Chapitre 4: Espaces compacts et espaces connexes

I. Espaces compacts et espaces localement compacts

Définitions Soit A une partie d'un espace topologique E, un **recouvrement ouvert** de A est la donnée d'une famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de A pour la topologie induite, où I est un ensemble d'indices, telle que

$$A = \cup_{i\in I} O_i.$$

Une partie $A \subset E$ est un **compact** si elle est séparée pour la topologie induite et si elle possède la propriété suivante dite de **Borel-Lebesgue:** De tout recouvrement ouvert de A, on peut extraire un sous recouvrement fini. Cela signifie qu'il existe une partie finie $J \subset I$ telle que

$$A = \cup_{i\in J} O_i.$$

Autres formes équivalentes:

- De toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$, pour la topologie induite, telle que $(\cap_{i\in I} F_i) \cap A = \emptyset$, on peut extraire une sous famille finie $J \subset I$ telle que $(\cap_{i\in J} F_i) \cap A = \emptyset$
- Toute famille de parties fermées de A, dont l'intersection de toute sous famille finie intersecte A, est telle que l'intersection de tous les éléments de la famille intersecte A.

Un espace topologique est dit compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de l'espace, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

$*$ On vérifie facilement que $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^n$ en général, n'est pas compact. (On peut donner un recouvrement par des ouverts pour lequel il n'existe pas de sous recouvrement fini)

$*$ Si $(x_n)_n$ est une suite convergente vers l alors l'ensemble $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

Théorème de Heine Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est compact.

Démonstration On va proposer deux méthodes.

1. La topologie sur $I\!R$ étant celle définie par la distance $d(x, y) = \mid x - y \mid$, $I\!R$ peut être considéré comme un espace métrique et par suite pour montrer qu'une partie de $I\!R$ est compact, il suffit de montrer que toute suite de points de cette partie admet une valeur d'adhérence. Pour un intervalle de $[a, b]$ de $I\!R$ cela résulte de la construction basée sur la méthode de dichotomie.

2. L'autre méthode consiste à se donner un recouvrement ouvert $(O_i)_i$ de $[a, b]$ puis d'en extraire un sous recouvrement fini. On considère l'ensemble

$A = \{x \in [a, b]$, $[a, x]$ puisse être recouvert par un nombre fini d'ouverts$\}$.

A contient a et est majoré par b donc admet une borne supérieure α. Montrons que α appartient à A. Supposons le contraire, on a α appartient à l'un des ouverts du recouvrement initial noté O_α. D'autre part, d'après la propriété de la borne supérieure, il existe un élément $m \in A$ tel que $m < \alpha$ et $m \in O_\alpha$. L'intervalle $[a, m]$ peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts $O_{i_1}, ..., O_{i_k}$ et l'intervalle $[a, \alpha]$ est recouvert par $O_{i_1}, ..., O_{i_k}, O_\alpha$. Ceci prouve que $\alpha \in A$. Par un raisonnement analogue, on peut montrer que l'hypothèse $\alpha < b$ contredirait le fait que α soit un majorant de A, car on trouvera un autre élément $m_1 \in O_\alpha$, avec $m_1 > \alpha$ et l'intervalle $[a, m_1]$ sera aussi recouvert par $O_{i_1}, ..., O_{i_k}, O_\alpha$ et donc on a $m_1 \in A$. Ainsi $\alpha = b$, et l'intervalle $[a, b]$ peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts de la famille initiale, $[a, b]$ est donc compact.

Proposition Si deux espaces topologiques sont homéomorphes et si l'un deux est compact, l'autre est compact.

Démonstration Soit $f : E \to F$ un homéoporphisme, supposons E compact, montrons que F est compact. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de F, $(f^{-1}(O_i))_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de E qui est compact. Par conséquent, il existe un sous recouvrement fini $(f^{-1}(O_i))_{i \in J}$ de E et $(O_i)_{i \in J}$ sera un sous recouvrement fini pour F.

Conséquence $\bar{I\!R}$ est compact car il est homéomorphe à l'intervalle $[-1, +1]$ (muni de la topologie induite par celle de $I\!R$).

