Par conséquent, $x = -1$.

(2) On divise $z^3 - iz + 1 - i$ par $z + 1$ pour obtenir $z^3 - iz + 1 - i = (z+1)(z^2 - z + 1 - i)$.
Cherchons les solutions de l'équation (E') : $z^2 - z + 1 - i = 0$.
On a $\Delta = 1 - 4(1-i) = 1 + 4i - 4 = 1 + 2(2i) + (2i)^2 = (1+2i)^2$.
Donc, les solutions de (E') sont :

$$z_1 = \frac{1-1-2i}{2} = -i \quad , \quad z_2 = \frac{1+1+2i}{2} = 1+i.$$

Enfin, les solutions de (E) sont -1, z_1 et z_2.

Exercice 10.4.

(1) (a) On a $2^3 + 2.2^2 - 16 = 0$. Donc, 2 est une solution de (E).

$$z^3+2z^2-16 = (z-2)(az^2+bz+c) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1, \\ b - 2a = 2, \\ c - 2b = 0, \\ -2c = -16. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1, \\ b = 4, \\ c = 8. \end{array}\right.$$

D'où $z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(z^2 + 8z + 4)$.

(b) $\Delta = 16 - 4.8 = -16 = (4i)^2$. Donc, les racince de $z^2 + 8z + 4$ sont

$$z_1 = \frac{-4+4i}{2} = -2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4},$$

$$z_2 = \overline{z_1} = -2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i3\pi/4}.$$

Les solutions de (E) sont 2, z_1 et z_2.

(2)

$$\begin{aligned} ABCD \text{ est un parallélogramme } &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ &\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \\ &\Leftrightarrow z_C = z_B + z_D - z_A = 2 + 4i. \end{aligned}$$

(3) $r = r(B; -\frac{\pi}{2})$ et $r' = r(D; \frac{\pi}{2})$

(a)

$$\begin{aligned} E = r(C) &\Leftrightarrow z_E - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_B) \Leftrightarrow z_E - z_B = -i(z_C - z_B) \\ &\Leftrightarrow z_E = -i(z_C - z_B) + z_B = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = r'(C) &\Leftrightarrow z_F - z_D = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_D) \Leftrightarrow z_F - z_D = i(z_C - z_D) \\ &\Leftrightarrow z_F = i(z_C - z_D) + z_D = -4 + 6i. \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \frac{-4 + 6i + 2 + 2i}{6 + 2 + 2i} = \frac{-2 + 8i}{8 + 2i} = \frac{i(2i + 8)}{8 + 2i} = i.$$

On a alors,

$$|\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}| = |i| = 1 \Leftrightarrow AF = AE \Leftrightarrow AFE \text{ est isocèle en } A.$$

Et aussi,

$$\begin{aligned} arg\left(\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi] &\Leftrightarrow (AF) \perp (AE) \\ &\Leftrightarrow AFE \text{ est rectangle en } A. \end{aligned}$$

Exercice 10.9. Soient $M, N \in \mathcal{P}$. Posons

$$S(M) = M', \ S(N) = N', \ \text{ et } \ h_{A,\frac{1}{k}}(M') = M", \ h_{A,\frac{1}{k}}(N') = N".$$

Alors

$$\overrightarrow{M"N"} = \overrightarrow{M"A} + \overrightarrow{AN"} = \frac{1}{k}(\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AN'}) = \frac{1}{k}\overrightarrow{M'N'}.$$

D'où,

$$\|\overrightarrow{M"N"}\| = \frac{1}{k}\|\overrightarrow{M'N'}\| = \|\overrightarrow{MN}\|.$$

Ainsi, $h_{A,\frac{1}{k}} \circ S$ est une isométrie. Posons $T = h_{A,\frac{1}{k}} \circ S$. Alors $S = h_{A,k} \circ T$.

Exercice 10.15. Clairement, on peut supposer que les points A, B et C sont distincts deux à deux. Désignons par z_1, z_2 et z_3 leurs affixes respectives et par z'_1, z'_2 et z'_3 les affixes respectives de leurs images

respectives A', B' et C'. La famille $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ est liée. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z_2 - z_1 = \lambda(z_3 - z_1)$.
Supposons d'abord que S est directe. Donc il existe $a, b \in \mathbb{C}$, où $a \neq 0$ tel que si $M(z)$ est un point du plan, $M' = S(M)$ a pour affixe $az + b$. Considérons les affixes respectifs $a(z_2 - z_1)$ et $a(z_3 - z_1)$ des vecteurs $\{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\}$. Alors $a(z_2 - z_1) = \lambda a(z_3 - z_1)$. Ainsi la famille $\{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\}$ est liée.
Le cas des similitudes indirectes est traité de manière analogue.

Exercice 10.16. Si $a \neq 1$, l'équation $z = az + b$ admet une unique solution. Donc si $a \neq 1$, S admet un unique point invariant. Si $a = 1$, comme S n'est pas l'identité, $b \neq 0$. D'où S est une translation, et n'a pas de point invariant.

Exercice 10.17. Désignons par z_1, z_2 et z les affixes respectives de A, B et M. Alors $z - z_1$ et $z_2 - z_1$ sont les affixes respectives de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{A'M'}$ a pour affixe $a(z - z_1)$. Et par suite

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \arg(a)\ [2\pi].$$

De même pour $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.