Chapitre 5: Espaces de fonctions.

Théorème d'Ascoli. Théorème de Stone-Weierstrass.

Dans ce chapitre, on se place dans des espaces topologiques particuliers qui sont des espaces de fonctions. Les principaux objectifs sont le théorème d'Ascoli et le théorème de Stone-Weierstrass. Le premier théorème permet de mieux comprendre les parties compactes d'un espace de fonctions continues tandis que le second permet de donner des parties denses dans un espace de fonctions continues. Le théorème de Stone-Weierstrass permet en particulier d'approximer une fonction par des polynômes. Il est par conséquent souvent utilisé en analyse numérique.

I. Généralités

Pour deux espaces topologiques E et F , on note $F^E = \{f : E \rightarrow F\}$ l'ensemble des applications de E vers F . On note aussi cet ensemble par $\prod_{x \in E} F_x$, avec la convention suivante:

Une fonction f peut être confondue avec un élément de $\prod_{x \in E} F_x$ si on admet que l'image $f(x)$ appartient à F_x (les F_x étant tous des ensembles identifiés à F).

Le produit $\prod_{x \in E} F_x$ peut être fini, dénombrable ou infini non dénombrable.

On munit l'ensemble F^E de la topologie produit qui en fait un espace topologique. On rappelle que les ouverts de F^E sont les réunions quelconques de pavés, où un pavé est une partie intersection finie de la forme

$$p_{x_1}^{-1}(O_{x_1}) \cap \dots \cap p_{x_n}^{-1}(O_{x_n}).$$

Si on prend par exemple l'ouvert $U = p_{x_1}^{-1}(O_{x_1}) \cap \dots \cap p_{x_n}^{-1}(O_{x_n})$, alors une fonction f appartient à U ssi $f(x_1) \in O_{x_1}, \dots, f(x_n) \in O_{x_n}$.

La proposition suivante explique la raison pour laquelle cette topologie s'appelle la topologie de la convergence simple.

Proposition Une suite $(f_n)_n$ converge vers f pour la topologie produit si et seulement si $\forall x \in E$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

Démonstration Soit $x \in E$ un élément quelconque, montrons que $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. Soit O_x un ouvert de F contenant $f(x)$, l'ouvert $V =$

$p_x^{-1}(O_x)$ contient f . Puisqu'on a supposé que la suite $(f_n)_n$ converge vers f pour la topologie produit, si n est assez grand, f_n est élément de V . Or, ceci signifie que $f_n(x)$ appartient à O_x si n est assez grand.

Inversement, supposons donnée une suite de fonctions $(f_n)_n$ telle que $\forall x \in E$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$, montrons que la suite $(f_n)_n$ converge vers f pour la topologie produit. On se donne donc un voisinage de f noté $O(f)$, qui contient un ouvert contenant f . Cet ouvert étant une réunion quelconque de pavés, on peut supposer que f appartient à l'un de ces pavés. Si ce pavé est noté P , alors P est de la forme

$$P = p_{x_1}^{-1}(O_{x_1}) \cap \dots \cap p_{x_n}^{-1}(O_{x_n}).$$

Pour x_1 , il existe N_1 tel que si $n \geq N_1$, on a $f_n(x_1) \in O_{x_1}$. On fait de même pour $x_2, \dots, x_n$. Si on pose $N = \sup\{N_1, \dots, N_n\}$, nous avons garanti que pour $n \geq N$, $f_n \in P$. Par suite, la suite $(f_n)_n$ converge vers f pour la topologie produit.

Si F est un espace métrique muni d'une distance notée d_F , on peut définir sur F^E une autre topologie, celle de la convergence uniforme, de la façon suivante: Si $f, g \in F^E$, on pose

$$d(f, g) = \sup_{x \in E} d_F(f(x), g(x)),$$

cette valeur pouvant être $+\infty$. On peut se ramener à des valeurs finies, en remplaçant la distance d_F de F par une distance d' qui lui est uniformément équivalente. Par exemple, on peut poser $d'_F = \inf\{d_F, 1\}$. Dorénavant, on peut supposer que la distance d définie sur F^E est finie. Ainsi, F^E est aussi un espace métrique, où la topologie associée est celle de la convergence uniforme. On peut comparer les deux topologies:

Proposition

La topologie de la convergence uniforme est plus fine que celle de la convergence simple.

Démonstration Il suffit de s'assurer que si O est un ouvert pour la topologie de la convergence simple alors O est un ouvert pour la topologie de la convergence uniforme. Supposons donc qu'on a

$$O = p_{x_1}^{-1}(O_{x_1}) \cap \dots \cap p_{x_n}^{-1}(O_{x_n}).$$

Soit $f \in O$, on a donc $f(x_i) \in O_{x_i}$ pour $i = 1, \dots, n$. Chaque O_{x_i} contient une boule ouverte de F centrée en $f(x_i)$ et de rayon r_i . On peut trouver une boule centrée en f et de rayon convenable (qui est un ouvert pour la topologie de la convergence uniforme) contenue dans O . En effet, si on pose $r = \inf\{r_1, \dots, r_n\}$,

alors la boule (dans F^E) de centre f et de rayon r convient. On a garanti que si $g \in B(f, r)$, alors $g(x_i) \in O_{x_i}$ pour $i = 1, \dots, n$ et par suite $B(f, r) \subset O$.

