Chapitre 2: Espaces métriques.

I. Définition et exemples d'espaces métriques.

Définition. Un espace métrique est un ensemble E sur lequel on a défini une **distance**, c'est à dire une application $d : E\text{x}E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie, pour tous x, y et $z \in E$

$d(x, y) = d(y, x)$ symétrie

d(x,y)$\leq d(x, z) + d(z, y)$ inégalité triangulaire

$d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

L'espace métrique constitué par l'ensemble E muni de la distance d est noté (E, d)

Conséquence utile. $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$.

Exemples.

a. La droite réelle $\mathbb{R}$ avec $d(x, y) = |x - y|$.

b. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes avec $d(z, z') = |z - z'|$.

c. **Distances associées bornées.** Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout x, $y \in E$, on définit

$$d'(x, y) = Arctan(d(x, y)),\ d"(x, y) = inf(d(x, y), 1)$$

$$\text{et}\ \ d'''(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Ces formules définissent trois distances bornées. d' est à valeurs dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ tandis que $d"$ et d''' sont à valeurs dans $[0, 1]$.

d. L'espace $\mathbb{R}^n$ peut être muni de la distance d_1 avec $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, de la distance d_2 avec $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ (distance euclidienne) ou de la distance d_∞ avec $d_\infty(x, y) = max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i|$, où on a noté $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$.

e. **Espace métrique produit.** Soit (E_i, d_i), $1 \leq i \leq n$ une famille finie d'espaces métriques. Si $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ sont deux éléments du produit $E_1\text{x}...\text{x}E_n$, la formule

$$d(x, y) = max_{1\leq i\leq n}d_i(x_i, y_i)$$

définit une distance sur le produit.

Si on a un produit dénombrable d'espaces métriques ($i \in \mathbb{N}$), la formule annoncée dans le cas d'un produit fini peut donner une valeur infinie. On propose alors

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} Arctan(d_i(x_i, y_i))$$

qui est bien une distance.

f. **Distance sur un espace de fonctions.** Soit $C(I)$ l'ensemble des fonctions continues, définies sur un intervalle fermé et borné I, à valeurs réelles. Pour $x, y \in C(I)$, on pose

$$d(x,y) = max_{t \in I} |x(t) - y(t)|.$$

On l'appelle distance de la convergence uniforme sur I. On peut bien entendu définir d'autres distances sur $C(I)$.

Boules, parties bornées, parties ouvertes, parties fermées, voisinages.

Définitions. L'ensemble $B(a,r) = \{x \in E;\ d(a,x) < r\}$ est appelé **boule ouverte** de centre a et de rayon r.
L'ensemble $B_F(a,r) = \{x \in E;\ d(a,x) \leq r\}$ est appelé **boule fermée** de centre a et de rayon r.
Une partie F de l'espace métrique (E,d) est dite **bornée** si elle est contenue dans une boule.

Conséquence. On établit que si $F \subset E$ est une partie bornée, alors pour tout point $a \in E$, il existe une boule de centre a qui contient F.

En effet, si F est bornée, alors F est contenue dans une boule convenable $B(x_0, r_0)$. Si $a \in F$, la boule $B(a, d(a, x_0) + r_0)$ contient F.

Définition. Le **diamètre** d'une partie F de E est donné par la formule

$$\delta(F) = sup_{x,y \in F} d(x,y).$$

Proposition. Une partie F est bornée si et seulement si son diamètre est fini.

Démonstration. Si $\delta(F)$ désigne le diamètre de F alors pour $a \in F$ quelconque, la boule $B(a, \delta(F) + 1)$ contient F. Inversement, Si F est bornée, alors F est contenu dans une certaine boule $B(a,r)$ et on vérifie qu'on a $\delta(F) \leq 2r$.

Définitions. Une partie O de (E,d) est dite **ouverte** si elle est réunion d'une famille de boules ouvertes. Dans ce cas, O est appelé **ouvert** de E.

Exemples. Une boule ouverte est un ouvert, la partie vide est un ouvert et enfin l'ensemble E est aussi un ouvert.

Proposition. Une partie O est un ouvert si et seulement si tout point de O est le centre d'une boule contenue dans O.

