Exercice 1.

1. Rappeler la définition d'une topologie sur un ensemble X .
2. Rappeler la définition d'un ouvert dans un espace métrique (E, d) .

Exercice 2. (K, d) désigne un espace métrique **compact** et $f : K \rightarrow K$ une application vérifiant $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, $\forall x, y \in K$, $x \neq y$.

1. Montrer que f est continue et qu'elle admet au plus un point fixe.
2. On veut montrer qu'il existe un élément $a \in K$ tel que $d(a, f(a)) \leq d(x, f(x))$ quel que soit $x \in K$.
- 2a. On considère l'application ψ définie pour tout $x \in K$ par $\psi(x) = d(x, f(x))$. Montrer que $\forall x_0, x_1 \in K$, on a $|\psi(x_0) - \psi(x_1)| \leq d(x_0, x_1) + d(f(x_0), f(x_1))$.
- 2b. Prouver que l'application ψ est continue et conclure.
3. Montrer que a vérifie $a = f(a)$. (On peut raisonner par l'absurde et obtenir une contradiction).

Exercice 3. $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des applications définies, continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. On définit sur E les deux normes

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|, \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

On considère le sous ensemble $A \subset E$ défini par $A = \{f \in E; f(x) > 0, \forall x \in [0, 1]\}$.

1. On veut montrer que A est un ouvert pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
 - 1a. Soit $f_0 \in A$, montrer que le réel $\alpha = \inf_{x \in [0, 1]} f_0(x)$ est **strictement** positif.
 - 1b. Soit $L = B_\infty(f_0, \alpha/2)$ la boule, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, centrée en f_0 et de rayon $\alpha/2$. Montrer que si $g \in L$ alors $g(x) \geq \alpha/2, \forall x \in [0, 1]$ puis conclure.
2. On veut montrer que A n'est pas un ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$. Soit $f_0 \in A$, on va montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la boule $B_1(f_0, 1/n)$ (pour la norme $\|\cdot\|_1$) contient un élément φ qui n'appartient pas à A .
 - 2a. On pose $\gamma = \sup_{x \in [0, 1]} f_0(x)$ qu'on suppose supérieur à 1 ($\gamma > 1$, pour simplifier) et on définit la fonction φ par

$$\varphi(x) = f_0\left(\frac{1}{\gamma n}\right) \cdot \gamma n \cdot x, \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{\gamma n}\right], \text{ (elle est linéaire sur cet intervalle, de la forme "ax")}$$

$$\varphi(x) = f_0(x), \text{ si } x \in \left]\frac{1}{\gamma n}, 1\right].$$

Montrer qu'on a $|f_0(x) - \varphi(x)| \leq \gamma$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{\gamma n}\right]$ et qu'on a aussi

$$\int_0^1 |f_0(t) - \varphi(t)| dt = \int_0^{\frac{1}{\gamma n}} |f_0(t) - \varphi(t)| dt + \int_{\frac{1}{\gamma n}}^1 |f_0(t) - \varphi(t)| dt \leq \frac{1}{n}.$$

- 2b. Justifier que φ est élément de E mais n'est pas élément de A puis conclure.
3. D'après ce qui précède, on peut déduire qu'une seule des affirmations suivantes est vraie, laquelle? Justifier.
 - (I) La topologie associée la norme $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que celle associée à la norme $\|\cdot\|_1$.
 - (II) La topologie associée la norme $\|\cdot\|_\infty$ est moins fine que celle associée à la norme $\|\cdot\|_1$.
 - (III) La topologie associée la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas plus fine que celle associée à la norme $\|\cdot\|_1$.
 - (IV) La topologie associée la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas plus fine que celle associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Corrigé. Exercice 2.

1. f est continue car lipschitzienne.

2a. On applique deux fois l'inégalité triangulaire.

2b. f étant continue, il est facile de montrer la continuité de ψ en utilisant la question précédente.

D'autre part, ψ étant continue définie sur un compact et l'image d'un compact étant compact, il existe $a \in K$ tel que $\inf_{x \in K} \psi(x) = \psi(a) = d(a, f(a))$.

a vérifie donc $d(a, f(a)) \leq d(x, f(x)), \forall x \in K$.

3. On a forcément $a = f(a)$ car sinon $d(a, f(a)) \neq 0$ et on aurait $d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a))$. Le minimum de ψ ne serait pas atteint en a .

Exercice 3.

1a. $f([0, 1])$ est un compact donc la borne inférieure est atteinte en un certain x_0 . Il existe donc $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = \inf_{x \in [0, 1]} f(x)$. On a aussi $f(x_0) > 0$.

1b. Si $g \in L$, on a $d_\infty(f, g) < \alpha/2$. Cela implique

$$-\alpha/2 < f(x) - g(x) < \alpha/2$$

on déduit alors $g(x) > f(x) - \alpha/2 \geq \alpha/2 > 0$, ainsi $g \in A$ et par suite A est un ouvert.

2a. Puisque f et φ sont deux fonctions positives, comprises entre 0 et γ , on a donc $|f(x) - \varphi(x)| \leq \gamma$.

Cette question ne pose aucun problème si on remarque que f et φ sont égales sur l'intervalle $[\frac{1}{\gamma^n}, 1]$.

2b. φ est continue sur $[0, 1]$ (vérifier la continuité au point $\frac{1}{\gamma^n}$). De plus, φ n'est pas élément de A car φ s'annule en 0. A n'est donc pas un ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$.

3. Seule la proposition IV est vraie.