Série # 2

Exercice 1. $L(E, F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E vers F muni de la norme du sup sur la boule unité fermée. On veut montrer que si $L(E, F)$ est complet alors F est complet dans le cas où E est de dimension finie.

1. On suppose d'abord que E est $\mathbf{R}$ et on se donne une suite de Cauchy $(a_n)_n$ dans F . On considère la suite d'applications $(f_n)_n$ dans $L(\mathbf{R}, F)$ définie par $f_n(1) = a_n$.

1a. Justifier que $\|f_n\| = \|a_n\|_F$. (Remarquer que la boule unité de $\mathbf{R}$ est réduite à deux éléments 1 et -1.)

1b. Justifier que $(f_n)_n$ converge vers une limite $f \in L(E, F)$ puis conclure en considérant $f(1)$.

2. Généraliser à un espace E de dimension finie p .

(Si E est un espace vectoriel normé de dimension infinie, on a besoin d'une notion appelée "supplémentaire topologique". Elle implique en particulier que tout sous-espace E_1 de dimension finie de E admet un s.e.v. de E supplémentaire, fermé, noté E_2 tel que $E = E_1 \oplus E_2$ et pour lequel l'application injection $E_1 \hookrightarrow E = E_1 \oplus E_2$ est continue. On peut alors se ramener à la question 1.)

Exercice 2. Soit A une partie d'un espace métrique (E, d) . Montrer que $x \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_n$ de points de A convergente vers x .

Exercice 3. (E, d) désigne un espace métrique. On note $B(a, 1)$ la boule ouverte de centre a et de rayon 1 et $B_f(a, 1) = \{x \in E, d(a, x) \leq 1\}$.

1. Montrer qu'on a $\overline{B(a, 1)} \subset B_f(a, 1)$.

2. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que l'inclusion est stricte en général.

3. Nous voulons à présent montrer que l'inclusion devient une égalité si E est un espace vectoriel normé. Pour cela, nous allons d'abord établir les résultats suivants:

3a. Montrer que si $f : F \rightarrow G$ est une application continue entre deux espaces métriques, alors pour toute partie $A \subset F$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

3b. Montrer que si $f : F \rightarrow G$ est un homéomorphisme alors l'inclusion précédente est une égalité.

3c. On se donne donc un élément $x \in B_f(a, 1)$ et on veut montrer que x est limite d'une suite $(\alpha_n)_n$ de points de $B(a, 1)$. On suppose $d(a, x) = 1$ (le cas $d(a, x) < 1$ étant immédiat) et on suppose dans un premier temps que a vérifie $\|a\| < 1$. Vérifier que la suite $(\alpha_n)_n$ définie par $\alpha_n = \frac{n}{n+1}x$ convient pour n assez grand.

3d. On suppose dans cette question $\|a\| \geq 1$ et on note τ la translation qui

envoie a sur $\frac{a}{2\|a\|}$. En remarquant que τ est un homéomorphisme et en utilisant 3b, conclure.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un homéomorphisme, $\mathbb{R}$ est muni d'une distance d .

On définit une nouvelle distance δ par

$$\delta(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

1. Vérifier que δ est bien une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'elle est topologiquement équivalente à la distance d . C'est à dire que tout ouvert pour d est un ouvert pour δ et inversement.
3. Dédurre que les deux distances suivantes définies par

$$d_1(x, y) = |x - y|, \text{ et } d_2(x, y) = |x^3 - y^3|$$

sont topologiquement équivalentes. Sont elles comparables?

Exercice 5. Soit (E, d) un espace métrique

1. Soient A_1 et A_2 deux parties de E telles que $A_1 \subset A_2$.

1a. Montrer qu'on a $\overset{\circ}{A}_1 \subset \overset{\circ}{A}_2$ et que $\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2$.

1b. Montrer que si A est une partie de E , on a

$$(\overset{\circ}{A})^c = \overline{A^c}, \text{ et } \widehat{A^c} = (\bar{A})^c.$$

2. Soit $(A_i, i \in I)$ une famille de parties de E . On pose $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ et $B = \bigcup_{i \in I} A_i$. Montrer que:

$$\overset{\circ}{A} \subset \bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{A}_i, \text{ et que } \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \subset \bar{B}.$$

Montrer que si I est fini, les inclusions précédentes sont des égalités. A l'aide d'un contre exemple, montrer que les inclusions peuvent être strictes lorsque I est infini.

3. Soit A une partie de E . On rappelle que la frontière de A , notée $Fr(A)$, est définie par:

$$Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}.$$

Montrer que $Fr(\overset{\circ}{A}) \subset Fr(A)$ et que $Fr(\bar{A}) \subset Fr(A)$.

4. Soient A et B deux parties de E . Montrer que $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$. Donner un exemple dans lequel l'inclusion est stricte. Montrer que lorsque $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, on a $Fr(A \cup B) = Fr(A) \cup Fr(B)$.

Exercice 6 (E, d) désignant un espace métrique, on définit une nouvelle distance δ par

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Montrer que les deux distances d et δ sont topologiquement équivalentes.

Exercice 7. Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout $x \in E$ et toute partie non vide $A \subset E$, on pose

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

1. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \bar{A}$, puis que $d(x, A) = d(x, \bar{A})$.

2. Montrer que, pour A fixé, l'application $f : x \mapsto f(x) = d(x, A)$ est continue sur E .

3. Soient A et B deux parties de E . Montrer que $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$ si et seulement si il existe deux ouverts disjoints U et V de E tels que $A \subset U$ et $B \subset V$. (Considérer l'application $(x \mapsto d(x, A) - d(x, B))$)

4. Soient A et B deux fermés disjoints de E . Montrer qu'il existe une application continue $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ égale à 0 sur A et à 1 sur B . En déduire qu'il existe un ouvert U contenant A et un ouvert V contenant B disjoints.

Exercice 8. Suite **exhaustive** de compacts associée à un ouvert.

Dans cet exercice, on se donne $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ et on veut construire une suite $(K_n)_n$ de compacts contenus dans Ω et telle que $K_n \subset K_{n+1}$, $\bigcup_n K_n = \Omega$ et pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe n tel que $K \subset K_n$.

On pose, pour tout $n \geq 1$, $K_n = \{x \in \Omega, d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} \cap B_n$, où B_n désigne la boule de $\mathbb{R}^p$ de centre 0 et de rayon n . Remarquer que les K_n sont tous non vides à partir d'un certain rang.

Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que les K_n conviennent. Expliquer pourquoi on a utilisé l'adjectif "exhaustive".

Exercice 9.

$C([0, 1])$ désigne l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur $[0, 1]$ muni de la distance de la convergence uniforme. Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On rappelle qu'une fonction $f \in C([0, 1])$ est dite k -lipschitzienne si, pour tous x et $y \in [0, 1]$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

1. Montrer que l'ensemble F_k des fonctions k -lipschitziennes est un fermé de $C([0, 1])$.

2. Montrer que l'ensemble F des fonctions lipschitziennes éléments de $C([0, 1])$ est d'intérieur vide.

3. Soit $f \in C([0, 1])$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction affine par morceaux définie par

$$f_n(x) = f(i/n) + (nx - i)(f((i+1)/n) - f(i/n)), \text{ si } x \in [i/n, (i+1)/n], 0 \leq i \leq n-1.$$

Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n \in F$ et que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f . En déduire que F est dense dans $C([0, 1])$.