Démonstration. Si $x \in O$ alors x appartient à une certaine boule $B(x_0, r_0)$, et on vérifie alors que la boule $B(x, r_0 - d(x_0, x))$ est contenue dans la boule $B(x_0, r_0)$ et par conséquent contenue dans O. Inversement, On a

$$O = \cup_{x \in O} B(x, r_x),$$

où r_x est un réel convenable dépendant de x.

Définition. Une partie F est dite **fermée** si son complémentaire est un ouvert. Dans ce cas, on dit que F est un **fermé** de (E, d).

Exemple. La boule fermée $B_F(a, r)$ est un fermé. Pour montrer cela, il suffit de vérifier que le complémentaire est un ouvert.(Exercice)

Définition. Une partie V de E est un **voisinage** d'un point $a \in E$ si V contient un ouvert qui contient a.

Intérieur. Adhérence.

Soit A une partie de E, on a les définitions suivantes:

Définition. Un point $a \in E$ est **intérieur** à A si A est un voisinage de a. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et est noté $\mathring{A}$.
On a la proposition suivante:

Proposition. L'intérieur de A est un ouvert contenu dans A. De plus, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Démonstration. Soit x_0 un point intérieur à A, il existe alors une boule centrée en x_0 et de rayon r_0 convenable contenue dans A. Tout élément α de cette boule est aussi un point intérieur car la boule de centre α et de rayon $r_0 - d(x_0, \alpha)$ est aussi contenue dans A. L'intérieur de A est donc bien un ouvert.
Montrons que tout autre ouvert $\mathcal{O}$ contenu dans A est aussi contenu dans l'intérieur de A. Si $x \in \mathcal{O}$, alors il existe une boule ouverte convenable centrée en x et contenue dans $\mathcal{O}$ car ce dernier est un ouvert. Cette boule est aussi contenue dans A. x est donc un point intérieur.

Définitions. Un point $a \in E$ est dit **adhérent** à A si tout voisinage de a

rencontre A. L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'adhérence de A et est noté $\bar{A}$.

On a la proposition suivante dont la démonstration est laissée en exercice.

Proposition. $\bar{A}$ est un fermé contenant A. De plus, c'est le plus petit fermé contenant A.

Applications continues.

Définitions. Une application f d'un espace métrique (E, d) vers un espace métrique (F, δ) est **continue** en $a \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in E$ vérifiant $d(x, a) \leq \eta$ on ait $\delta(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$.

Si f est continue en tout point de E, on dit que f est continue sur E.

Un **homéomorphisme** est une application entre deux espaces métriques qui est continue, bijective et dont l'inverse est continue.

Une **isométrie** entre deux espaces métriques est une application qui conserve les distances, c'est à dire qui vérifie $\delta(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Proposition. Une isométrie est toujours injective et continue. Si de plus elle est surjective alors son inverse est aussi une isométrie.

Exemple. Distance d'un point à une partie non vide.

Soit $A \subset E$ une partie non vide. On définit

$$d(x, A) = inf_{y \in A} d(x, y).$$

On peut établir l'inégalité

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Ceci montre que l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = d(x, A)$$

est lipschitzienne donc continue.

On a les propriétés caractéristiques suivantes:

Propriété 1. Une application $f : E \to F$ est continue en $a \in E$, si et seulement si pour tout voisinage V de $f(a)$ dans F, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a dans E.

Propriété 2. Une application $f : E \to F$ est continue, si et seulement si pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.

Certaines distances pouvant être plus pratiques que d'autres, on aimerait pouvoir en changer sans altérer la continuité des applications et donc en conservant les mêmes ouverts. On parle alors de distances topologiquement équivalentes:

Définition. Deux distances sont **topologiquement équivalentes** si tout ouvert pour l'une est aussi ouvert pour l'autre.

Proposition. Deux distances d_1 et d_2 définies sur E sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application $Id : (E, d_1) \to (E, d_2)$ est un homéomorphisme.

Remarque. Lorsque deux distances sont topologiquement équivalentes, on dit que les topologies, au sens voisinage approchant un point, sont les mêmes.

Distances comparables.