On peut proposer l'homéomorphisme suivant: $f : \bar{I\!R} \to [-1, +1]$ défini par $f(x) = (2/\pi)Arctan(x)$ si $x \in I\!R$, $f(+\infty) = 1$ et $f(-\infty) = -1$. (Exercice: Montrer que c'est bien un homéomorphisme.)

Propriétés

1. Si $(x_n)_n$ est une suite dans un espace compact alors $(x_n)_n$ admet au moins une valeur d'adhérence.

2. Si $(x_n)_n$ est une suite, dans un espace compact, qui admet une valeur d'adhérence unique alors cette suite converge vers cette unique valeur d'adhérence.

3. Toute partie fermée dans un espace compact est compact.
4. Toute partie compacte d'un espace séparé est fermée.
5. Dans un espace topologique séparé, toute intersection quelconque de parties compactes est une partie compacte et toute réunion finie de parties compactes est une partie compacte.

Démonstration
Pour le premier point, on considère les parties

$$F_m = \overline{\{x_n,\ n \geq m\}}.$$

$(F_m)_m$ est une famille de parties fermées dont toute sous famille finie est d'intersection non vide, puisque l'espace est compact, l'intersection de toute la famille est aussi non vide. Or, cette intersection est exactement l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite.

Pour le deuxième point, supposons que cette unique valeur d'adhérence notée λ ne soit pas une limite. Il existe alors une infinité d'indices n pour lesquels les x_n correspondants sont à l'extérieur de tout voisinage ouvert $V(\lambda)$. On a alors une suite extraite dans un espace compact qui admet donc une valeur d'adhérence. Cette valeur d'adhérence appartient au fermé complémentaire de $V(\lambda)$. Ceci contredit l'unicité de la valeur d'adhérence λ.

Soit F un fermé dans un espace compact et soit $(F_n)_n$ une famille de fermés de F dont toute sous famille finie est d'intersection non vide. Les fermés de F étant les parties de la forme $F_n = J_n \cap F$, où les J_n sont des fermés de l'espace compact, les F_n sont aussi des fermés de l'espace. On a alors par hypothèse :

$$(\cap_{finie} F_n) = \cap_{finie}(J_n \cap F) \neq \emptyset.$$

L'espace étant compact, d'après une des formes de la propriété de Borel-Lebesgue, l'intersection de toute la famille est non vide et on a donc

$$\cap_{infinie}(J_n \cap F) \neq \emptyset.$$

Ceci montre que la partie F est compacte.

Pour le point suivant, notons K la partie compacte et soit $l \in \bar{K}$. Montrons que $l \in K$. Tout voisinage $V(l)$ de l rencontre K, son adhérence $\bar{V(l)}$ rencontre aussi K. Donnons nous la famille de tous les voisinages fermés $(F_i)_{i \in I}$ de l, l'intersection de toute sous famille finie de ces voisinages, étant elle-même un voisinage de l, rencontre K. Puisque K est compact, l'intersection de tous les éléments de cette famille rencontre K. Or, l'espace étant séparé, cette intersection, qui contient l, ne peut contenir un autre élément. Car sinon si y est un élément quelconque avec $y \neq l$, parmi les F_i, il y en a un qui ne contient pas y (sinon l'espace ne serait pas séparé), et par suite, y n'appartient pas à $\cap_{i \in I} F_i$. On a donc

$$(\cap F_i) \cap K = \{l\} \cap K \neq \emptyset.$$

La preuve du dernier point ne pose aucune difficulté et est laissée comme exercice.

Corollaire Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées bornées.

Démonstration

$\mathbb{R}$ étant séparé, les compacts de $\mathbb{R}$ sont fermés. De plus, ils sont forcément bornés (sinon, on peut contredire la propriété de Borel-Lebesgue). Inversement, si on se donne une partie bornée, elle est contenue dans un intervalle fermé borné qui est compact d'après un résultat qui précède. La partie étant fermée dans un compact elle est compacte.

Espaces compacts et applications continues

Théorème Soit E un espace topologique compact, F un espace topologique séparé et $f : E \to F$ une application continue alors $f(E)$ est une partie compacte de F.

