

Estimateur d'erreur hiérarchique et Algorithmes de marquage.

ALLA Abdellah

Module: Analyse Numérique des équations aux dérivées partielles (ANEDP)
Option: Mathématiques d'Aide à la Décision
Master: Mathématique et Applications, Semestre 3.
Département de Mathématiques
Université Mohammed V, Faculté des Sciences de Rabat.
2016-2017.

Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 Estimation d'erreur hiérarchique
- 3 Démonstration
- 4 Algorithme d'adaptation

Introduction

EDP

On cherche u , telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1)$$

avec :

- Ω un ouvert, borné, régulier de \mathbb{R}^d ($d = 1$ ou 2),
- $\Gamma = \partial\Omega$,
- $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$.

Introduction

Problème continu

Formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{V}, \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}, \end{cases} \quad (2)$$

avec :

- $a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + u v) dx,$
- $L(v) = \int_{\Omega} f v dx,$
- $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega).$

Lemme *Lax-Milgram* \implies existence et unicité de la solution exacte.

Introduction

Problème approché

On se donne :

- \mathcal{T}_h une triangulation conforme de Ω ,
- $\mathcal{V}_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset \mathcal{V}$.

Le problème approché :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \mathcal{V}_h, \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h, \end{cases} \quad (3)$$

Lemme *Lax-Milgram* \implies existence et unicité de la solution approchée.

Introduction

Equation du résidu

Equation du résidu :

On pose : $e = u - u_h$,

$$a(e, v) = R(u_h; v) \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (4)$$

avec :

$$R(u_h; v) := L(v) - a(u_h, v) \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow R(u_h; \cdot) \in H^{-1}(\Omega).$$

Estimation :

$$\|e\| \leq \|R(u_h; \cdot)\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad (6)$$

\Leftrightarrow la norme n'est pas directement calculable.

Des estimations de $\|R(u_h; \cdot)\|_{H^{-1}(\Omega)}$ seront cherchées.

Introduction

Estimations d'erreur

Deux types d'estimations pour l'erreur :

a priori :

$$\|e\| \leq H(h, u, f) \quad (7)$$

fournit des informations sur le comportement
ou
le taux de convergence de l'erreur.

a posteriori :

$$c_1 \eta(u_h) \leq \|e\| \leq c_2 \eta(u_h), \quad (8)$$

c_1 et c_2 sont des constantes indépendantes de h .

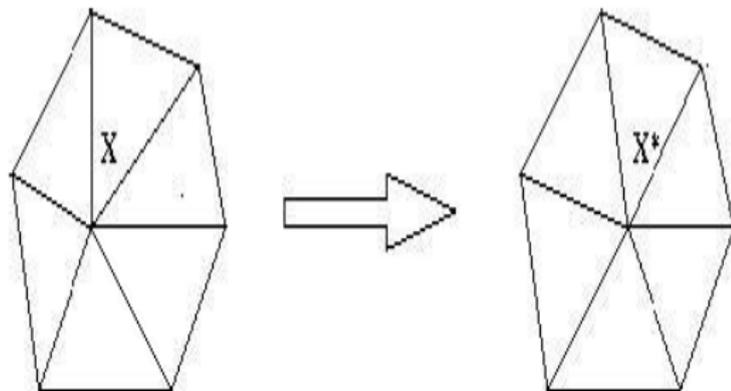
↪ Premiers travaux : *I. Babuska, W. Reinboldt (1978)*.

Les estimations *a posteriori* nous permettent de **Mesurer** la **qualité** de la solution et de **Contrôler** des algorithmes d'adaptation de maillages.

Ces algorithmes sont basés sur des opérations locales :

Introduction

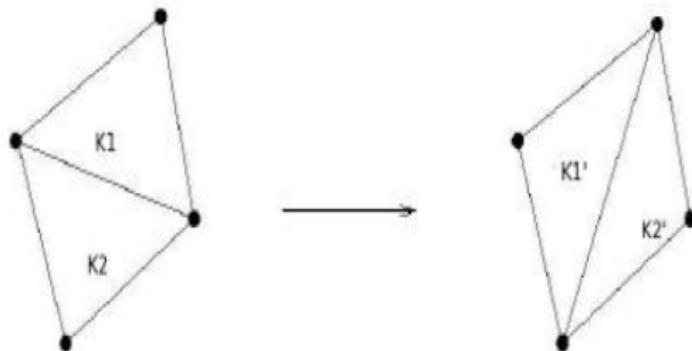
Opération locale : R-adaptation



Déplacement d'un nœud.