Définition. Deux distances d_1 et d_2 sont **comparables** s'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ vérifiant

$$\alpha\, d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta\, d_1(x, y).$$

Proposition. Deux distances comparables sur un ensemble sont topologiquement équivalentes.

Exemples. Sur $\mathbb{R}$, les deux distances $d(x, y) = |x-y|$ et $d'(x, y) = |x^3-y^3|$ sont topologiquement équivalentes mais ne sont pas comparables. Plus généralement, on a le résultat suivant dont la démonstration est laissée en exercice (voir T.D.):

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homéomorphisme, d_1 une distance quelconque sur $\mathbb{R}$ et d_2 la distance définie sur $\mathbb{R}$ par

$$d_2(x, y) = d_1(f(x), f(y)).$$

Montrer que les distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes.

On peut aussi montrer que les trois distances bornées d', d'' et d''' définies précédemment à partir d'une distance d sont topologiquement équivalentes à d mais ne lui sont pas forcément comparables.

Sur $\mathbb{R}^n$, les trois distances d_1, d_2 et d_∞ sont comparables et donc topologiquement équivalentes.

II. Topologie des espaces métriques.

Nous allons, dans ce paragraphe, étudier l'utilisation des suites pour caractériser en particulier les applications continues, les points adhérents et les parties fermées, puis nous introduirons la notion d'espaces métriques compacts ainsi que leur caractérisation grâce au théorème de Bolzano Weierstrass.

Dans le paragraphe précédent, nous avons donné la définition d'une application continue f entre deux espaces métriques (E, d) et (F, δ). Nous allons préciser cette définition dans le cas où $E = E_1 \mathrm{x} E_2$ est un produit d'espaces métriques (E_1, d_1) et (E_2, d_2) muni de la distance $\hat{d}$ définie par

$$\hat{d}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

Soit donc $f : E = E_1 \mathrm{x} E_2 \to F$ et $(x_1, x_2) \in E$, f est continue en $(x_{,1}, x_2)$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ d_1(x_1, y_1) < \eta, \text{ et } d_2(x_2, y_2) < \eta, \text{ on a } \delta(f(x_1, x_2), f(y_1, y_2)) < \varepsilon.$$

Cette définition s'étend au cas d'un produit fini d'espaces métriques.

Exemples. Soit (E, d) un espace métrique alors la distance $\hat{d} : E \mathrm{x} E \to I\!R_+$ est une application continue. En effet, cela résulte de l'inégalité

$$|d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| \leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) \leq 2\hat{d}((x_1, x_2), (y_1, y_2)).$$

Utilisation des suites.

On dit qu'une suite de points (x_n) de E **tend vers** le point $a \in E$ si $d(x_n, a)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Proposition: Caractérisation des points adhérents. $a \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite (x_n) de points de A qui tend vers a.

Proposition: Caractérisation des parties fermées. Une partie A de E est fermée si et seulement si toute suite de points de A convergente (dans E) est convergente dans A. (La limite appartient à A.)

Suites et limites d'applications.

Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces métriques, f admet la limite l en $a \in E$ si pour toute suite (x_n) qui tend vers a, la suite $(f(x_n))$ tend vers l.

Valeur d'adhérence et suite extraite.

Définitions.
1. $\lambda \in E$ est dite **valeur d'adhérence** d'une suite (x_n) d'éléments de E si $\forall \varepsilon > 0,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \geq m,\ |x_n - \lambda| < \varepsilon$.
2. On appelle **suite extraite ou sous-suite** d'une suite $(x_n)_n$ toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_n$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une injection croissante.

Remarque. Une suite peut admettre plusieurs valeurs d'adhérence comme elle peut n'en admettre aucune. (Considérer, par exemple, les suites $((-1)^n)_n$ et $(n)_n$).