Démonstration

Tout d'abord, $f(E)$ est séparé pour la topologie induite par celle de F puisque F est séparé. On se donne un recouvrement de $f(E)$ par des ouverts $(O_i)_i$ de F, les ouverts $(f^{-1}(O_i))_i$ constituent un recouvrement de E qui est compact. On peut en extraire un sous recouvrement fini qui induira un sous recouvrement fini pour $f(E)$.

On déduit sans difficulté les conséquences suivantes:

Corollaires

1. Soit E un espace topologique compact, F un espace topologique séparé et $f : E \to F$ une application continue alors f est fermée. De plus, si f est bijective, alors f est un homéomorphisme.

2. Soit E un espace topologique compact et $f : E \to I\!R$ une application continue alors f est bornée et atteint ses bornes.

Produits d'espaces compacts

Théorème de Tychonoff

Soit $E = \Pi_{i\in I} E_i$ un produit d'espaces topologiques, E est compact si et seulement si pour tout $i \in I$, E_i est compact.

Remarque

On va montrer ce résultat dans le cas où on a un produit fini, et plus particulièrement dans le cas où on a deux composantes. Lorsque l'ensemble des indices est infini, la démonstration fait appel à des notions qui ne font pas partie du programme de ce cours.

Démonstration Supposons E compact, soit $\{O_i,\ i \in I\}$ et $\{O'_j,\ j \in J\}$ deux recouvrements ouverts respectifs de E_1 et E_2. La famille $\{O_i \mathrm{x} O'_j,\ (i,j) \in I \mathrm{x} J\}$ est un recouvrement ouvert de E. On peut donc en extraire un sous recouvrement fini. Il existe donc un ensemble fini $N \subset I \mathrm{x} J$ tel que $\{O_i \mathrm{x} O'_j,\ (i,j) \in N\}$ recouvre E. Il existe donc un nombre fini $I' \subset I$ d'indices i tel que la famille $\{O_i,\ i \in I'\}$ recouvre E_1 et par suite E_1 est compact. Il en est de même pour E_2.

Inversement, on suppose que les deux composantes E_1 et E_2 sont compactes et on se donne un recouvrement ouvert $\{W_i,\ i \in I\}$ de E. Chaque ouvert W_i est une réunion de pavés ouverts $U^i_j \mathrm{x} V^i_j$, où U^i_j est un ouvert de E_1 et V^i_j un ouvert de E_2.

Pour tout $y \in E_2$ fixé, l'espace topologique $E_1 \mathrm{x}\{y\}$ muni de la topologie induite par celle de E est compact. En effet, on peut se convaincre que la restriction de la projection p_1 à $E_1 \mathrm{x}\{y\}$ est un homéomorphisme et E_1 est compact par hypothèse.

Du recouvrement $\cup_{i,j} U^i_j \mathrm{x} V^i_j$, on peut extraire un sous recouvrement fini $\cup_{(i,j)\in M} U^i_j \mathrm{x} V^i_j$ de $E_1 \mathrm{x}\{y\}$ où M est un ensemble fini. On peut supposer que chacun des V^i_j contient y. Si on pose $V'_y = \cap_{(i,j)\in M} V^i_j$, V'_y est un voisinage de y dans E_2 et $\cup_{(i,j)\in M} U^i_j \mathrm{x} V'_y$ est un recouvrement ouvert de $E_1 \mathrm{x}\{y\}$. Quand y parcourt E_2, on obtient un recouvrement ouvert de E_2 duquel on peut extraire un sous recouvrement fini $V'_{y_1}, ..., V'_{y_k}$. On a finalement obtenu un recouvrement ouvert fini de la forme $\cup_j(\cup_{finie} U_i \mathrm{x} V'_{y_j})$ chacun des facteurs $U_i \mathrm{x} V'_{y_j}$ étant contenu dans l'un des W_i de départ. D'où un sous recouvrement fini de notre recouvrement initial.

Espaces localement compacts

Définition Un espace topologique E est **localement compact** si E est séparé et si tout point de E admet un voisinage compact.

Exemples

$*$ $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ sont localement compacts.