Introduction

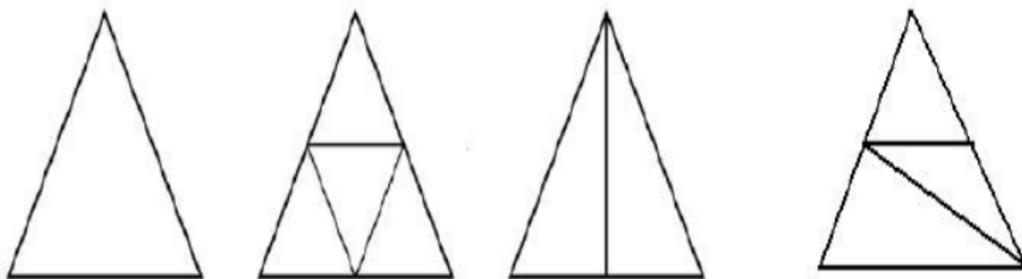
Opération locale : Retournement d'arêtes



Retournement d'arête.

Introduction

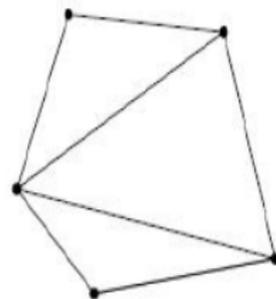
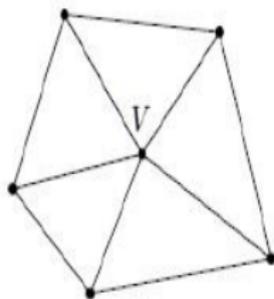
Opération locale : Raffinement



Raffinement.

Introduction

Opération locale : Déraffinement



déraffinement.

Introduction

Estimations d'erreur

Comment construire cet estimateur ?

Deux approches :

- Approche 1 : **Résidu** de l'équation.

↪ Une référence standard : *R. Verfürth "A review of A Posteriori error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement techniques", Wiley and Teubner Mathematics,(1996).*

$R(u_h; \cdot)$ est un élément de l'espace dual $H^{-1}(\Omega)$ où la norme n'est pas directement calculable. Ce qui conduit à utiliser des normes discrète pour établir des résultats théoriques. On obtient une borne supérieure et une borne inférieure de l'erreur commise à l'aide d'indicateurs dits par résidus qui sont généralement formé de norme dans $L^2(\Omega)$ du résidu de l'équation forte et des sauts de la dérivée normale à travers les inter-éléments.

Introduction

Estimations d'erreur

Comment construire cet estimateur ?

- Approche 2 : **Approximation d'ordre supérieur.**

↔ *Approche utilisée par les codes commerciaux MEF.*

↔ *Ne dépend pas de l'équation.*

Si on dispose d'une **meilleure solution** (obtenue avec une méthode d'ordre supérieur), **la différence** entre cette solution et celle dont on veut évaluer la qualité peut être considérée comme un estimateur d'erreur.

Un moyen d'avoir une approximation de **degré supérieur** en utilisant le **résidu** :

Estimateur d'erreur hiérarchique
Bank R. E., Smith R. K. (1993)

↔ *Bank R. E., Smith R. K. : "A posteriori error estimates based on hierarchical bases", SIAM J. Numer. Anal., Vol 30, N4. pp.921-935, August 1993.*

Définition

Notations et Espaces

Cas : $k = 1$

Notations :

- $\bar{\mathcal{V}}_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}); v_h|_K \in P_2(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset \mathcal{V}$,
- \bar{u}_h est solution du problème : $a(\bar{u}_h, \bar{v}_h) = L(\bar{v}_h) \quad \forall \bar{v}_h \in \bar{\mathcal{V}}_h$.

Décomposition hiérarchique :

$$\bar{\mathcal{V}}_h = \mathcal{V}_h \oplus E_h, \quad (9)$$

avec :

- $E_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) / v_h|_{K_i} \in P_2(K_i) \text{ et } v_h(a_i) = 0 \forall a_i \text{ sommet de } \mathcal{T}_h\}$,
- $\mathcal{V}_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}); v_h|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset \mathcal{V}$.

