Université Mohammed V-Rabat | Année universitaire: 2016-17
Faculté des Sciences | SMA-S5- Topologie
Département de Mathématiques | Examen 1h30

Exercice 1.
1. Dans un espace topologique E, rappeler la définition d'un point x adhérent à une partie non vide $A \subset E$.
2. Soit $E = \Pi_{i\in I} E_i$ un produit d'espaces topologiques. Décrire un ouvert pour la topologie produit définie sur E.

Exercice 2. Soit $E_1 = C^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On pose, pour tout $f \in E_1$, $||f||_\infty = sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ et $||f||_1 = |f(0)| + ||f'||_\infty$.
1. Montrer que $||.||$ est une norme sur E_1.
2. Montrer que pour tout $f \in E_1$, on a $||f||_\infty \leq ||f||$.
3. On rappelle que $E_0 = C([0,1], \mathbb{R})$, espace des fonctions continues, muni de la norme $||.||_\infty$ est complet. On veut montrer que $(E_1, ||.||)$ est un espace métrique complet. Pour cela, soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(E_1, ||.||)$.
3a. Montrer que la suite des dérivées $(f'_n)_n$ est convergente vers une fonction g continue.
3b. On pose $\psi(x) = \alpha + \int_0^x g(t)dt$ où $\alpha = lim_{n\to\infty} f_n(0)$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge vers la fonction ψ pour la norme $||.||$.
4. Vérifier que la suite $(\varphi_n)_n$ donnée par $\varphi_n(x) = xe^{-\frac{nx^2}{2}}$ converge dans $(E_1, ||.||_\infty)$ mais ne converge pas dans $(E_1, ||.||)$.

Exercice 3. (E, d) désigne un espace métrique, on suppose que E est compact. Soit $f : E \to E$ une application continue.

I. On suppose dans cette partie que f vérifie: $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, $\forall (x, y) \in E^2$ et on se propose de montrer que f est bijective.
Soit $x_0 \in E$, on suppose que $x_0 \notin f(E)$ et soit α le réel défini par $\alpha = inf_{z\in f(E)} d(x_0, z)$.
1. Justifier qu'on a $\alpha > 0$.
2. On définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, par $x_n = f^n(x_0)$. Montrer que $d(x_0, x_n) \geq \alpha$ pour tout $n \geq 1$ puis que $d(x_n, x_m) \geq \alpha$ si $m \neq n$.
3. Trouver une contradiction et conclure que f est surjective puis que f est bijective.

II. On suppose à présent que f vérifie $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. On veut montrer qu'on a forcément l'égalité.
On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe deux éléments de E, x et x' distincts tels que $d(f(x), f(x')) > d(x, x')$.
1. On considère les deux suites $(x_n)_n = (f^n(x))_n$ et $(x'_n)_n = (f^n(x'))_n$. Montrer rigoureusement qu'il existe deux sous suites $(x_{\psi(n)})_n$ et $(x'_{\psi(x)})_n$ convergentes (avec les mêmes indices).
2. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que si $n_0 \geq N$, on a $d(f^{\psi(n_0+1)}(x), f^{\psi(n_0)}(x)) < \varepsilon$. Trouver alors un majorant de $d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x), x)$.
3. Déduire de ce qui prédède une majoration de $d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x), f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x'))$ en fonction de $d(x, x')$ et de ε.
4. Déduire alors une contradiction et conclure.

Corrigé
Exercice 1. Voir cours.

Exercice 2.
1. On va vérifier seulement une propriété.
On suppose $||f|| = 0$, ceci implique $||f'||_\infty = 0$ et $|f(0)| = 0$. Ainsi, on a $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et par suite f est une constante qui est forcément nulle.
2. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [0,1]$, il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(x) - f(0) = xf'(c)$. On obtient alors $|f(x)| \leq |f(0)| + x|f'(c)|$ et donc $|f(x)| \leq |f(0)| + ||f'||_\infty$ ceci $\forall x \in [0,1]$, d'où $||f||_\infty \leq ||f||$, pour tout $f \in E_1$.
3a. La suite $(f'_n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace métrique $(E_0, ||.||_\infty)$, ce dernier étant complet, elle converge donc vers une fonction continue g.
3b. Puisque la dérivée de la fonction ψ est la fonction g, que la suite $(f'_n)_n$ converge vers g (pour la norme $||.||_\infty$) et que la suite $(f_n(0))_n$ converge vers $\alpha = \psi(0)$, on peut affirmer que la suite $(f_n)_n$ converge vers ψ pour la norme $||.||$.
4. On peut vérifier que la suite $(\sup_{x\in[0,1]}|\varphi_n(x)|)_n$ tend vers 0 ce qui prouve que la suite $(\varphi_n)_n$ converge pour la norme $||.||_\infty$. Par contre, elle ne converge pas pour la norme $||.||$ car, si elle convergeait pour cette norme, la suite des fonctions dérivées convergerait pour la norme $||.||_\infty$. En particulier, la limite de la suite des dérivées serait continue ce qui n'est pas car on a une discontinuité en 0.

Exercice 3.
I.1. On a $\alpha > 0$ car sinon on peut construire une suite de points $(z_n)_n$ dans $f(E)$ convergente vers α. E étant compact et f continue, $f(E)$ est aussi compact. La limite α doit appartenir à $f(E)$ ce qui contredit l'hypothèse.
2. Il suffit de remarquer que pour tout entier $n \geq 1$, x_n appartient à $f(E)$ et par suite $d(x_0, x_n) \geq d(x_0, f(E)) = \alpha$.
On suppose pour simplifier qu'on a $m \geq n$. D'après l'hypothèse, on a $d(x_n, x_m) = d(f^n(x_0), f^m(x_0)) = d(x_0, f^{m-n}(x_0)) \geq \alpha$.
3. La suite $(x_n)_n$ est dans $f(E)$ qui est compact, elle admet donc une valeur d'adhérence. Or, l'inégalité $d(x_n, x_m) \geq \alpha$ montre que toute sous suite n'est pas de Cauchy, d'où la contradiction. Ainsi, f est surjective et comme f vérifie $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$, elle est aussi injective. f est donc bijective.

II.1. Tout d'abord, il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente. Si on considère la sous suite $(y_{\varphi(n)})_n$, elle admet elle même une sous suite notée $(y_{\psi(n)})_n$ elle même convergente. $(x_{\psi(n)})_n$ étant une sous suite de la sous suite convergente $(x_{\varphi(n)})_n$, elle est aussi convergente.
2. On a $f^{\psi(n)}(x_0) = x_{\psi(n)}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que si p et q sont deux entiers supérieurs ou égaux à N, on a $d(f^n(x), f^m(x)) < \varepsilon$. Si $n_0 \geq N$, on a alors, $\psi(n_0)$ et $\psi(n_0+1)$ supérieurs à N, on obtient alors $d(f^{\psi(n_0+1)}(x), f^{\psi(n_0)}(x)) < \varepsilon$.
Un majorant évident de $d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x), x)$ est d'après ce qui précède ε.
3. On a $d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x), f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x')) \leq d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x), x) + d(x,x') + d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x'), x')$.
$d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x), f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x')) \leq 2\varepsilon + d(x,x')$, ceci $\forall \varepsilon > 0$.
4. On a abouti à $d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x), f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x')) \leq d(x,x')$ ce qui contredit $d(f(x), f(x')) > d(x,x')$.
f vérifie donc $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$, $\forall (x,y) \in E^2$.