$*\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ n'est pas localement compact. (Voir TD)

Remarque L'intérêt des espaces localement compacts est qu'ils peuvent être compactifiés dans un sens qui sera précisé au théorème suivant, mais ce qui constitue une propriété encore plus importante est que les espaces localement compacts sont des espaces de Baire. Ce type d'espaces n'est pas au programme mais constitue une classe très importante pour des études mathématiques avancées.

Avant d'énoncer le théorème, nous proposons l'exercice suivant qui sera commenté en cours et corrigé en détail en travaux dirigés.

Exercice "La projection stéréographique." Dans $\mathbb{R}^2$, on note S le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Une copie de $\mathbb{R}$ étant $\mathbb{R}$x$\{0\}$, on munit S et $\mathbb{R}$x$\{0\}$ de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$. On considère l'application $\varphi : S \to \mathbb{R}$ définie comme suit:

Si $N(0,1)$ est le pôle nord de S, et $M(x,y)$ un point quelconque de S différent de N, la droite $\mathcal{D}$ passant par N et M coupe la droite horizontale $\mathbb{R}$x$\{0\}$ en un point N d'abscisse X. On pose alors $\varphi(M) = X$.

Montrer que l'application ainsi définie est un homéomorphisme de $S \setminus \{N\}$ vers $\mathbb{R}$.

S étant compact, on dit que c'est un compactifié de $\mathbb{R}$. On dit aussi que N est le point à l'infini.

Théorème Soit E un espace topologique localement compact, non compact. Il existe un espace topologique compact $\hat{E}$, un élément $\omega \in \hat{E}$ et une application $f : E \to f(E) \subset \hat{E}$ tels que $f(E)$ est dense dans $\hat{E}$, $f(E)^c = \{\omega\}$ et f est un homéomorphisme de E sur $f(E)$.

$\hat{E}$ est le compactifié d'Alexandroff de E et ω est le point à l'infini.

Démonstration On pose $\hat{E} = E \cup \{\omega\}$. On définit sur $\hat{E}$ la topologie pour laquelle les ouverts sont les ouverts de E et les parties de la forme $K^c \cup \{\omega\}$ où K est voisinage compact quelconque (qui existe car E est localement compact).

Cette famille d'ouverts, qui contient $\emptyset$ et E, est stable par réunion quelconque et par intersection finie (à vérifier!). Elle constitue donc bien une topologie.

On définit l'application $f : E \to \hat{E}$ par $f(x) = x$. On a donc $f(E) = E$. E est dense dans $\hat{E}$ car pour tout ouvert $O = K^c \cup \{\omega\}$ voisinage de ω, le complémentaire de K dans E, K^c est un ouvert non vide (sinon E serait compact). Ainsi O intersecte E.

Il faut d'abord vérifier que $\hat{E}$ est séparé. Il suffit de vérifier que ω et tout point x de E possèdent dans $\hat{E}$ des voisinages ouverts respectifs disjoints. Pour cela, il suffit de choisir un voisinage ouvert O_x avec $K = \overline{O_x}$ compact et pour ω choisir le voisinage $K^c \cup \{\omega\}$.

Montrons maintenant que $\hat{E}$ est compact. On se donne un recouvrement de $\hat{E}$ par des ouverts $(U_i)_i$. Parmi ces ouverts, certains contiennent ω, notons les $(O_i)_i$ et les autres ne contiennent pas ω, notons les $(O'_i)_i$. Soit O_{i_0} un des ouverts contenant ω, on a $O_{i_0} = K^c \cup \{\omega\}$. Le voisinage compact K est aussi recouvert par la famille $(U_i)_i$, on peut déduire de ce recouvrement de K un recouvrement $(V_i)_i$ par des ouverts de $\mathbb{R}$ obtenus en gardant les ouverts de V_i qui ne contiennent pas ω et en enlevant ω aux ouverts qui les contiennent. Les $(V_i)_i$ constituent un recouvrement de K par des ouverts de $\mathbb{R}$, on peut en extraire un sous recouvrement fini. D'où un recouvrement fini de K par des ouverts de la famille $(U_i)_i$. Si on ajoute à ces ouverts (en nombre fini) O_{i_0}, on obtient, pour $\hat{E}$, un sous recouvrement fini. Ainsi, $\hat{E}$ est compact.

