Chapitre 3: Espaces topologiques

I. Définition et exemples.

Dans le chapitre précédent, nous avons défini les ouverts puis nous avons également caractérisé les points adhérents, les points intérieurs, les applications continues sans faire référence directement à la distance. Toujours dans le cadre des espaces métriques, on peut vérifier que l'ensemble vide et l'ensemble E sont des ouverts, que toute intersection finie d'ouverts est un ouvert, et que toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Ces propriétés seront le point de départ pour généraliser certains résultats précédents à un autre cadre qui sera celui des espaces topologiques. Mais, tout d'abord, nous allons définir ce qu'on entend par une topologie définie sur un ensemble donné E.

Définition. Une **topologie** sur un ensemble E est la donnée d'une famille $\mathcal{O} \subset P(E)$ de parties de E, stable par intersection finie et par réunion quelconque et telle que $\emptyset$ et E appartiennent à cette famille.

Les éléments de la famille $\mathcal{O}$ sont appelés **ouverts**. Ainsi, les ouverts vérifient les axiomes suivants:

Axiomes des ouverts.
1. $\emptyset$ et E sont des ouverts.
2. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
3. Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

Un ensemble E muni d'une topologie est dit **espace topologique.**

Exemples

1. La topologie grossière $\mathcal{O} = \{\emptyset, E\}$.

2. La topologie discrète $\mathcal{O} = P(E)$.

3. Les espaces métriques où un ouvert O est caractérisé par: $\forall x \in O,\ \exists B(x,r) \subset O$.

4. Si E est un espace topologique et $A \subset E$ est une partie de E, on définit une topologie sur A en décidant que tout ouvert de A est la trace d'un ouvert de E, c'est à dire, qu'on considère la famille $\mathcal{O}_A \subset P(A)$

$\mathcal{O}_A = \{O \cap A,\ O \text{ ouvert de } E\}$.

On dit que A muni de cette topologie (induite) est un sous espace topologique.

5. Sur la droite réelle achevée $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ordonnée par $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \leq +\infty$ et $-\infty \leq a$, on définit les ouverts O de $\bar{\mathbb{R}}$ de la manière suivante:

-Si $x \in O \cap \mathbb{R}$, O contient un intervalle centré en x.

- Si $x = +\infty \in O$, O contient un intervalle de la forme $]a, +\infty]$ où $a \in O$ convenable.

- Si $x = -\infty \in O$, O contient un intervalle de la forme $[-\infty, a[$ où $a \in O$ convenable.

Ceci définit bien une topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$. Il découle de cette définition que $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\bar{\mathbb{R}}$, et que c'est un sous espace topologique de $\bar{\mathbb{R}}$.

II. Fermés, voisinages, bases d'ouverts et base de voisinages.

Définition. Une partie d'un espace topologique E est dite fermée si c'est le complémentaire d'un ouvert.

Axiome des fermés.

- Toute intersection quelconque de fermés est un fermé.
- Toute réunion finie de fermés est un fermé.
- $\emptyset$ et E sont des fermés.

Définition. Une partie $V(x) \subset E$ est appelée voisinage de x si elle contient un ouvert O qui contient x.

Remarque. Un ouvert est voisinage de chacun de ses points mais un voisinage n'est pas forcément un ouvert. Par exemple, dans l'espace métrique $\mathbb{R}$ muni de la distance définie à partir de la valeur absolue, $V(1) = [0, 2]$ est un voisinage de 1 mais ce n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

Axiomes des voisinages. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble de tous les voisinages de x. On a les propriétés suivantes:

1. $\forall x \in E$, $\mathcal{V}(x)$ est non vide. et $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$.
2. Si $A \subset E$ est une partie quelconque de E et si A contient un élément de $\mathcal{V}(x)$, alors $A \in \mathcal{V}(x)$.
3. $\mathcal{V}(x)$ est stable par intersection finie.
4. $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists W \subset V$ tel que $\forall y \in W$, $V \in \mathcal{V}(y)$.

Remarque On peut définir une topologie à partir de la donnée d'une famille de fermés vérifiant l'axiome des fermés en décidant qu'un ouvert est le complémentaire d'un fermé. La famille des ouverts ainsi définie vérifie alors les axiomes des ouverts.