Définition

Problème hiérarchique

- $e = u - u_h$,
- $a(e, v) = R(u_h; v) := L(v) - a(u_h, v) \quad \forall v \in \mathcal{V}$.

- Estimateur d'erreur hiérarchique :

$$\begin{cases} \text{Trouver } e_h \in E_h, \text{ tel que :} \\ a(e_h, w_h) = R(u_h; w_h) \quad \forall w_h \in E_h, \end{cases} \quad (10)$$

avec :

$$E_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) / v_h|_{K_i} \in P_2(K_i) \text{ et } v_h(a_i) = 0 \quad \forall a_i \text{ sommet de } \in \mathcal{T}_h\}.$$

Estimation d'erreur hiérarchique

Théorème (R. E. Bank, R. K. Smith, 1993)

Sous les hypothèses :

1 (HS) $\exists \beta, 0 < \beta < 1$ telle que $\|u - \bar{u}_h\| \leq \beta \|u - u_h\|$,

2 (CBS) $\left\{ \begin{array}{l} \exists \gamma < 1 \text{ indépendante de } h, \text{ telle que} \\ \forall v \in \mathcal{V}_h \forall w \in E_h |a(v, w)| < \gamma \|v\| \|w\|, \end{array} \right.$

nous avons :

$$\|e_h\|^2 \leq \|e\|^2 \leq \frac{1}{(1 - \beta^2)(1 - \gamma^2)} \|e_h\|^2.$$

Rappel :

- $\bar{\mathcal{V}}_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h|_K \in P_2(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$,
- \bar{u}_h est solution du problème : $a(\bar{u}_h, \bar{v}_h) = L(\bar{v}_h) \quad \forall \bar{v}_h \in \bar{\mathcal{V}}_h$,
- $\mathcal{V}_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$,
- u_h est solution du problème : $a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h$.

Problème continue et Espaces

\mathcal{V} un espace de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue et \mathcal{V} -elliptique, et $L(\cdot)$ une forme linéaire continue dans \mathcal{V} .

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{V} \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}. \end{cases} \quad (28)$$

\mathcal{V}_h et $\tilde{\mathcal{V}}_h$ deux sous espaces de \mathcal{V} de dimension finie tels que

$$\mathcal{V}_h \subset \tilde{\mathcal{V}}_h \subset \mathcal{V}. \quad (29)$$

Par exemple

$$\mathcal{V}_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) / v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$\tilde{\mathcal{V}}_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) / v_h|_K \in \mathbb{P}_2(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

Problèmes approchés et Hypothèses

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in \mathcal{V}_h \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } \bar{u}_h \in \bar{\mathcal{V}}_h \text{ tel que} \\ a(\bar{u}_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \end{cases} \quad (31)$$

Nous supposons que nous avons la décomposition hiérarchique suivante

$$\bar{\mathcal{V}}_h = \mathcal{V}_h \oplus E_h. \quad (32)$$

et que

$$\exists \beta < 1, \text{ tel que } \| \|u - \bar{u}_h\| \| \leq \beta \| \|u - u_h\| \| \quad (33)$$

$$\exists \gamma < 1, \text{ tel que } |a(v, w)| \leq \gamma \| \|v\| \| \|w\| \quad \forall v \in \mathcal{V}_h, \forall w \in E_h. \quad (34)$$

β et γ sont indépendants de h

Relations d'orthogonalités

Considérons le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } e_h \in E_h \text{ tel que} \\ a(e_h, w_h) = L(w_h) - a(u_h, w_h) \quad \forall w_h \in E_h. \end{cases} \quad (35)$$

Nous avons les relations d'orthogonalité suivante (R.E.Bank, A.Weiser(1985), R.E.Bank, R.K.Smith(1993)):

Proposition

Si u_h, \bar{u}_h et e_h sont les solutions respectives de (30), (31) et (35), alors nous avons les relations d'orthogonalité suivantes

- ❶ $a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h.$
- ❷ $a(u - \bar{u}_h, \bar{v}_h) = 0 \quad \forall \bar{v}_h \in \bar{\mathcal{V}}_h.$
- ❸ $a(\bar{u}_h - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h.$
- ❹ $a(u - u_h - e_h, \hat{v}_h) = 0 \quad \forall \hat{v}_h \in E_h.$
- ❺ $a(\bar{u}_h - u_h - e_h, \hat{v}_h) = 0 \quad \forall \hat{v}_h \in E_h.$

