Université Mohammed V-Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2016-17
SMA-S5- Topologie

Série 1

Exercice 1.

Dans $\mathbb{R}^n$, si $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ sont deux éléments, on considère les trois normes définies par:

$$\|x\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2},\ \|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ et } \|x\|_\infty = sup_{i=1,...,n}|x_i|.$$

1. Vérifier que ce sont bien des normes.
2. On dit que deux normes n_1 et n_2 sont comparables s'il existe deux réels a et b srictement positifs tels que

$$an_1(x) \leq n_2(x) \leq bn_1(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que les trois normes précédentes sont comparables deux à deux. On pourra se placer dans $\mathbb{R}^2$ et trouver des réels a et b adéquats.

Exercice 2. Si E désigne l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[-1, 1]$ à valeurs réelles, on définit, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 = sup_{x\in[-1,1]}|f(x)|$. Nous savons que E muni de cette norme est un espace de Banach. On considère le sous-espace $F \subset E$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$. L'objectif est de montrer que F muni de la norme précédente n'est pas complet grâce à un contre exemple.
On définit la suite $(f_n)_n$ dans F par:

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n+1} + x^2}.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction g que l'on précisera.
2. Montrer que la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy (au sens de la norme que l'on a choisie).
3. Conclure que l'espace F n'est pas complet.

Exercice 3. L'objectif de cet exercice est de munir l'espace F de l'exercice précédent d'une nouvelle norme pour laquelle il sera complet.
On pose pour tout $f \in F$, $\|f\|_2 = sup_{x\in[-1,1]}|f'(x)| + |f(0)|$.
1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une norme.
2. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy.
2a. Montrer que la suite des dérivées converge uniformément vers une fonction φ.

2b. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction ψ.
2c. Montrer que φ est la dérivée de ψ puis conclure que l'espace est complet pour cette norme.
On montrera que, pour tout $x_0 \in [-1, 1]$, l'expression

$$\frac{\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)}{h} - \varphi(x_0)$$

tend vers 0 lorsque h tend vers 0, après l'avoir décomposée en utilisant les f_n et les f'_n pour n assez grand.

Exercice 4.

Le but de cet exercice est de construire une application linéaire non continue définie sur un espace vectoriel de dimension, bien entendu, infinie.
On considère l'espace vectoriel E des suites réelles qui sont nulles à partir d'un certain rang. Ainsi si $(u_n)_n \in E$, il existe un entier N tel que $u_n = 0$ si n$\geq N$.
On définit

$$\|u_n\| = sup_n |u_n|.$$

1. Montrer que cette formule définit une norme sur E.
2. Justifier que l'espace E est de dimension infinie.
3. On définit, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(e_{in})_n$ par

$$e_{in} = 0, \text{ si } \ i \neq n \text{ et } e_{ii} = 1.$$

On définit également l'application linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ par $f((e_{in})_n) = i$. Ainsi, si $(u_n)_n \in E$ avec

$$(u_n)_n = \sum_{i=0}^{N-1} u_i (e_{in})_n,$$

on a $\qquad f((u_n)_n) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i i.$

3a. Vérifier que f n'est pas bornée sur la boule unité.
3b. Vérifier également que f n'est pas continue en 0.
3c. Peut on trouver un point où f est continue?