Proposition. $(x_n)_n$ étant une suite donnée, on pose $F_m = \overline{\{x_n,\ n \geq m\}}$. L'ensemble des valeurs d'adérence de la suite $(x_n)_n$ est $\cap_{m=0}^{\infty} F_m$.(Cet ensemble peut être vide)

Démonstration. Si $\alpha \in \cap_{m=0}^{\infty} F_m$, alors $\forall m \geq 0$, on a $\alpha \in F_m$ et par suite, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un élément $x_n \in F_m$, avec $n \geq m$ tel que $|x_n - \alpha| < \varepsilon$. Ceci signifie que α est une valeur d'adhérence. Pour la réciproque, si α est une valeur d'adhérence, alors $\alpha \in F_m$, $\forall m \geq 0$.

On peut établir sans grande difficulté le résultat suivant:

Proposition. $\lambda \in E$ est une valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_n$ si et seulement si il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers λ.

Suites et continuité.

Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces métriques, f est continue en $a \in E$ si pour toute suite (x_n) qui tend vers a, la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$.

III. Compacts et théorème de Bolzano Weierstrass.

Définitions. Soit A une partie de E, un **recouvrement ouvert** de A est la donnée d'une famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E, où I est un ensemble d'indices, telle que

$$A \subset \cup_{i\in I} O_i.$$

Une partie $A \subset E$ est un **compact** si elle possède la propriété suivante dite de **Borel-Lebesgue:** De tout recouvrement ouvert de A, on peut extraire un sous recouvrement fini. Cela signifie qu'il existe une partie finie $J \subset I$ telle que

$$A \subset \cup_{i \in J} O_i.$$

Autres formes équivalentes.

- De toute famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ dont l'intersection ne rencontre pas A, on peut extraire une sous famille finie dont l'intersection ne rencontre pas A.

- Toute famille de parties fermées de E, dont l'intersection de toute sous famille finie rencontre A, est d'intersection qui rencontre A.

On vérifie facilement que $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^n$ en général, n'est pas compact.

Le théorème qui suit caractérise les espaces métriques compacts.

Théorème de Bolzano Weierstrass.

Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si de toute suite de points de E, on peut extraire une sous suite convergente.

Démonstration.

Supposons (E, d) compact, et soit (x_n) une suite dans E. Posons $F_m = \overline{\{x_n,\ n \geq m\}}$. Les parties $\{F_m,\ m \geq 0\}$ sont des fermés non vides dont toute sous-famille finie est d'intersection non vide. E étant compact, d'après une des formes de la propriété de Borel- Lebesgue, la famille (F_n) est elle même d'intersection non vide. Or cette intersection est exactement l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n). Ceci prouve une implication.

Pour l'autre partie de la démonstration, nous allons d'abord établir deux assertions.

Assertion 1. Soit (E, d) un espace métrique telle que toute suite possède une valeur d'adhérence et soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E, alors $\exists$r $>$

0 $\forall x \in E$, la boule $B(x, r)$ est contenue dans l'un des ouverts de la famille $(O_i)_{i \in I}$.

Par l'absurde, supposons le contraire et prenons $r_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, auquel est associé un élément $x_n \in E$ tel que la boule $B(x_n, 2^{-n})$ ne soit contenue dans aucun des O_i. La suite (x_n) admet une valeur d'adhérence λ qui appartient bien entendu à l'un des (O_i) noté O_{i_0}. Ce dernier étant un ouvert, il existe un réel $\mu > 0$ pour lequel $B(\lambda, \mu) \subset O_{i_0}$.

Or, si n est assez grand et convenablement choisi, on a $B(x_n, 2^{-n}) \subset B(\lambda, \mu) \subset O_{i_0}$ ce qui contredit la supposition.

Assertion 2. Soit (E, d) un espace métrique telle que toute suite possède une valeur d'adhérence, alors $\forall r > 0$ l'espace E peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon r.

Par l'absurde, on suppose l'existence d'un $r_0 > 0$ tel que E ne puisse pas être recouvert par un nombre fini de boules. Ainsi, si $x_0 \in E$, la boule $B(x, r_0)$ est strictement incluse dans E, il existe $x_1 \notin B(x_0, r_0)$. De même, la partie $B(x_0, r_0) \cup B(x_1, r_0)$ est strictement incluse dans E. On construit ainsi une suite (x_n) qui doit admettre une valeur d'adhérence . Or tous les termes de la suite se trouvent les uns des autres à une distance supérieure ou égale à r_0, d'où une contradiction.