De plus on a

$$\| \|u - u_h\| \|^2 = \| \|u - \bar{u}_h\| \|^2 + \| \|\bar{u}_h - u_h\| \|^2 \quad (36)$$

Démonstration : Relations d'orthogonalités

Démonstration:

- En prenant $v = v_h \in \mathcal{V}$ dans la problème (43), et en retranchant l'équation obtenue à (30) on obtient $a(u - u_h, v_h) = 0, \forall v_h \in \mathcal{V}_h$.
- De même en prenant $v = \bar{v}_h \in \bar{\mathcal{V}}$ dans la problème (43), et en retranchant l'équation obtenue à (31) on obtient $a(u - \bar{u}_h, \bar{v}_h) = 0, \forall \bar{v}_h \in \bar{\mathcal{V}}_h$.
- Pour montrer la propriété (3), on utilise la propriété (2) pour $\bar{v}_h = v_h \in \mathcal{V}_h \subset \bar{\mathcal{V}}_h$ et la propriété (1)

$$\begin{aligned} a(\bar{u}_h - u_h, v_h) &= a(\bar{u}_h - u + u - u_h, v_h) \\ &= \underbrace{a(\bar{u}_h - u, v_h)}_{=0} + \underbrace{a(u - u_h, v_h)}_{=0} \end{aligned}$$

Démonstration : Relations d'orthogonalités

Suite 1

- d'après la définition de e_h , on a :

$$a(e_h, \hat{v}_h) = L(\hat{v}_h) - a(u_h, \hat{v}_h) \quad \forall \hat{v}_h \in E_h$$

et comme pour $v = \hat{v}_h \in E_h \subset \mathcal{V}$ dans le problème (43), on a :

$$a(u, v_h) = L(\hat{v}_h)$$

on en déduit

$$a(e_h, \hat{v}_h) = a(u, \hat{v}_h) - a(u_h, \hat{v}_h)$$

soit

$$a(u - u_h - e_h, \hat{v}_h) = 0 \quad \forall \hat{v}_h \in E_h$$

- On pose $\bar{v}_h = \hat{v}_h \in E_h$ dans le problème (31), pour obtenir :

$$a(\bar{u}_h, \hat{v}_h) = L(\hat{v}_h) \quad \forall \hat{v}_h \in E_h$$

et d'après la définition de e_h , on a aussi :

$$a(e_h, \hat{v}_h) = a(\bar{u}_h, \hat{v}_h) - a(u_h, \hat{v}_h) \quad \forall \hat{v}_h \in E_h$$

D'où :

$$a(\bar{u}_h - u_h - e_h, \hat{v}_h) = 0 \quad \forall \hat{v}_h \in E_h$$

Démonstration : Relations d'orthogonalités

Suite 2

Montrons maintenant (36)

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2 &= a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - \bar{u}_h + \bar{u}_h - u_h, u - \bar{u}_h + \bar{u}_h - u_h) \\ &= \|u - \bar{u}_h\|^2 + \|\bar{u}_h - u_h\|^2 + 2a(u - \bar{u}_h, \bar{u}_h - u_h) \end{aligned}$$

or $\bar{u}_h - u_h \in \bar{V}_h$ alors d'après la propriété (2), $a(u - \bar{u}_h, \bar{u}_h - u_h) = 0$
soit

$$\|u - u_h\|^2 = \|u - \bar{u}_h\|^2 + \|\bar{u}_h - u_h\|^2$$

■

Nous déduisons de (36), l'inégalité suivante:

$$\|\bar{u}_h - u_h\|^2 \leq \|u - u_h\|^2.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse (33), on aura:

$$\|u - u_h\|^2 \leq \beta^2 \|u - u_h\|^2 + \|\bar{u}_h - u_h\|^2$$

soit

$$(1 - \beta^2) \|u - u_h\|^2 \leq \|\bar{u}_h - u_h\|^2$$



Une relation d'équivalence

et finalement

$$(1 - \beta^2) \| \|u - u_h\| \|^2 \leq \| \bar{u}_h - u_h \| \|^2 \leq \| \|u - u_h\| \|^2.$$

Ceci signifie que $\| \bar{u}_h - u_h \|$ est équivalent à l'erreur $\| \|u - u_h\|$.

