Série # 4

Exercice 1.

Soit E un espace topologique séparé et A, B deux parties compactes non vides et disjointes. Montrer qu'il existe un voisinage U de A et un voisinage V de B disjoints. On commencera par traiter les cas où B est réduit à un point.

Exercice 2.

Soit A une partie compacte et B une partie fermée de $\mathbf{R}$. On pose $C = A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que C est un fermé.
2. Montrer que si B est compact alors C est compact.

Exercice 3.

Soit E un espace topologique et F un espace topologique séparé. Soit $p_E : E \times F \rightarrow E$, la projection sur le facteur E .

1a. On rappelle que $E \times F$ est muni de la topologie produit, pour laquelle les ouverts sont les réunions de pavés ouverts, c'est à dire réunions des parties de la forme $U_i \times V_i$, où U_i est un ouvert de E et V_i est un ouvert de F . Montrer que la projection p_E est ouverte.

1b. Donner un exemple montrant qu'en général, p_E n'est pas fermée.

1c. Montrer que si F est compact, l'application p_E est fermée.

2a. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On sait que si f est continue, son graphe G est fermé dans $E \times F$. Montrer que si F est compact et si le graphe G est fermé dans $E \times F$, alors f est continue.

Exercice 4.

Montrer que $\mathcal{Q}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}$ n'est pas localement compact.

Exercice 5.

Montrer qu'un ouvert non vide connexe de $\mathbf{R}^2$ est connexe par arcs. (Le résultat reste vrai pour un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$ et pour un espace vectoriel normé.)

Exercice 6.

Soient A et B deux parties connexes non vides d'un espace topologique E telles que $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe. On peut raisonner par l'absurde.

Exercice 7.

Soit (E, d) un espace métrique compact dans lequel l'adhérence de toute boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon. Le but de cet exercice est de démontrer que toute boule ouverte est connexe.

1. On suppose qu'une boule ouverte $B(a, r)$ est réunion de deux ouverts non vides disjoints U et V . Si $a \in U$, montrer qu'il existe $b \in V$ tel que $d(a, b) = d(a, V)$ avec $0 < d(a, b) < r$.

2. En déduire que toute boule ouverte est connexe.

Exercice 8.

On rappelle que $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ est muni de la topologie engendrée par les ouverts de $\mathbf{R}$ ainsi que les intervalles de la forme $]a, +\infty]$ avec $a \in \mathbf{R}$ ou de la forme $[-\infty, b[$, $b \in \mathbf{R}$. On voudrait montrer que $\overline{\mathbf{R}}$ est compact.

Pour cela, on se donne un recouvrement de $\overline{\mathbf{R}}$ par des ouverts $(O_i)_{i \in I}$. On sait qu'il existe i_0 et $i_1 \in I$ tel que O_{i_0} contienne un intervalle de la forme $[-\infty, b[$ et O_{i_1} contienne un intervalle de la forme $]a, +\infty]$. On pose

$$\alpha_0 = \sup\{b \in \mathbf{R}, [-\infty, b[\subset O_{i_0}\} \text{ et } \alpha_1 = \inf\{a \in \mathbf{R},]a, +\infty] \subset O_{i_1}\}.$$

On suppose que α_0 et α_1 sont finis sinon l'exercice devient trivial.

1. Montrer que si $\alpha_0 \geq \alpha_1$, il est aisé d'extraire un sous recouvrement fini.

2. On suppose $\alpha_0 < \alpha_1$. En considérant le fermé $[\alpha_0, \alpha_1]$ dans $\mathbf{R}$, justifier que, dans ce cas aussi, on peut extraire un sous recouvrement fini de $\overline{\mathbf{R}}$.

Exercice 9. Exemple de topologie non métrisable.

On considère le produit infini non dénombrable $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ qui est l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ muni de la topologie produit. On rappelle que les ouverts sont les réunions de pavés ouverts c.a.d. réunions de parties de la forme

$$\mathcal{O} = \pi_{x \in \mathbf{R}} O_x$$

où les O_x sont tous égaux à $\mathbf{R}$ sauf pour un nombre fini $x_1, \dots, x_n$ pour lesquels $O_{x_1}, \dots, O_{x_n}$ sont des ouverts de $\mathbf{R}$ et qu'une application f appartient à ce pavé si et seulement si $f(x_1) \in O_{x_1}, \dots, f(x_n) \in O_{x_n}$.

1. Montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers f au sens de la topologie produit si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. (La suite $(f_n)_n$ converge vers f si pour tout pavé ouvert $\mathcal{O}$ contenant f , il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, $f_n \in \mathcal{O}$.) La topologie produit et celle de la convergence simple coïncident.

2. Soit H la partie de E formée par les fonctions $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ nulles sauf en un nombre fini de points et soit g la fonction constante égale à 1.

Justifier que g appartient à $\overline{H}$. Pour cela, on montrera que tout pavé ouvert contenant g intersecte H .

3. Montrer qu'il n'est pas possible de trouver une suite de fonctions $(\varphi_n)_n$ dans H qui converge vers g . Pour cela, on utilisera la première question et on remarquera que l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}, \varphi_n(x) = 0, \forall n\}$ est non vide.

4. Conclure.