De la même manière, on peut le faire à partir des voisinages en décidant qu'un ouvert O est une partie voisinage de chacun de ses points. On vérifie alors que c'est bien une topologie et que, pour cette topologie, les voisinages sont exactement la famille initiale de voisinages.

Définitions On appelle **base d'ouverts** toute sous famille $\mathcal{U}$ de l'ensemble des ouverts $\mathcal{O}$ telle que tout élément $O \in \mathcal{O}$ s'écrive comme réunion d'éléments de $\mathcal{U}$.

On appelle **base de voisinages** ou **système fondamental de voisinages** de x une sous-famille $\mathcal{W}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ telle que

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists W \in \mathcal{W}(x),\ W \subset V.$$

Exemples.

Si E est un espace métrique, les ouverts sont par définition des réunions de boules ouvertes. Par suite, les boules ouvertes constituent une base de voisinages. Les boules ouvertes de rayon rationnel constituent aussi une base de voisinages.

Toujours dans le cadre des espaces métriques, les boules centrées en un élément $x \in E$ et rayon $r_n = 2^{-n}$ constituent un système fondamental de voisinages de x.

Définitions. A étant une partie de E, un point $x \in A$ est dit **intérieur** à A s'il existe un voisinage V de x contenu dans A. On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.

Un point $x \in E$ est **adhérent** à A si tout voisinage de x rencontre A. On note $\bar{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.

On appelle **frontière** de la partie A l'ensemble des éléments qui sont adhérents à la fois à A et à son complémentaire. La frontière de A est notée $\mathrm{Fr}(A)$. On a donc $\mathrm{Fr}(A)=\bar{A} \cap \overline{A^c}$.

Une partie A est dite **dense** dans E si $\bar{A} = E$.

Soient A et B deux parties vérifiant $A \subset B$, on dit que A est **dense dans** B si $\bar{A}$ *contient* B.

Conséquences Comme dans le cas des espaces métriques, on démontre sans trop de peine que $\mathring{A}$ est un ouvert et que c'est le plus grand ouvert contenu dans A, que $\bar{A}$ est un fermé et que c'est le plus petit fermé contenant A.

Définition. Un espace topologique est dit **séparé** s'il vérifie la propriété suivante dite de **Hausdorff**: Deux éléments distincts ont des voisinages respectifs disjoints.

Exemples

- Les espaces métriques sont des espaces séparés. En effet, si x et y sont deux éléments distincts et si $r = d(x, y)$, les boules $B(x, r/2)$ et $B(y, r/2)$ sont des voisinages respectifs disjoints.
- $\mathbb{R}$ et $\bar{\mathbb{R}}$ sont séparés.
- Tout sous-espace d'un espace séparé est séparé.

III. Applications continues.

Définition. Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application. On dit que f est continue en $x \in E$ si $\forall V \in \mathcal{V}(f(x))$, $\exists U \in \mathcal{V}(x)$, tel que $f(U) \subset V$.

Ceci équivaut à $\forall V \in \mathcal{V}(f(x)),\ f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$.

On dit que f est continue sur E si f est continue en tout point de E et f est un homéomorphisme si f est continue sur E, bijective et f^{-1} est continue sur F.

Propriétés.

1. Si $\mathcal{W}(f(x))$ est un système fondamental de voisinages de $f(x)$, alors pour montrer que f est continue en x, il suffit de vérifier le point suivant:$\forall V \in \mathcal{W}(f(x)),\ f^{-1}(V)$ est un voisinage de x.
2. Soient E, F et G trois espaces topologiques, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications continues alors la composée $g \circ f$ est continue.
3. Soit $f : E \to F$ une application, $A \subset E$ une partie et $x \in E$ adhérent à A. Si f est continue en x alors $f(x) \in \overline{f(A)}$. ($f(x)$ est adhérent à $f(A)$ ou autrement écrit $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.)

4. Si $f : E \to F$ est un homéomorphisme, il existe une bijection entre les ouverts de E et les ouverts de F.

Démonstration Nous allons montrer le premier point puis le troisième point.

Si $U \in \mathcal{V}(f(x))$ est un voisinage de $f(x)$, alors U contient un voisinage W appartenant au système fondamental de voisinages $\mathcal{W}(f(x))$. Ainsi, $f^{-1}(U)$ contient $f^{-1}(W)$ et sera donc un voisinage de x.

