Exercice 1.

$\mathbf{R}^n$ est muni de la distance euclidienne. On considère une partie non vide $A \subset \mathbf{R}^n$. On note pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.

Soit $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ l'application définie par $f(x) = d(x, A)$.

1. Soit $x \in \bar{A}$, montrer que $d(x, A) = 0$. Inversement, montrer que si $d(x, A) = 0$ alors $x \in \bar{A}$.

2. Montrer que si x et y sont deux éléments de $\mathbf{R}^n$, alors

$-d(x, y) \leq d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$, puis déduire que f est lipschitzienne.

3. On suppose dans ce qui suit que A est fermée et soit B une partie fermée non vide vérifiant $A \cap B = \emptyset$. On définit $d(B, A) = \inf_{b \in B} d(b, A)$. On admet que $d(B, A) = \alpha > 0$.

En considérant l'application f et les intervalles $] -\alpha/2, \alpha/2[$ et $] \alpha/2, +\infty[$, montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que $A \subset U_1$ et $B \subset U_2$.

Exercice 2. Les trois questions qui suivent sont indépendantes.

1. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application donnée. On dit que f est ouverte (fermée) si pour tout ouvert O de X (tout fermé F de X), $f(O)$ est un ouvert de Y ($f(F)$ est un fermé de Y).

Montrer que si f est bijective, alors f est ouverte si et seulement si f est fermée.

2. Soit $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\varphi(x) = x^2$.

2a. On veut montrer que φ est fermée. Pour cela, on se donne un fermé $F \subset \mathbf{R}$, une suite $(y_n)_n = (\varphi(x_n))_n$ dans $\varphi(F)$ convergente vers une limite l et on veut montrer que $l \in \varphi(F)$.

Montrer que la suite $(x_n)_n$ est bornée et justifier qu'une valeur d'adhérence λ de $(x_n)_n$ vérifie $\varphi(\lambda) = l$.

2b. Déterminer $\varphi(\mathbf{R})$ puis décider si l'affirmation suivante est exacte: "Si une application est fermée alors elle est ouverte".

3. Soit $\pi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la projection sur le premier facteur définie par $\pi(x, y) = x$. On munit $\mathbf{R}^2$ de la distance du sup c'est à dire $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$.

3a. Soit $B((x_0, y_0), r)$ la boule de $\mathbf{R}^2$ centrée en (x_0, y_0) et de rayon r . Déterminer $\pi(B((x_0, y_0), r))$ en fonction de x_0 et de r . Peut-on affirmer que π est une application ouverte?

3b. Soit F la partie définie par $F = \{(x, 1/x), x \neq 0\} \subset \mathbf{R}^2$. En considérant l'application f définie par $f(x, y) = xy$ et $f^{-1}(\{1\})$, montrer que F est un fermé.

Déterminer $\pi(F)$. L'application π est-elle fermée?

Exercice 3.

Soit $C = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue}\}$. On définit sur C les deux distances $d_1(f, g) = \int_0^1 |(f - g)(x)| dx$ et $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$.

1. Montrer que si a et b sont deux réels, on a $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
2. Montrer que l'application $f \mapsto \int_0^1 |f(x)| dx$ est lipschitzienne dans les deux cas (lorsqu'on munit C de d_1 et lorsqu'on munit C de d_∞).
3. Soit S l'espace des suites réelles convergentes muni de la métrique $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$ où $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$. On définit $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}$ par $\psi(x) = l_x$ où l_x est la limite de la suite x .

Montrer que ψ est continue. (On peut montrer que $|l_x - l_y| \leq |l_x - x_n| + d(x, y) + |y_n - l_y|$ pour tout n puis choisir n assez grand et x assez proche de y pour garantir $|l_x - l_y| < \varepsilon$.)

Déduire que S_0 , l'ensemble des suites convergentes vers 0, est un fermé de S .

Corrigé

Exercice 1.

Pour les questions 1 et 2, voir TD ou fichier du livre.

3. Si on admet que $d(B, A) = \alpha > 0$, alors $\forall x \in B$, on a $d(A, x) \geq \alpha$. D'autre part, on a $\forall x \in A$, $d(A, x) = 0$. Par suite, on déduit les inclusions suivantes

$$A \subset U_1 = f^{-1}(] - \alpha/2, \alpha/2[), B \subset U_2 = f^{-1}(] \alpha/2, +\infty[)$$

f étant continue, U_1 et U_2 sont deux ouverts. Ils sont bien entendu disjoints.

