Série 3

Exercice 1.

Soit $C(\Delta)$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle fermé et borné $\Delta = [a, b]$. On considère les trois distances d , d_1 et d_2 définies par

$$d(x, y) = \max_{t \in \Delta} |x(t) - y(t)|, \quad d_1(x, y) = \int_{\Delta} |x(t) - y(t)| dt, \quad d_2(x, y) = \sqrt{\int_{\Delta} (x(t) - y(t))^2 dt}.$$

1. Montrer que $(C(\Delta), d)$ est complet.
2. Montrer que $(C(\Delta), d_1)$ et $(C(\Delta), d_2)$ ne sont pas complets. On pourra considérer la suite de fonctions (u_n) , où n est un entier positif non nul, définies sur $\Delta = [0, 2]$, par

$$u_n(x) = 0 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 - 1/n, \quad u_n(x) = 1 + n(x - 1) \text{ si } 1 - 1/n \leq x \leq 1 \text{ et } u_n(x) = 1 \text{ si } 1 \leq x \leq 2.$$

Exercice 2.

Soit l^1 l'ensemble des suites $u = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs complexes telles que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| < +\infty$. On pose pour u et $v \in l^1$, $d(u, v) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n - v_n|$.

1. Vérifier que d est une distance sur l^1 et que (l^1, d) est complet.
2. Soit C_0 l'espace des suites à valeurs complexes dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini. Vérifier que $C_0 \subset l^1$, muni de la distance d , n'est pas complet.

Exercice 3.

Soit a un nombre réel positif. Dans quelle partie de $\mathbb{R}$ peut-on affirmer que l'application

$$x \mapsto f(x) = (x + a/x)/2$$

est contractante? Quels sont ses points fixes?

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y.$$

Le but de cet exercice est de montrer que f admet un point fixe unique $p \in X$.

1. Montrer que les ensembles $X_n = f^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n \geq 0} X_n$ n'est pas vide.
2. Montrer que Y est un ensemble invariant, i.e. $f(Y) = Y$, et en déduire que le diamètre de cet ensemble est 0.
3. Conclure que f a un unique point fixe $p \in X$ et que $\forall x_0 \in X$, la suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = f^n(x_0)$ converge vers p lorsque n tend vers ∞ .

Exercice 5. Application du théorème du point fixe.

Soit $C(\Delta)$ l'espace des fonctions réelles continues sur un intervalle fermé borné $\Delta = [a, b]$, muni de la distance d de la convergence uniforme. Soit $K : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Soit $\varphi \in C(\Delta)$, et λ une constante réelle.

1. On considère l'équation fonctionnelle, d'inconnue $f \in C(\Delta)$,

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \varphi(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Montrer que si λ est assez petit, cette équation admet une solution unique dans $C(\Delta)$.

2. On considère l'équation fonctionnelle d'inconnue $f \in C(\Delta)$,

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) f(t) dt + \varphi(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Montrer que pour toute valeur de λ , cette équation admet une solution unique dans $C(\Delta)$.

Exercice 6.

Soit (E, d) un espace métrique, A et B deux parties non vides de E . Pour tout point $x \in E$, on pose

$$d(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y), \quad \text{et} \quad d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B).$$

1. Montrer que $d(A, B) = \inf_{(x, y) \in A \times B} d(x, y)$. En déduire que $d(A, B) = d(B, A)$.

2. Montrer que si A est compacte, il existe $a \in A$ tel que $d(a, B) = d(A, B)$.

3. Montrer que si A est compacte et B fermée, $d(A, B) = 0$ si et seulement si $A \cap B \neq \emptyset$.

Construire un exemple dans lequel A et B sont fermés et disjoints, mais non compacts, et tels que $d(A, B) = 0$.

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique, K un compact non vide de X et U un ouvert de X contenant K .

Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que si $x \in X$ vérifie $d(x, K) < r$ alors $x \in U$. (On peut raisonner par l'absurde et construire une suite qui convergerait vers deux limites distinctes.)