En pratique, le calcul de la solution \bar{u}_h est coûteux. Le théorème qui suit, donne une estimation de l'erreur $u - u_h$ par le terme e_h .

Démonstration

Théorème

Supposons que $\bar{\mathcal{V}}_h = \mathcal{V}_h \oplus E_h$. Sous les hypothèses (33) et (34), La solution du problème (35) vérifie

$$(1 - \beta^2)(1 - \gamma^2) \|u - u_h\|^2 \leq \|e_h\|^2 \leq \|u - u_h\|^2 \quad (37)$$

Démonstration:

Montrons l'inégalité $\|e_h\|^2 \leq \|u - u_h\|^2$.

Posons $\hat{v}_h = e_h$ dans la propriété (4) de la proposition 6, on obtient:

$$a(u - u_h, e_h) = a(e_h, e_h) = \|e_h\|^2$$

alors:

$$\|e_h\| \leq \|u - u_h\|$$

Démonstration

Suite 1

Montrons l'inégalité $(1 - \beta^2)(1 - \gamma^2) \|u - u_h\|^2 \leq \|e_h\|^2$.

Soit $\bar{u}_h = \hat{u}_h + \hat{e}_h$, avec: $\hat{u}_h \in \mathcal{V}_h$ et $\hat{e}_h \in E_h$. Posons: $v_h = \hat{u}_h - u_h$ dans la propriété (3) de la proposition 6, alors:

$$\|\bar{u}_h - u_h\|^2 = a(\bar{u}_h - u_h, \hat{e}_h).$$

Posons $\hat{v}_h = \hat{e}_h$ dans la propriété (5), pour obtenir:

$$a(\bar{u}_h - u_h, \hat{e}_h) = a(e_h, \hat{e}_h),$$

alors:

$$\|\bar{u}_h - u_h\|^2 = a(e_h, \hat{e}_h) \quad (38)$$

Remplaçons (38) dans (36):

$$\|u - u_h\|^2 = \|u - \bar{u}_h\|^2 + a(\hat{e}_h, e_h) \quad (39)$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_h - u_h\|^2 &= \|\bar{u}_h - \hat{u}_h + \hat{u}_h - u_h\|^2 \\ &= \|\hat{e}_h + \hat{u}_h - u_h\|^2 \\ &= \|\hat{e}_h\|^2 + \|\hat{u}_h - u_h\|^2 + 2 a(\hat{e}_h, \hat{u}_h - u_h) \end{aligned}$$

Démonstration

Suite 2

Or $\hat{e}_h \in E_h$ et $\hat{u}_h - u_h$, alors d'après l'inégalité de CBS, on a :

$$a(\hat{e}_h, \hat{u}_h - u_h) \geq -\gamma \|\hat{e}_h\| \|\hat{u}_h - u_h\|$$

Alors :

$$\|\bar{u}_h - u_h\|^2 \geq \|\hat{u}_h - u_h\|^2 + \|\hat{e}_h\|^2 - 2\gamma \|\hat{u}_h - u_h\| \|\hat{e}_h\|$$

Puisque :

$$\|\hat{u}_h - u_h - \gamma \hat{e}_h\|^2 \geq 0$$

alors :

$$\|\hat{u}_h - u_h\|^2 - 2\gamma \|\hat{u}_h - u_h\| \|\hat{e}_h\| \geq -\gamma^2 \|\hat{e}_h\|^2$$

Donc :

$$\|\bar{u}_h - u_h\|^2 \geq (1 - \gamma^2) \|\hat{e}_h\|^2 \quad (40)$$

Combinons le résultat (40) avec (38), pour obtenir :

$$(1 - \gamma^2) \|\hat{e}_h\| \leq \|e_h\| \quad (41)$$

Démonstration

Suite 3

L'utilisation de (39) et de (41) nous donnent:

$$\|u - u_h\|^2 \leq \beta^2 \|u - u_h\|^2 + \frac{1}{1 - \gamma^2} \|e_h\|^2$$

$$(1 - \beta^2) \|u - u_h\|^2 \leq \frac{1}{1 - \gamma^2} \|e_h\|^2$$

$$(1 - \beta^2)(1 - \gamma^2) \|u - u_h\|^2 \leq \|e_h\|^2$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Définition

$\|e_h\|$ est appelé estimateur hiérarchique.