Pour le troisième point, si A est une partie de E, $x \in E$ tel que $x \in \bar{A}$, montrons qu'on a $f(x) \in \overline{f(A)}$. Soit donc $V(f(x))$ un voisinage quelconque de $f(x)$, f étant continue, $f^{-1}(V(f(x)))$ est un voisinage de x, par conséquent, $f^{-1}(V(f(x))) \cap A \neq \emptyset$. Finalement, il existe $y \in V(f(x)) \cap f(A)$, c'est à dire $f(x) \in \overline{f(A)}$.

Théorème Soit $f : E \to F$ continue, on a équivalence entre:

1. f est continue sur E.
2. $\forall A \subset E$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
3. Pour tout fermé B de l'espace topologique F, $f^{-1}(B)$ est un fermé de E.
4. Pour tout ouvert $O \subset F$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.

Démonstration.

On va montrer $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$. Le point $1 \to 2$ a déjà été établi ainsi que le point $4 \to 1$. On va montrer $2 \to 3$ et $3 \to 4$.

Soit B un fermé de F, d'après 2, $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))}$ et par suite, $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \bar{B} = B$. D'où $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$. $f^{-1}(B)$ est donc fermé.

Supposons le point 3, et soit O un ouvert de F, montrons que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E. Notons A son complémentaire et B celui de O. Cela revient à montrer que A est fermé, or $A = f^{-1}(B)$ et B est fermé par hypothèse d'où le résultat.

Remarque L'image d'un ouvert par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert. Si c'est le cas, on dit que l'application est ouverte. C'est notamment le cas des homéomorphismes.

IV. Comparaison de topologies.

Définition On dit qu'une topologie T_1 définie par une famille de parties $\mathcal{O}_1$ est **moinsfine** qu'une topologie T_2 définie par une famille de parties $\mathcal{O}_2$ si tout élément de $\mathcal{O}_1$ est un élément de $\mathcal{O}_2$, c'est à dire que tout ouvert pour T_1 est un ouvert pour T_2.

Propriétés. Si T_1 est moins fine que T_2, on a:

1. Tout fermé de T_1 est un fermé pour T_2.
2. Tout voisinage pour T_1 d'un élément $x \in E$ est un voisinage de x pour T_2.
3. L'intérieur de A pour T_1 est contenu dans l'intérieur de A pour T_2.
4. L'adhérence de A pour T_1 **contient** l'adhérence de A pour T_2.
5. Si un espace topologique (E, T) est séparé et si T' est une topologie plus fine que celle initialement définie sur E, alors l'espace topologique (E, T') reste séparé.
6. Soit $f : E \to F$ une application continue entre deux espaces topologiques (E, T_1) et (F, T_2). L'application f reste continue si on remplace la topologie de F par une topologie moins fine et la topologie de E par une topologie plus fine.

Démonstration Si F est un fermé pour T_1 alors c'est le complémentaire d'un ouvert pour T_1 qui est aussi un ouvert pour T_2 et par conséquent F est aussi un fermé pour T_2.

Tout voisinage W de x pour T_1 contient un ouvert pour T_1 qui contient x, cet ouvert est aussi un ouvert pour T_2. Ainsi, W est aussi un voisinage de x pour la topologie T_2.

Notons $\mathring{A}_1$ l'intérieur de A pour la topologie T_1 et $\mathring{A}_2$ l'intérieur de A pour la topologie T_2. Soit $x \in \mathring{A}_1$, il existe un ouvert O pour T_1 contenant x et contenu dans A. Comme T_1 est moins fine que T_2, O est aussi un ouvert pour T_2 contenu dans A et donc $x \in \mathring{A}_2$.

Enfin, si $\bar{A}_1$ désigne l'adhérence de A pour la topologie T_1 et $\bar{A}_2$ celle de A pour la topologie T_2, et si $x \in \bar{A}_2$ et O est un ouvert quelconque pour T_1, alors O étant aussi un ouvert pour T_2, O intersecte A. Ainsi, on a bien $x \in \bar{A}_1$.

Les deux derniers points se démontrent par le même raisonnement.

Remarque Dans l'ensemble des topologies définies sur un ensemble E, la relation "être plus fine que" est une relation d'ordre.

Théorème Borne inférieure et borne supérieure de topologies

Soit $\{T_i,\ i \in I\}$ une famille de topologies définies sur un même ensemble E, I étant un ensemble quelconque d'indices.