Remarque On a vu que $\overline{\mathbb{R}}$ est un compact contenant $\mathbb{R}$. Mais, on a ajouté dans ce cas deux points *à* $\mathbb{R}$. Il ne s'agit pas du compactifié d'Alexandroff mais d'un autre façon de compactifier.

Les compactifiés d'Alexandroff d'un espace topologique localement compact ne sont pas uniques mais sont uniques à homéomorphisme près. On énonce le résultat:

Théorème Soient $\hat{E}_1$ et $\hat{E}_2$ deux compactifiés d'un même espace topologique localement compact E, f_1, f_2 les applications correspondantes et ω_1, ω_2 les points à l'infini correspondants, alors l'application $\varphi : \hat{E}_1 \to \hat{E}_2$ définie pour tout $x \in f_1(E_1)$ par $\varphi(x) = f_2 \circ f_1^{-1}(x)$ et $\varphi(\omega_1) = \omega_2$ est un homéomorphisme de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$.

Démonstration Montrons la continuité de φ en ω_1 les autres points ne posant pas de problème particulier. Soit $V(\omega_2)$ un ouvert de $\hat{E}_2$ contenant ω_2, le complémentaire de $V(\omega_2)$ dans $\hat{E}_2$ est fermé dans un compact et par suite égal à un compact K. On veut montrer que $\varphi^{-1}(V(\omega_2))$ est ouvert c'est à dire que son complémentaire $(\varphi^{-1}(V(\omega_2)))^c = \varphi^{-1}(K)$ est fermé. Or, K est un compact dans un séparé donc fermé, et f_2 étant un homéomorphisme, son image par f_2^{-1}

est fermé dans E, à nouveau l'image de ce fermé par f_1 est fermé pour la même raison. Ceci achève la démonstration.

II. Espaces connexes et espaces localement connexes

Définition Un espace topologique E est dit **connexe** s'il n'existe pas 2 ouverts O_1, O_2 non vides, disjoints et tels que $O_1 \cup O_2 = E$.

Une partie $A \subset E$ est dite connexe si elle est connexe pour la topologie induite par celle de E.

Remarque Dans la définition, on peut remplacer "ouverts" par "fermés".

Proposition Un espace topologique E est connexe si les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E.

Démonstration S'il existait une partie B différente de $\emptyset$ et de E à la fois ouverte et fermée, B et son complémentaire seraient deux ouverts non vides différents de E disjoints dont l'union est E. Ceci prouverait que E ne serait pas connexe. L'autre implication ne pose pas de problème non plus.

Exemple $\mathbb{R}$ est connexe. En effet, montrons que si $\mathbb{R} = O_1 \cup O_2$, où O_1 et O_2 sont deux ouverts, avec $O_1 \neq \emptyset$, alors $O_2 = \emptyset$.

Supposons l'existence d'un élément $c \in O_1^c$. Il existe un élément $d \in O_1$ tel que ou bien $d < c$ ou bien $d > c$. Supposons par exemple $d < c$ et considérons l'ensemble

$$O = \{x \in O_1,\ x < c\}.$$

O est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, elle admet donc une borne supérieure α. α n'appartient pas à O_1 car sinon comme O_1 est ouvert, il contiendrait un intervalle ouvert contenant α et α ne serait alors pas la borne supérieure de O. α est un point adhérent à O_1 qui en même temps appartient à $O_1^c = O_2$. Mais alors, O_2 ne serait plus ouvert car il n'existe pas d'intervalle ouvert contenant α et contenu dans O_2, d'où une contradiction. Par conséquent, $\mathbb{R}$ est connexe.

Conséquence Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes.

Ceci se démontre de la même façon sachant que les ouverts de l'intervalle sont les traces sur l'intervalle des ouverts de $\mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}$ n'est pas connexe pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. Par exemple, les deux parties $]-\infty,\sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}$ et $]\sqrt{2},+\infty[\cap\mathbb{Q}$ sont deux ouverts de $\mathbb{Q}$ non vides disjoints dont la réunion est $\mathbb{Q}$.

