

Exercice 1. $E = C(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des applications définies, continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On considère l'ensemble X défini par

$$X = \{f \in C(\mathbb{R}) \text{ telle que } (1+x^2)|f(x)| \text{ soit une fonction bornée}\}.$$

Pour tout $f \in X$, on pose $N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)|$ et $L(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. (On peut montrer mais on suppose que cette intégrale est convergente.)

1. Montrer que N définit une norme.
- 2a. Calculer $L(g)$ où g désigne la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- 2b. En écrivant $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)f(x)$, montrer que $|L(f)| \leq \pi N(f)$.
- 2c. Que peut on déduire pour l'application linéaire L ? Peut on calculer exactement $\|L\|$?

Exercice 2 Soit X un espace topologique, Y un espace topologique séparé et $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues.

On considère $A = \{x \in X, f(x) = g(x)\}$.

1. On veut montrer que A est un fermé. Pour cela, soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers une limite l , montrer que $f(l) = g(l)$ puis conclure.
2. Montrer que si f et g coïncident sur un ensemble Z dense de X , alors f et g coïncident sur X .

Exercice 3 $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. On rappelle que c'est un espace métrique complet.

1. Rappeler l'énoncé du théorème du point fixe.
2. On considère l'application $\phi : E \rightarrow E$ définie pour tout $f \in E$ par

$$\phi(f)(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(x^2 + t^2) f(t) dt.$$

Montrer que $\|\phi(f) - \phi(g)\| \leq \frac{1}{2} \|f - g\|$.

3. Déduire que l'équation fonctionnelle $\phi(f) = f$ admet une solution unique dans E .

Exercice 4 $\mathbf{l}^\infty$ désigne l'ensemble des suites réelles bornées et $\mathbf{c}_0$ le sous-ensemble des suites réelles convergentes vers 0. On munit $\mathbf{l}^\infty$ de la distance d donnée par $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$.

1. On veut montrer que $\mathbf{c}_0$ est un fermé de $\mathbf{l}^\infty$. Pour cela, nous allons montrer que son complémentaire $\overline{\mathbf{c}_0}$ est un ouvert. Soit donc $z = (z_n)_n \in \overline{\mathbf{c}_0}$.

1a. On suppose que z converge vers une limite $l \neq 0$ et on suppose $l > 0$. Si $x \in \mathbf{c}_0$ est quelconque, en considérant la limite de la suite $(u_n)_n = (z_n - x_n)_n$, déduire (en fonction de l) un minorant strictement positif de $d(x, z)$ et ceci pour tout $x \in \mathbf{c}_0$. Trouver alors un réel strictement positif R tel que la boule $B(z, R)$ soit contenue dans $\overline{\mathbf{c}_0}$.

1b. On suppose que la suite z est divergente. On suppose, par exemple, qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $z_n \geq \varepsilon$ pour une infinité d'indices n . Proposer, ici aussi, un réel strictement positif R tel que la boule $B(z, R)$ soit contenue dans $\overline{\mathbf{c}_0}$.

2. On désigne par $\mathbf{V}$ le sous espaces des suites nulles à partir d'un certain rang.

Montrer, en utilisant la première question, que $\mathbf{V}$ n'est pas dense dans $\mathbf{l}^\infty$.

$\mathbf{V}$ est il fermé dans $\mathbf{c}_0$?

Corrigé

Ex1. 1. N est une norme (facile à montrer).

2a. $L(g) = [\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$.

2b. $|L(f)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} (1+x^2)f(x)dx| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} N(f)dx \leq \pi N(f)$.

2c. On remarque que L est linéaire et l'inégalité précédente prouve que L est continue.

On peut calculer $\|L\|$ car, dans la question 2a, on a trouvé $L(g) = \pi$ et g fait partie de la boule unité car $N(g) = 1$. Le majorant π est donc atteint sur la boule unité, on a donc $\|L\| = \pi$.

Ex2. 1. Soit $(x_n)_n$ une suite dans A convergente vers l , montrons que $l \in A$. Les applications f et g étant continues, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $f(l)$ et la suite $(g(x_n))_n$ tend vers $g(l)$. Les suites étant les mêmes et l'espace Y étant séparé, elles ont la même limite. Ainsi, $f(l) = g(l)$ et $l \in A$.

2. Si f et g coïncident sur Z tel que $\bar{Z} = X$, alors on a $Z \subset A$. Comme $Z \subset \bar{A} = A$ et $\bar{Z} = X$, on a $A = X$. f et g coïncident donc partout sur X .

Ex3. 1. Rappel de l'énoncé du théorème du point fixe, voir cours.

2.

$$\|\phi(f) - \phi(g)\| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(x^2 + t^2)(f(t) - g(t))dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt \leq \frac{1}{2} \|f - g\|.$$

3. Par application du théorème du point fixe, ϕ admet un unique point fixe dans l'espace métrique complet E .

Ex4. 1. Pour montrer que c_0 est fermé, nous allons montrer que son complémentaire $\bar{c}_0$ est ouvert. Soit $z = (z_n)_n \in \bar{c}_0$ et on suppose, dans un premier temps, que z est convergente vers une limite $l > 0$. Dans ce cas, la suite $(z_n - x_n)_n$ tend vers l quel que soit la suite $x = (x_n)_n \in c_0$. On en déduit

$$d(x, z) = \sup |z_n - x_n| \geq l.$$

En effet, si on avait $d(x, z) < l$, la suite z ne peut converger vers l . Ainsi, $d(x, z) \geq l$ ceci $\forall x \in c_0$ et donc $B(z, l) \subset \bar{c}_0$. $\bar{c}_0$ est donc bien un ouvert dans ce cas.

Maintenant, si z n'est pas convergente, on suppose, par exemple, qu'il existe $\varepsilon > 0$, et une infinité d'indices n tels que $z_n \geq \varepsilon$. On a alors

$$d(x, z) = \sup_n |z_n - x_n| \geq \varepsilon, \forall x \in c_0.$$

Sinon, si $d(x, z) < \varepsilon$, comme x_n tend vers 0, les z_n seront $< \varepsilon$ à partir d'un certain rang, ce qui n'est pas. On peut donc affirmer dans ce cas que $B(z, \varepsilon) \subset \bar{c}_0$ et $\bar{c}_0$ est donc aussi ouvert dans ce cas.

2. V n'est pas dense dans l^∞ car on a

$$V \subset c_0 \subset l^\infty$$

$$\bar{V} \subset \bar{c}_0 = c_0$$

c_0 étant strictement inclus dans l^∞ , V n'est donc pas dense dans l^∞ .

V n'est pas fermé dans c_0 , car on peut construire une suite dans V qui converge dans c_0 mais pas dans V , par exemple, la suite $(x^p)_p$, définie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ par $x^p = (x_n^p)_{n \geq 1}$, elle-même définie par $x_n^p = 1/n$ si $n \leq p$ et $x_n^p = 0$ si $n > p$, est dans V . Elle converge vers la suite $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n, \dots$ dans c_0 mais cette limite n'est pas dans V .