Théorème Soit E un espace topologique, (F, d_F) un espace métrique et $f_n : E \rightarrow F$ une suite de fonctions continues telles que la suite $(f_n)_n$ converge vers une limite f pour la topologie de la convergence uniforme, alors f est continue.

Démonstration Il suffit d'écrire:

$$d_F(f(x), f(x')) \leq d_F(f(x), f_n(x)) + d_F(f_n(x), f_n(x')) + d_F(f_n(x'), f(x')),$$

puis de choisir n assez grand pour que

$$d_F(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3, \forall x \in E,$$

et enfin de remarquer que $d_F(f_n(x), f_n(x')) < \varepsilon/3$ si x' appartient à un voisinage convenable de x .

Corollaire L'espace des fonctions continues $\mathcal{C}(E, F)$ est un fermé de F^E pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème de Dini Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur E , à valeurs réelles et continues. On suppose que E est un espace topologique compact et que la suite $(f_n)_n$ est monotone. Si la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction continue f alors $(f_n)_n$ converge vers f pour la topologie de la convergence uniforme.

Démonstration On suppose la suite $(f_n)_n$ croissante, sinon on peut s'y ramener en considérant la suite $(-f_n)_n$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, on pose $F_n = \{x, |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$. On souhaite montrer que les F_n sont vides à partir d'un certain rang N , cela prouvera que si $n \geq N$, $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, ceci $\forall x \in E$.

D'après les hypothèses, $(F_n)_n$ est une suite décroissante de fermés. Puisque la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f , on a:

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n = \emptyset.$$

E étant compact, d'après la propriété de Borel-Lebesgue, on peut en extraire une sous famille finie d'intersection vide. Cela signifie que les F_n sont vides à partir d'un certain rang. Ce qu'il fallait montrer.

II. Familles équicontinues

Soit E un espace topologique, (F, d) un espace métrique et A une partie de F^E .

Définitions Soit $a \in E$, on dit que la famille A est équicontinue en a si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un voisinage $V(a) \subset E$, tel que $\forall x \in V(a)$, on a $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ ceci $\forall f \in A$.

On dit que A est équicontinue si A est équicontinue en tout $a \in E$.

On dit que A est uniformément équicontinue si (E, δ) est métrique et si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $\delta(x, y) < \eta$ alors $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ceci $\forall f \in A$, $\forall x, y \in E$.

Exemples

* La famille de fonctions $A = \{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ avec $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \sin(nx)$, n'est pas équicontinue en 0.

* La famille de fonctions $B = \{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ avec $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \sin(x/(n+1))$ est équicontinue en tout $x \in [0, 1]$. Elle est même uniformément équicontinue.

(En effet, on a $|\sin(x/(n+1)) - \sin(x'/(n+1))| \leq |x - x'|$)

Proposition

1. Si A est équicontinue en a alors $\forall f \in A$, f est continue en a . (La réciproque est fausse)

2. Si A est une famille finie d'applications continues alors A est équicontinue.

3. Si on ajoute une fonction continue à une famille équicontinue, la famille obtenue est équicontinue.

4. La réunion de deux familles équicontinues est une famille équicontinue.

Théorème Soit E un espace topologique séparé, F un espace métrique et F^E qu'on suppose muni de la topologie de la convergence simple. Si $A \subset F^E$ est équicontinue en a , alors $\overline{A}$ est équicontinue en A .

Démonstration On se donne $f \in \overline{A}$ et soit $(f_n)_n$ une suite dans A qui converge simplement vers une fonction f . D'après l'hypothèse, on a $d(f_n(x), f_n(a)) \leq \varepsilon$ si $x \in V(a)$. Par passage à la limite, on déduit que $d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$ si $x \in V(a)$ et donc que $\overline{A}$ est équicontinue.

Corollaire Si une suite d'applications $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f , si $\forall n \in \mathbf{N}, f_n \in A$ où A est une famille équicontinue alors f est continue.

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le théorème d'Ascoli:

Théorème d'Ascoli Soit E un espace métrique compact, $\mathcal{C}(E, F)$ l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme et $A \subset \mathcal{C}(E, F)$. On a l'équivalence:

1. $\overline{A}$ est compact.
2. $\forall x \in A, \overline{\{f(x), f \in A\}}$ est compact et A est équicontinue.

Démonstration Supposons le premier point, et considérons, pour $x \in E$ fixé, l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{C}(E, F) &\longrightarrow F \\ f &\mapsto \phi(f) = f(x). \end{aligned}$$

Cette application est continue pour la topologie de la convergence simple, et donc pour la topologie de la convergence uniforme. On en déduit que la partie $\phi(\overline{A}) = \{f(x), f \in \overline{A}\}$ est compacte dans F qui est séparé, $\phi(\overline{A})$ est donc aussi fermée. Cette partie contient aussi $\{f(x), f \in A\}$ qui est par conséquent compact. Ceci démontre le premier point.