Le théorème suivant permet de caractériser les connexes de $\mathbb{R}$ et de $\overline{\mathbb{R}}$:

Théorème Une partie A de $\mathbb{R}$ ou de $\overline{\mathbb{R}}$ est connexe si et seulement si A est un intervalle.

Démonstration Si A est un intervalle on procède comme ci-dessus pour $\mathbb{R}$. Supposons que A est connexe sans être un intervalle. Il existe donc $c \notin A$, et $\alpha,\ \beta \in A$ tels que $\alpha < c < \beta$. Comme pour $\mathbb{Q}$, on peut alors proposer deux ouverts non vides disjoints de la partie A dont la réunion est A, par exemple $]-\infty,c[\cap A$ et $]c,+\infty[\cap A$.

Propriétés Dans un espace topologique E, on a les propriétés suivantes:

1. Si A est connexe alors toute partie B vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe. En particulier, $\overline{A}$ est connexe.
2. *Passage de la douane*. Si une partie connexe A rencontre l'intérieur d'une partie B et l'extérieur de B (c'est à dire l'intérieur du complémentaire de B) où B est une partie non vide, alors A rencontre la frontière de B. C'est à dire $A\cap\ Fr(B) \neq \emptyset$.
3. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de connexes telles que $A_i\cap\ A_j \neq \emptyset$ pour $i,j \in I$, alors $\cup_{i\in I}A_i$ est connexe.

Démonstration On suppose $B = (O_1 \cap B) \cup\ (O_2 \cap B)$. Ceci donnera un recouvrement de A par deux ouverts $A\cap\ O_1$ et $A\cap\ O_2$. A étant connexe, l'un de ces ouverts est forcément vide, par exemple $A\cap\ O_1$. On aura donc $A \subset O_1^c$ et aussi $\bar{A} \subset O_1^c$ puisque O_1^c est un fermé contenant A. On a donc aussi $B \subset O_1^c$ et donc $B\cap\ O_1 = \emptyset$. Ainsi B est connexe.

Pour le deuxième point, si A ne rencontre pas $Fr(B)$, alors on peut recouvrir A par deux ouverts non vides disjoints qui sont $(A\cap\ int(B))$ et $(A\cap\ int(B^c))$. Ceci recouvre bien A car si $x \in A$ alors ou bien $x \in int(B)$ ou bien $x \in int(B^c)$. En effet, si $x \notin\ int(B)$ alors $x \in \bar{B}^c$ et si $x \notin\ int(B^c)$ alors $x \in \overline{B}$. Par suite si $x \notin int(B)\cup\ int(B^c)$ alors $x \in Fr(B)$ et selon l'hypothèse, $x \notin A$. Ainsi si A n'intersecte pas $Fr(B)$, A peut être recouvert par deux ouverts non vides disjoints. Or, ceci contredit la connexité de A. A doit donc intersecter la frontière de B.

Pour le dernier point, on suppose qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $\cup_{i\in I}A_i \subset U \cup V$ nous allons montrer qu'on a ou bien $\cup_{i\in I}A_i \cap U = \emptyset$, ou bien $\cup_{i\in I}A_i \cap V = \emptyset$. U et V recouvrent chaque A_i et puisque A_i est connexe pour tout $i \in I$, on a $A_i \cap U = \emptyset$ ou $A_i \cap V = \emptyset$. On affirme alors qu'on est dans l'un des deux cas suivants: Ou bien $A_i \cap U = \emptyset$ pour tout $i \in I$, ou bien $A_i \cap V = \emptyset$ pour tout $i \in I$. En effet, supposons qu'il existe $i \neq j$ tels que $A_i \cap U = \emptyset$ et $A_j \cap V = \emptyset$, mais comme il existe $x \in A_i \cap A_j$, x ne serait ni dans U ni dans V. Or U et V recouvrent $\cup_{i\in I}A_i$, ceci est une contradiction.

Théorème Soit $f : E \to F$ une application continue entre espaces topologiques, si E est connexe alors $f(E)$ est connexe.