Exercice 2.

1. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application bijective. Si f est ouverte et si $F \subset X$ est un fermé, puisque $O = F^c$ est un ouvert, $f(O)$ est un ouvert. f étant bijective, on a $f(F^c) = (f(F))^c$. Ainsi, $(f(F))^c$ est un ouvert et donc $f(F)$ est un fermé. Ceci montre que f est fermée.

L'implication inverse se démontre de la même manière.

2. On considère $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\varphi(x) = x^2$.

a. Montrons que φ est fermée. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, montrons que $\varphi(F)$ est fermé. Pour cela, on va montrer que si $(y_n)_n$ est une suite de $\varphi(F)$ convergente vers l , alors $l \in \varphi(F)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ tel que $y_n = \varphi(x_n) = x_n^2$. La suite $(x_n^2)_n$ est convergente, elle est donc bornée. Il existe un réel M tel que $|x_n^2| \leq M$ et donc $|x_n| \leq \sqrt{M}$. La suite $(x_n)_n$ est donc bornée, elle admet une valeur d'adhérence λ . Il y a une sous-suite $(x_{\psi(n)})_n$ qui converge vers λ . La suite $(\varphi(x_{\psi(n)}))_n$ converge aussi vers l et puisque φ est continue en λ , nécessairement on a $\varphi(\lambda) = l$. Ainsi, $\varphi(F)$ est fermé.

b. $\varphi(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ est un fermé et $\mathbb{R}$ est un ouvert, on ne peut donc affirmer que si une application est fermée alors elle est ouverte, φ est un contre exemple.

3a. On a $\pi(B((x_0, y_0), r)) =]x_0 - r, x_0 + r[$. (Si la boule est ouverte l'intervalle est ouvert, si la boule est fermée, l'intervalle est fermé.) π est ouverte car tout ouvert est réunion de boules et donc puisque l'image de chaque boule ouverte est une boule ouverte (qui est un intervalle dans ce cas), l'image de l'ouvert sera une réunion de boules. (Réunion d'intervalles ouverts dans ce cas.)

3b. $F = \{(x, 1/x), x \neq 0\} \subset \mathbf{R}^2$ et f l'application définie par $f(x, y) = xy$. f étant continue et $\{1\}$ étant un fermé de $\mathbf{R}$, $f^{-1}(\{1\})$ est un fermé. Or, $F = f^{-1}(\{1\})$, et donc F est un fermé.

$\pi(\mathbf{R}^2) =]0, +\infty[$ est un ouvert. $\mathbf{R}^2$ étant fermé et son image étant ouverte non fermée, l'application π n'est pas fermée.

Exercice 3.

Soit $C = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \text{ continue}\}$. On définit sur C les deux distances $d_1(f, g) = \int_0^1 |(f - g)(x)| dx$ et $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$.

1. On écrit $a = a - b + b$, ce qui donne $|a| - |b| \leq |a - b|$. En permutant les rôles de a et de b , on obtient $|b| - |a| \leq |a - b|$ c'est à dire $-|a - b| \leq |a| - |b|$. On déduit alors $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

2. Vérifions que l'application $f \mapsto \int_0^1 |f(x)| dx$ est lipschitzienne lorsque C est muni de la distance d_1 .

$$|\int_0^1 |f(x)| dx - \int_0^1 |g(x)| dx| \leq \int_0^1 ||f(x)| - |g(x)|| dx \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = d_1(f, g).$$

Lorsque C est muni de la distance d_∞ , la démonstration ne pose pas de problème.

3. $\psi(x) = l_x$ si l_x est la limite de la suite $x = (x_n)_n$. On a

$$|l_x - l_y| \leq |l_x - x_n| + |x_n - y_n| + |y_n - l_y|, \forall n$$

$$|l_x - l_y| \leq |l_x - x_n| + d(x, y) + |y_n - l_y|, \forall n$$

$$|l_x - l_y| \leq \varepsilon/3 + |x_n - y_n| + \varepsilon/3, \text{ si } n \text{ est choisi assez grand, d'où.}$$

$$|l_x - l_y| \leq \varepsilon, \text{ si } d(x, y) < \varepsilon/3. \text{ Ce qui montre que l'application } \psi \text{ est continue.}$$

Pour montrer que l'ensemble S_0 est fermé, il suffit de remarquer que S_0 est l'image réciproque d'un fermé par une application continue. En effet, on a $S_0 = \psi^{-1}(\{0\})$.