Supposons donné un recouvrement ouvert $(O_i)_{i \in I}$ de E. D'après l'assertion 1, il existe $r_0 > 0$ tel que $\forall x \in E$, la boule $B(x, r_0)$ est contenu dans l'un de (O_i), et d'après l'assertion 1, pour ce même r_0, E peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon r_0 qu'on note $B(x_1, r_0), B(x_2, r_0), ..., B(x_p, r_0)$. Ces boules sont contenues dans l'union de p ouverts de la famille (O_i). Ces p ouverts recouvrent donc aussi E. Nous avons donc réussi à extraire un sous-recouvrement fini. Ceci achève la démonstration.

IV. Continuité uniforme.

Un intérêt majeur des applications uniformément continues est qu'elles conservent les suites de Cauchy, ce qui est très utile, comme on le verra plus tard, lorsqu'on étudiera les espaces métriques complets.

Définition. Soit (E, d) et (F,δ) deux espaces métriques. Une application $f : E \to F$ est uniformément continue si

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, si $d(x, y) < \eta$, alors $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Exemples. 1. Les application lipschitziennes. On rappelle qu'on a l'existence d'un réel $k > 0$ tel que $\delta(f(x), f(y)) \leq k\ d(x, y)$

2. L'application distance $\hat{d} : E\text{x}E \to I\!R_+$ est uniformément continue puisqu'elle vérifie

$$|d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| \leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) \leq 2\hat{d}((x_1, x_2), (y_1, y_2)).$$

On rappelle qu'on a muni $E\text{x}E$ de la distance $\hat{d}$ donnée par

$$\hat{d}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}.$$

Il est aisé d'établir les deux points suivants:

Propriétés.

1. La composée de deux applications uniformément continues est uniformément continue.
2. Une application uniformément continue est continue.

L'application f définie sur $I\!R$ et à valeurs réelles, donnée par $f(x) = x^3$ prouve qu'une application peut être continue sans être uniformément continue.

Théorème. Soit (E, d) un espace métrique compact et (F, δ) un espace métrique et $f : E \to F$ une application continue, alors f est uniformément continue.

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'existence d'une suite (x_n, y_n) dans $E\text{x}E$ qui vérifie $d(x_n, y_n) < 2^{-n}$ et $\delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. E étant un espace métrique compact, l'espace produit $E\text{x}E$ est compact (on peut extraire de toute suite une sous-suite convergente dans $E\text{x}E$). Cette sous-suite notée $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})_n$ est donc convergente. L'inégalité $d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \leq 2^{-\varphi(n)} \leq 2^{-n}$ prouve que les deux suites $(x_{\varphi(n)})_n$ et $(y_{\varphi(n)})_n$ convergent vers une même limite notée l. Par suite, $\delta(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)}))$ doit tendre vers 0, ce qui contredit l'hypothèse.

Définition. Deux distances d et δ sur un même ensemble E sont dites uniformément équivalentes si l'application identique de $Id : (E, d) \to (E, \delta)$ est uniformément continue et d'inverse uniformément continue.

Deux distances uniformément équivalentes sont topologiquement équivalentes et la réciproque est fausse en général.(Voir travaux dirigés)

Deux distances comparables sont uniformément équivalentes.

V. Suites de Cauchy, espaces complets.

Définition. Critère de Cauchy. Une suite $(x_n)_n$ dans un métrique (E,d) est **de Cauchy** si

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},$ tel que pour tous entiers $m \geq N,$ et $n \geq N,\ d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$

Propriétés.

1. Les suites de Cauchy restent les mêmes lorsqu'on remplace la distance initiale d par une distance δ qui lui est uniformément équivalente.
2. Une suite de Cauchy pour d peut ne pas être de Cauchy pour une autre distance δ si δ est topologiquement équivalente à d. (Voir T.D.)
3. Si f est une application uniformément continue de (E,d) vers (F,δ) et $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (E,d) alors $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans (F,δ).
4. Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
5. Toute suite de Cauchy est bornée.
6. Si une suite de Cauchy possède une valeur d'adhérence, elle converge vers cette valeur.
7. Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition. Un espace métrique est **complet** si toute suite de Cauchy est convergente.