Démonstration On se donne un recouvrement de $f(E)$ par deux ouverts disjoints, puisque f est continue, cela donnera un recouvrement de E par deux ouverts disjoints. Puisque E est connexe, l'un de ces ouverts doit être vide et par suite l'un des ouverts du recouvrement de $f(E)$ doit être vide. Ainsi, $f(E)$ est connexe.

Remarque L'image réciproque d'un connexe par une application continue n'est pas connexe en général. Par exemple, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = |x|$ et $O =]1, +\infty[$ alors $f^{-1}(O) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ n'est pas connexe.

Le théorème de la valeur intermédiaire est une conséquence du théorème précédent. On énonce le théorème.

Théorème Soit E un espace topologique connexe et $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue. Si a et b sont deux éléments de $f(E)$ avec $a < b$, alors pour tout c vérifiant $a < c < b$, il existe $\alpha \in E$ tel que $f(\alpha) = c$.

Théorème Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue alors les trois points suivants sont équivalents:
(i) f est strictement monotone
(ii) f est fermée
(iii) f est ouverte.

Démonstration
Nous allons montrer "strictement monotone" $\to$ "ouverte" $\to$ "fermée" $\to$ "strictement monotone".

Supposons par exemple que f est strictement croissante et soit $x \in O$ où O est un ouvert de I. Deux cas se présentent selon que x est un point intérieur de I ou pas. Si x est intérieur alors il existe un intervalle $K =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset O \subset I$ et dans ce cas, $f(K) =]f(x-\varepsilon), f(x+\varepsilon)[\subset f(O) \subset f(I)$ car $f(K)$ est un intervalle et f est strictement croissante. Ceci montre donc que $f(O)$ est un ouvert. Si x se trouve à l'extrêmité de I, par exemple à gauche, alors il existe un $\varepsilon > 0$ pour lequel $L = [x, x+\varepsilon[\subset O \subset I$. On a alors $f(L) = [f(x), f(x+\varepsilon)[\subset f(O) \subset f(I)$. $f(L)$ est bien un ouvert de $f(I)$ pour la topologie induite contenu dans $f(O)$. Par conséquent, l'application f est ouverte.

Supposons f ouverte et soit F un fermé de I. On a $f(F) \cup f(F^c) = f(I)$, et comme F^c est un ouvert, $f(F^c)$ est un ouvert de $f(I)$. Son complémentaire $f(F)$ est donc un fermé de $f(I)$, f est donc fermée.

Si f est fermée, nous allons d'abord montrer que f est injective puis que f est strictement monotone. Soit x et y deux éléments de I, avec par exemple $x < y$. L'image de l'intervalle fermé $[x, y]$ est un intervalle fermé noté $[\alpha, \beta]$. On a ou bien $f(x) = \alpha$ ou bien $f(x) = \beta$ car si $f(x)$ était un point intérieur l'image par f du connexe $]x, y]$ ne serait pas connexe. De même, $f(y)$ est aussi une extrêmité. Ce qui prouve que x et y ont des images différentes et donc f est injective.

Il reste à montrer que f est strictement monotone. Pour cela, supposons par exemple qu'il existe $a < b < c$ tels que $f(a) < f(b)$ mais $f(b) > f(c)$, il y aurait alors un élément de $f(I)$ qui aurait deux antécédents et f ne serait pas injective.

Proposition Soit E_i, $i \in I$, une famille de parties d'un espace topologique E. $\Pi_{i \in I} E_i$ est connexe si et seulement si E_i est connexe pour tout $i \in I$.

Démonstration

Si $\Pi_{i \in I} E_i$ est connexe, alors pour tout $i \in I$, puisque l'application p_i est continue, l'image $p_i(\Pi_{i \in I} E_i) = E_i$ est donc connexe.