Algorithme d'adaptation

Objectif: *Obtenir une approximation avec une précision ε donnée*

DONNÉES:

- les coefficients de l'EDP et les données du problème.
- la tolérance ε .

ETAPE 1:

- Construction d'un maillage initial \mathcal{T}_0 grossier tenant compte de la géométrie et des données.
- Poser $k = 0$

ETAPE 2: Résoudre l'EDP sur \mathcal{T}_k

ETAPE 3: Pour chaque $K \in \mathcal{T}_k$ calculer les indicateurs d'erreurs.

ETAPE 4:

- Si l'estimateur global est plus petit que ε alors **STOP**
- Sinon décider quel élément devrait être raffiné et construire \mathcal{T}_{k+1} et aller à l'**ETAPE 2**

Algorithme d'adaptation

Suite

ETAPE4 nécessite deux ingrédients clés:

- Une stratégie de détection (ou de "marquage") de l'élément K à raffiner
- Une règle de raffinement à adopter pour subdiviser un élément.

Le maillage final devrait être conforme \rightarrow le processus de raffinement se fait sur deux niveaux

- Le premier niveau consiste à déterminer un sous-ensemble de $\tilde{\mathcal{T}}_k$ de \mathcal{T}_k des éléments qui devraient être raffinés.
- Le deuxième niveau consiste à déterminer les éléments supplémentaires à raffiner pour obtenir un maillage conforme (traiter les nœuds suspendus)

Stratégie de maximum

Algorithme de la stratégie du maximum

DONNÉES:

- un maillage \mathcal{T}
- des indicateurs η_K , pour tout $K \in \mathcal{T}$
- un seuil $\theta \in]0, 1[$.

OBJECTIF: Déterminer l'ensemble $\tilde{\mathcal{T}}$ des éléments marqués pour être raffinés.

ETAPE 1: Calculer

$$\eta_{max} := \max_{K \in \mathcal{T}} \eta_K$$

ETAPE 2: Pour tout $K \in \mathcal{T}$, faire le test: Si

$$\eta_K \geq \theta \eta_{max}$$

marquer K pour le raffinement et le mettre dans l'ensemble $\tilde{\mathcal{T}}$

Stratégie d'équilibrage

Algorithme de la stratégie d'équilibrage

DONNÉES: un maillage \mathcal{T} , des indicateurs $\eta_K, K \in \mathcal{T}$, un seuil $\theta \in]0, 1[$.

OBJECTIF: Déterminer l'ensemble $\tilde{\mathcal{T}}$ des éléments marqués pour être raffinés.

ETAPE 1:

- Calculer $\Theta_{\mathcal{T}} := \sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_K^2$
- Poser $\Sigma_{\mathcal{T}} = 0$ et $\tilde{\mathcal{T}} = \emptyset$

ETAPE 2: Calculer $\eta_{max} := \max_{K \in \mathcal{T} \setminus \tilde{\mathcal{T}}} \eta_K$

ETAPE 3: Pour $K \in \mathcal{T} \setminus \tilde{\mathcal{T}}$ faire **ETAPE 4** et **ETAPE 5**

- **ETAPE 4** si $\eta_K = \eta_{max}$ alors
 - mettre K dans $\tilde{\mathcal{T}}$
 - $\Sigma_{\mathcal{T}} \leftarrow \Sigma_{\mathcal{T}} + \eta_K^2$
- **ETAPE 5** sinon sauter K

ETAPE 6 Si $\Sigma_{\mathcal{T}} \geq \theta \Theta_{\mathcal{T}}$ alors sortir $\tilde{\mathcal{T}}$ et **STOP**

Sinon aller à **ETAPE 2**

Stratégie

Suite

A la fin de cet algorithme nous avons

$$\sum_{K \in \tilde{\mathcal{T}}} \eta_K^2 \geq \theta \sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_K^2$$

- les deux stratégies \rightarrow résultats comparables,
- θ grand $\rightarrow \tilde{\mathcal{T}}$ petit \rightarrow peu d'éléments sont marqués
- θ petit $\rightarrow \tilde{\mathcal{T}}$ grand \rightarrow beaucoup d'éléments sont marqués
- $\theta \approx 0,5$ est le plus populaire.