Avant de donner des exemples d'espaces métriques complets, nous allons généraliser, dans ce cadre, un théorème étudié en première année et connu sous le nom du théorème des intervalles fermés emboités.

Théorème de Cantor. Un espace métrique (E,d) est complet si et seulement si pour toute suite $(F_n)_n$ de fermés non vides de E, décroissante (pour l'inclusion) dont les diamètres tendent vers 0 on a $\cap_{n=0}^{\infty} F_n$ réduite à un point.

Démonstration. Si (E,d) est complet et $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés donnée telle que dans l'énoncé, on choisit un élément x_n dans chaque F_n pour tout $n \geq 0$. La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy et donc converge d'après l'hypothèse vers un certain α qui appartient à $\cap_{n=0}^{\infty} F_n$. Cette intersection est donc non vide. Elle est réduite à α car son diamètre est nul.

Pour l'autre implication, si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, on considère $F_m = \overline{\{x_n,\ n \geq m\}}$. On a remarqué dans un autre paragraphe que $\cap_{n=0}^{\infty} F_n$ est exactement l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ qui est de Cauchy. Puisqu'il y a une seule valeur d'adhérence, la suite est convergente vers cette valeur d'adhérence. Ceci achève la démonstration.

Exemples d'espaces métriques complets.

1. Tout espace métrique compact est complet et, plus généralement, tout espace dont les boules fermées sont compactes est complet. (Ainsi, pour $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ est complet.)
2. Si dans un espace métrique, toute boule fermée est compacte, alors E est complet.
3. Tout fermé dans un espace complet est un complet.
4. Toute réunion finie de complets est un complet.
5. Toute intersection quelconque de complets est un complet.
6. Tout produit (fini ou dénombrable) d'espaces complets, muni de l'une des distances précisées auparavant, est complet.

Proposition. Tout complet dans un espace métrique est fermé.

Démonstration. Soit F une partie de E complète et $l \in \bar{F}$. Il existe une suite $(f_n)_n$ d'éments de F qui converge vers l et cette suite est convergente dans E donc de Cauchy. Puisque la partie F est complète, cette suite converge vers un élément de F qui est forcément l car la limite de toute suite lorsqu'elle existe est unique.

Avant de clore ce paragraphe, nous allons énoncer un important théorème de prolongement très utile et souvent utilisé en analyse fonctionnelle approfondie.

Théorème. Soit A une partie dense d'un espace métrique (E, d), (F, δ) un espace métrique complet et $g : A \to F$ une application uniformément continue, alors g se prolonge de facon unique en une application continue $f : E \to F$. De plus, f est uniformément continue.

Démonstration. Remarquons d'abord que si ce prolongement f existe, on a forcément pour tout $x \in E$, $f(x) = \lim_{a \to x} g(a)$. Il faut s'assurer que cette limite existe et que cette limite ne dépend pas de la suite choisie dans A. L'application g étant uniformément continue, si $(a_n)_n$ est une suite d'éléments de A convergente vers x, elle est de Cauchy et la suite $(g(a_n))_n$ est elle-même de Cauchy. Par suite, elle converge vers une limite. Cette limite ne dépend pas de la suite $(a_n)_n$ choisie convergente vers x. En effet, si $(b_n)_n$ est une suite de Cauchy convergente vers x, l'uniforme continuité de g montre que $(g(a_n))_n$ et $(g(b_n))_n$ ont la même limite. (On établit $|g(a_n) - g(b_n)| < \varepsilon$, si n est un entier assez grand.)