Inversement, on suppose que les E_i, $i \in I$, sont connexes. Montrons que $\Pi_{i \in I} E_i$ est connexe. On suppose donnés deux ouverts U et V (pour la topologie produit) dont l'intersection est vide et tels que $U \cap \Pi_{i \in I} E_i$ et $V \cap \Pi_{i \in I} E_i$ recouvrent $\Pi_{i \in I} E_i$. Les projections p_i étant des applications ouvertes, pour tout $i \in I$, $p_i(U \cap \Pi_{i \in I} E_i)$ et $p_i(V \cap \Pi_{i \in I} E_i)$ sont des ouverts de E_i qui recouvrent E_i. E_i étant connexe, l'un de ces ouverts est vide. Supposons par exemple $p_i(U \cap \Pi_{i \in I} E_i) = \emptyset$ et on fixe un tel indice $i = i_0$. On fait de même pour un autre indice $i_1 \in I$. Forcément, on a ici aussi $p_{i_1}(U \cap \Pi_{i \in I} E_i) = \emptyset$. Sinon, supposons $p_{i_1}(V \cap \Pi_{i \in I} E_i) = \emptyset$ et soit $a = (a_i)_i$ un élément du produit. Cet élément ne peut pas appartenir à $U \cap \Pi_{i \in I} E_i$ car sinon sa projection $p_{i_0}(a)$ appartiendrait à $p_{i_0}(U \cap \Pi_{i \in I} E_i)$ qui a été supposé vide. De même, il ne peut pas appartenir à $V \cap \Pi_{i \in I} E_i$ car sinon sa projection $p_{i_1}(a)$ appartiendrait à $p_{i_1}(V \cap \Pi_{i \in I} E_i)$ qui a été lui aussi supposé vide. Par suite a n'appartiendrait pas à $\Pi_{i \in I} E_i$ ce qui est absurde. Ainsi, en itérant le raisonnement précédent, on obtient que pour tout $i \in I$, $p_i(U \cap \Pi_{i\in I}E_i)$ est vide et par suite, $U \cap \Pi_{i\in I}E_i$ est vide. On a montré que le produit $\Pi_{i\in I}E_i$ est connexe.

Connexité par arcs

Définition Un espace topologique est dit connexe par arcs si pour tous a et b deux éléments distincts de E, il existe une application $f : [0, 1] \to E$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

On peut aussi définir la connexité par arcs pour une partie de E en considérant la toplogie induite sur cette partie par celle de E. Un des principaux intérêt de la connexité par arcs est souligné dans la proposition suivante:

Proposition Un espace topologique connexe par arcs est connexe.

Démonstration Si E n'était pas connexe, il y aurait deux ouverts U et V disjoints non vides et dont la réunion serait E. On choisit $a \in U$ et $b \in V$, d'après la connexité par arcs, il existe une application f continue définie sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ seraient deux ouverts disjoints non vides qui recouvriraient l'intervalle $[0, 1]$. Or, nous avons vu que les intervalles sont connexes. E est donc connexe.

Remarque Un espace connexe n'est pas forcément connexe par arcs (voir ci-dessous un contre exemple classique). Par contre, on peut montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ connexe est connexe par arcs.

Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi(x) = sin(1/x)$. La partie formée par la réunion du graphe de ϕ et du segment $\{0\}$x$[-1, 1]$ est connexe mais non connexe par arcs.

Nous allons clore ce chapitre par deux définitions puis nous indiquerons une application de la connexité.

Composantes connexes

Définition Une partie $A \subset E$ est dite composante connexe si A est connexe et s'il n'existe pas de partie connexe contenant strictement A.

Les composantes connexes sont fermées. En effet, l'adhérence de tout connexe est connexe.

Espaces localement connexes

Définition Un espace est dit localement connexe si tout point possède un système fondamental de voisinages connexes.

Application de la connexité: Exercice Montrer qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ ne peut être homéomorphe à un disque de $\mathbb{R}^2$.

Solution : S'ils étaient homéomorphes alors en retirant un élément de l'intervalle et un élément du disque, les deux parties obtenues, munies des topologies induites, seraient elles aussi homéomorphes. Or, le disque privé d'un point reste connexe car il est connexe par arcs alors que l'intervalle privé d'un point n'appartenant pas au bord n'est plus connexe. Il n'existe donc pas d'homéomorphisme entre un intervalle de $\mathbb{R}$ et un disque de $\mathbb{R}^2$.