Dans l'ensemble de toutes les topologies définies sur E, il existe une **borne inférieure** "la plus fine des topologies moins fines que les T_i" et il existe une **borne supérieure** "la moins fine des topologies plus fines que les T_i".

Démonstration

L'ensemble des topologies moins fines que chacune des T_i est non vide car il contient la topologie grossière. Un ouvert pour la borne inférieure des topologies T_i est nécessairement un ouvert pour chaque topologie T_i. On vérifie aisément que ceci définit bien une topologie ($\emptyset$ et E sont des ouverts, stabilité par intersection finie et par union quelconque.) Cette topologie est bien la plus fine des topologies moins fines que chacune des T_i car si O est un ouvert pour une topologie moins fine que chacune des T_i alors O est un ouvert pour chacune de T_i et par suite forcément un ouvert de la topologie borne inférieure.

L'ensemble des topologies plus fines que chacune des T_i est non vide car il contient la topologie discrète. Le bon candidat pour la borne supérieure est donné par sa famille d'ouverts qui est l'intersection de toutes la familles d'ouverts des topologies plus fines que chacune des T_i. Cette topologie borne supérieure est bien plus fine que chacune des T_i et c'est la moins fine de toutes les topologies plus fines que chacune des T_i.

Définition Topologie engendrée par une famille de parties $\{A_k\}$.

Soit $\{A_k, k \in K\}$ une famille de parties de E, on appelle **topologie engendrée** par les A_k la borne inférieure des topologies pour lesquelles les A_k sont des ouverts.

Remarques 1. Dans la topologie engendrée par une famille de parties $\{A_k\}$, les A_k sont des ouverts.

2. Cette topologie borne inférieure doit contenir toutes les intersections finies des parties A_k, ainsi que les réunions quelconques de telles parties. On montre que cette topologie est formée exactement en prenant toutes les intersections finies possibles des A_k puis en prenant les réunions quelconques de toutes les intersections finies précédentes. On doit vérifier que cette famille est à nouveau stable par intersections finies ce qui est vrai! (Voir T.D. série 4.)

Sous espaces topologiques.

Définition Soient E un espace topologique et $A \subset E$ une partie de E. On appelle topologie induite sur A la topologie pour laquelle les ouverts sont les traces sur A des ouverts de E.

O_A est un ouvert de A s'il existe un ouvert O de E tel que $O_A = O \cap A$.

Proposition 1. La famille d'ouverts $\{O \cap A,\ O \text{ ouvert de } E\}$ de A définit bien une topologie sur A.

2. La topolgie induite est la topologie la moins fine rendant continue l'application "injection canonique" $i_A : A \to E$.

Démonstration La première partie ne pose pas de difficultés. Pour le second point, i_A est continue si l'image réciproque de tout ouvert de E est un ouvert de A, ce qui est le cas d'après la définition même d'un ouvert de A. De plus, c'est la moins fine des topologies pour lesquelles i_A est continue car toutes ces topologies doivent admettre les parties de la forme $O \cap A$ comme ouverts, et par conséquent, tout ouvert de la topologie induite est forcément un ouvert pour toute topologie rendant continue l'application i_A. Finalement, la topologie induite est la moins fine de toutes ces topologies.

V. Espaces topologiques produits.

Soit $\{E_i,\ i \in I\}$ une famille d'espaces topologiques et $E = \Pi_{i \in I} E_i$ le produit de ces espaces. On note $p_i : E \to E_i$ la projection canonique sur le facteur E_i.

Définition La **topologie produit** (définie sur E) est celle engendrée par les parties $p_i^{-1}(O_i)$ où O_i est un ouvert quelconque de E_i.

E, muni de cette topologie, est appelé **espace topologique produit.**

Propriété La topologie produit est la topologie la moins fine rendant continues les projections p_i, $i \in I$.

Démonstration C'est la topologie borne inférieure des topologies pour lesquelles les $p_i^{-1}(O_i)$ sont des ouverts. Pour ces topologies, les projections p_i sont continues.

Définition Un **pavé ouvert** est une intersection finie d'éléments de la forme $p_i^{-1}(O_i)$, où O_i est un ouvert de E_i, qui sont appelés pavés élémentaires.