Il reste à montrer que f est uniformément continue. Par hypothèse, $\exists \eta > 0$, tel que si $d(x_n, y_n) < \eta$, on aura $\delta(g(x_n), g(y_n)) < \varepsilon/3$. Nous allons montrer que si $d(x, y) < \eta/3$ alors $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. En effet, si x et y sont deux éléments de E, il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ dans A qui convergent respectivement vers x et y. En particulier, on a $d(x_n, x) < \eta/3$ et $d(y_n, y) < \eta/3$. D'après l'inégalité triangulaire appliquée deux fois, on obtient $d(x_n, y_n) < \eta$, et par suite $\delta(g(x_n), g(y_n)) < \varepsilon/3$. De plus, la continuité du prolongement et l'égalité $d(x, x_n) < \eta/3$ assure $\delta(g(x_n), f(x)) \leq \varepsilon/3$, en fait $\delta(g(x_n), f(x)) = \lim_{m \to +\infty} \delta(g(x_n), g(x_m))$. Il en est de même pour y et y_n. A nouveau, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), g(x_n)) + \delta(g(x_n), g(y_n)) + \delta(g(y_n), f(y)) < \varepsilon.$$

Remarque. L'hypothèse sur l'uniforme continuité est nécessaire comme le montre l'exemple suivant:

Sur l'ensemble $\mathbb{Q}^*$ des rationnels privé de 0, on définit la fonction $f(x) = sin(1/x)$.

$\mathbb{Q}^*$ est dense dans $\mathbb{R}$, mais cette application n'est pas prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier. Le théorème précédent ne s'applique pas car elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{Q}^*$.

Pour clore ce chapitre, nous allons énoncer et démontrer le théorème du point fixe. On rappelle tout d'abord la définition suivante:

Définition. Une application f d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (F, δ) est dite contractante s'il existe une constante réelle $0 < k < 1$ telle que

$\forall (x, y) \in E\text{x}E$, $\delta(f(x), f(y)) \leq k\ d(x, y)$.

Remarque. Une application contractante est une application lipschitzienne de constante strictement inférieure à 1.

Théorème du point fixe. Soit f une application contractante d'un espace métrique complet (E, d) vers lui-même, alors f admet un unique point fixe, c'est à dire qu'il existe un unique $l \in E$ tel que $f(l) = l$.

Remarque. On utilise assez souvent ce théorème en analyse pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution pour une équation donnée. Par exemple, pour prouver l'existence de limite d'une suite récurrente ou bien pour montrer l'existence d'une solution d'une équation fonctionnelle. Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz qui assure, sous certaines conditions, l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation différentielle s'établit en se ramenant à un problème de point fixe. La partie importante du travail consiste non pas à appliquer le théorème du point fixe, mais à choisir les espaces métriques complets dans lesquels le théorème s'appliquera.

Démonstration. On choisit $u_0 \in E$ quelconque et on définit par récurrence la suite $(u_n)_n$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$. On peut établir sans difficulté majeure que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy en utilisant le fait que f est contractante. En s'aidant des formules pour les suites géométriques, on obtiendra pour $1 \leq n < m$,

$$d(u_n, u_m) \leq k^{n-1}[(1 - k^{m-n})/(1 - k)]d(u_0, u_1).$$

L'espace étant complet, la suite $(u_n)_n$ admet une limite notée l. Cette limie vérifie $f(l) = l$ grâce à la continuité de f. (On passe à la limite dans l'égalité $f(u_n) = u_{n+1}$.)

Il reste à montrer que f ne peut pas admettre deux points fixes distincts. Supposons l'existence de deux éléments distincts de E notés l_1 et l_2 qui vérifient $f(l_1) = l_1$ et $f(l_2) = l_2$. Puisque f est contractante, on aura

$$d(l_1, l_2) < k\ d(l_1, l_2).$$

Ceci est exclu, d'où l'unicité.

Il suffit de supposer qu'une itérée de l'application f est contractante pour assurer l'existence et l'unicité d'un point fixe.

Corollaire. Soit f une application d'un espace métrique complet (E, d) vers lui-même. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = f \circ ... \circ f$ soit contractante, alors f admet un unique point fixe $x_0 \in E$.

Démonstration. On applique le théorème précédent à f^n qui admet donc un point fixe x_0. On a donc $f^n(x_0) = x_0$ qui implique $f[f^n(x_0)] = f^n[f(x_0)] = f(x_0)$. Par unicité du point fixe, on a forcément $f(x_0) = x_0$ et donc x_0 est aussi un point fixe pour f.

Si f possédait un autre point fixe x_1, il serait aussi un point fixe pour f^n ce qui n'est pas.