Montrons à présent que A est équicontinue. en tout $x \in E$.

L'espace $\mathcal{C}(E, F)$ étant fermé pour la topologie de la convergence uniforme, A étant une partie de cet espace, son adhérence $\overline{A}$ est aussi contenue dans $\mathcal{C}(E, F)$. Cet espace étant métrique, on peut donc pour tout $\varepsilon > 0$, recouvrir $\overline{A}$ par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon/3$, $B(f_1, \varepsilon/3), \dots, B(f_p, \varepsilon/3)$, où $f_1, \dots, f_p$ sont des éléments de $\overline{A}$. Pour $x \in E$, on a $d(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon/3$ si y appartient à un voisinage convenable $V_i(x)$.

Si on pose $V = \bigcap_{i=1, \dots, p} V_i(x)$, et si $f \in A$, alors $\forall y \in V(x)$, on a $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. En effet, il suffit d'écrire

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y))$$

lorsque $f \in B(f_i, \varepsilon/3)$. Ceci prouve que A est équicontinue en x . x étant quelconque, A est donc équicontinue.

Inversement, montrons que $\overline{A}$ est compact. Pour cela, on se donne une suite $(h_n)_n$ dans A , et on veut montrer qu'elle admet une sous suite convergente (pour la topologie de la convergence uniforme). On peut se ramener à une suite dans A , en choisissant pour chaque n , une fonction $f_n \in A$ telle que $d(h_n, f_n) < 2^{-n}$. Si on montre que la suite $(f_n)_n$ admet une sous suite $(f_{n_p})_p$ convergente, alors la sous suite $(h_{n_p})_p$ sera aussi convergente.

Tout d'abord, puisque (E, δ) est compact, on peut pour tout entier n recouvrir E par des boules $B(x_1^n, 2^{-n}), \dots, B(x_{p_n}^n, 2^{-n})$. Lorsque n parcourt $\mathbf{N}$, les centres de toutes ces boules forment une famille dénombrable $E' = \{x_0, x_1, \dots\}$ qui est dense dans E . Pour x_0 , la suite $(f_n(x_0))_n$ appartient à $\overline{A_{x_0}}$ qui est supposé compact, cette suite admet donc une sous suite convergente $(f_{n_p^0}(x_0))_p$. On considère à présent la suite $(f_{n_p^0}(x_1))_p$ qui appartient elle aussi à un compact, elle admet une sous suite convergente que nous allons noter $(f_{n_p^1}(x_1))_p$. On construit ainsi par récurrence, pour tout l , une famille de sous suite $(f_{n_p^l}(x_l))_p$ avec $(f_{n_p^{l+1}})_p$ sous suite de $(f_{n_p^l})_p$.

La suite diagonale $(f_{n_p^p})_p$ converge simplement sur E' . Si on montre qu'elle converge uniformément sur E , alors on aura exhibé une sous suite qui converge pour la topologie de la convergence uniforme et on aura montré que $\overline{A}$ est compact.

Puisque la famille A est équicontinue en a_i , on a pour tout $f, g \in A$, $d(f(x), f(a_i)) < \varepsilon$ et $d(g(x), g(a_i)) < \varepsilon$ si $\delta(x, a_i) < \eta$. Par compacité de E , on peut recouvrir E par un nombre fini de boules $B(a_i, \eta)$ où les a_i sont des éléments de E' .

Pour tout $x \in E$, il existe un indice i tel que $x \in B(a_i, \eta)$, on écrit alors

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(a_i)) + d(f(a_i), g(a_i)) + d(g(a_i), g(x)).$$

Les a_i étant en nombre fini, si f est assez proche de g pour la topologie de la convergence simple sur E' , on aura $d(f(a_i), g(a_i)) < \varepsilon$ pour tout i et par suite $d(f(x), g(x)) < 3\varepsilon$ pour tout $x \in E$.

Nous avons donc bien obtenu que lorsque f est assez proche de g pour la topologie de la convergence simple sur E' , f est assez proche de g pour la topologie de la convergence uniforme (sur E).

Application La partie $B = \{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ avec $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \sin(x/(n+1))$ est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$. On vérifie aisément les conditions du théorème.

Enoncé du théorème de Stone-Weierstrass.

Nous allons à présent énoncer sans démontrer le théorème de Stone-Weierstrass. On se place dans le cas d'un espace de fonctions définies et continues sur un espace topologique compact à valeurs dans $\mathbf{R}$. Signalons qu'il existe une version du théorème dans le cas où les fonctions sont à valeurs dans l'ensemble des nombres complexes.

Théorème Soit E un espace topologique compact et $A \subset \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ une partie qui vérifie les propriétés suivantes:

* A est une algèbre.

* Pour tous $x, y \in E$, $x \neq y$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

* Pour tout $x \in E$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq 0$,

alors A est dense dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Applications L'algèbre des polynômes est dense dans l'espace des fonctions continues définies sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.