Les pavés ouverts sont donc des ouverts pour la topologie produit. De plus, on peut caractériser les pavés ouverts de E.

Proposition Les pavés ouverts de E sont exactement les parties de la forme $\Pi_i O_i$ où O_i est un ouvert de E_i égal à E_i sauf pour un nombre fini d'indices.

Démonstration Considérons $\Pi_i O_i$, où O_i est un ouvert de E_i égal à E_i sauf pour un nombre fini d'indices, et notons $i_1 < ... < i_k$ ces indices. On a $\Pi_i O_i = p_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap ... \cap p_{i_k}^{-1}(O_{i_k})$ et par suite, il s'agit bien d'un pavé ouvert. Inversement, si on se donne un pavé ouvert $p_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap ... \cap p_{i_k}^{-1}(O_{i_k})$ et x un élément de ce pavé, ceci équivaut à $x \in \Pi_i O_i$ avec $O_i = E_i$ si $i \notin \{i_1, ..., i_k\}$.

Théorème Une partie de $E = \Pi_i E_i$ est ouverte pour la topologie produit si et seulement si elle est la réunion d'une famille quelconque de pavés ouverts.

Démonstration

La topologie produit est la topologie engendrée par les pavés ouverts. Elle doit être stable par intersection finie et par réunion quelconque. Elle contient donc les intersections finies de pavés ouverts et les réunions quelconques de pavés ouverts. Montrons que ce sont les seuls types d'éléments de cette topologie c'est à dire que les ouverts pour cette topologie sont exactement les pavés ouverts et les réunions quelconques de pavés ouverts. En effet, toute intersection finie de pavés ouverts est un pavé ouvert, et toute intersection finie d'une réunion quelconque de pavés ouverts est une réunion de pavés ouverts. Pour voir ceci, il suffit de se convaincre que l'intersection de deux réunions quelconques de pavés ouverts est une réunion de pavés ouverts. L'intersection de deux réunions étant une réunion d'intersections, et l'intersection de deux pavés ouverts étant un pavé ouvert, on a le résultat.

Propriété universelle du produit.

Soit F un espace topologique produit, $E = \Pi_{i \in I} E_i$ un produit d'espaces topologiques muni de la topologie produit , $f : F \to E$ une application donnée et $p_i : E \to E_i$.

f est continue si et seulement si $p_i \circ f$ est continue $\forall i \in I$.

Démonstration

Si f est continue alors $p_i \circ f$ est continue comme composée de deux applications continues. Inversement, supposons $p_i \circ f$ continue $\forall i$, et soit $O \subset E$ un ouvert, c'est une réunion de pavés ouverts et chaque pavé ouvert est de la forme $\Pi_i O_i$ où $O_i = E_i$ sauf pour un nombre fini d'indices. Pour montrer que f est continue, il suffit de montrer que $f^{-1}(O')$ est un ouvert lorsque $O' = \Pi O'_i$ est un pavé ouvert. Notons $i_1, ..., i_k$ les indices pour lesquels $O'_{i_k} \neq E_{i_k}$. On a donc $O'_i = E_i$ pour $i \notin \{i_1, ..., i_k\}$. Il découle de ce qui précède qu'on a l'égalité

$$f^{-1}(O') = \cap_{i \in \{i_1, ..., i_k\}} (p_i \circ f)^{-1}(O'_i).$$

Il s'agit d'une intersection finie d'ouverts. Ceci achève la démonstration.

Produit fini d'espaces métriques.

Soit $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$ n espaces métriques et $E = \Pi E_i$ l'espace produit muni de la distance

$d(x, y) = \max_i d_i(x_i, y_i)$. On a la proposition suivante:

Proposition

La topologie associée à la métrique d est la topologie produit.

Démonstration Soit O un ouvert pour la topologie produit, O est réunion de pavés ouverts, chacun de ces pavés étant une intersection finie de pavés élémentaires. On va montrer que chaque pavé ouvert contient une boule ouverte pour la distance d. Soit donc $U = \Pi_i O_i$ un pavé ouvert et $J = \{i \in I,\ O_i \neq E_i\}$. Pour tout $i \in J$, il existe un réel strictement positif r_i tel que $B(x_i, r_i) \subset O_i$. Si on pose $r = \inf_{i \in J} r_i$ alors $B_d(x, r) \subset U$. Ainsi, la topologie définie par la distance d est plus fine que la topologie produit.

Inversement, soit O un ouvert pour la distance d, montrons qu'il contient un ouvert pour la topologie produit. Soit $x \in O$, O contient une boule ouverte $B_d(x, r)$ pour la distance d. Ainsi, si $x = (x_i)$ et $O_i = \{y_i \in E_i,\ d_i(x_i, y_i) < r_i\}$ alors $\Pi_i O_i$ est un ouvert pour la topologie produit contenu dans $B_d(x, r)$. La topologie produit est donc plus fine que la topologie définie par la métrique d. Il s'agit donc d'une seule et même topologie.

Produit dénombrable d'espaces métriques.

Soit $((E_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques. On remplace, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les métriques d_n par les métriques $\delta_n = \inf\{d_n, 1\}$ (on rappelle que ces métriques sont topologiquement équivalentes). Ceci permet de définir la distance suivante sur le produit E

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i} \delta_i(x_i, y_i).$$

La topologie définie à partir de la distance d est la topologie produit. (Voir T.D.)

Remarque Lorsqu'on a un produit infini non dénombrable d'espaces métriques, la topologie produit n'est pas forcément métrisable, c'est à dire, qu'il n'existe pas forcément de métrique d sur le produit qui donnera une topologie identique à la topologie produit. Ceci ne rentre pas dans le cadre de ce module.

Limite, valeur d'adhérence et applications continues.

Définition On dit qu'une suite $(x_n)_n$ admet la limite $l \in E$, E étant un espace topologique quelconque, si pour tout voisinage de l, $V(l)$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$, $x_n \in V(l)$.

On dit que $\lambda \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si pour tout voisinage $V(\lambda)$ de λ, pour tout entier N il existe un entier naturel n tel que si $n \geq N$, $x_n \in V(\lambda)$.

On peut résumer ce qui précède en disant que l est limite de la suite $(x_n)_n$ ssi tout voisinage de l contient les x_n à partir d'un certain rang et que λ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ ssi pour tout voisinage $V(\lambda)$ de λ, il existe une infinité d'indices n pour lesquels $x_n \in V(\lambda)$.

Remarque Si on munit E de la topologie grossière, alors n'importe quel élément de E est limite de n'importe quelle suite. En particulier, toutes les suites sont convergentes. Ceci peut expliquer le manque d'intérêt pour cette topologie. Ainsi, plus il y a d'ouverts dans la topologie choisie, plus on pourra s'approcher "finement" des éléments de E.

Définition Soit $f : A \subset E \to F$ une application définie sur une partie dense A d'un espace topologique E à valeurs dans un espace topologique F et soit $b \in \bar{A}$. On dit que f admet la limite l quand x tend vers b si pour tout voisinage $V(l)$, il existe un voisinage $V(b)$ de b dans E tel que $f(V(b) \cap A) \subset V(l)$.

Proposition La limite, lorsqu'elle existe, n'est pas nécessairement unique. En revanche, si F est un espace topologique séparé, l'existence d'une limite implique son unicité.

Démonstration En effet, s'il s'agit de la topologie grossière (dans F), tout élément de F est limite. Si F est séparé, supposons l'existence de deux limites distinctes $l_1 \neq l_2$, et prenons des voisinages distinctes $V(l_1)$ et $V(l_2)$, il ne peut existter un voisinage $V(b)$ de b pour lequel $f(V(b) \cap A)$ soit à fois contenu dans $V(l_1)$ et dans $V(l_2)$.

Définition Soit $f : A \subset E \to F$ une application définie sur une partie dense A d'un espace topologique E à valeurs dans un espace topologique F et soit $b \in \bar{A}$. On dit que $\lambda \in F$ est une valeur d'adhérence de f quand x tend vers b si pour tout voisinage $V(\lambda)$, pour tout voisinage $V(b)$ de b dans E, $f(V(b) \cap A) \cap V(\lambda) \neq \emptyset$.

Remarque importante. Dans un espace métrique, si un élément x est adhérent à une partie A, il est possible de construire une suite $(x_n)_n$ de points de A qui converge vers x. Cette propriété n'est plus vérifiée, en général, dans un espace topologique si l'espace topologique n'est pas métrisable, c'est à dire si on ne peut pas définir une distance d pour laquelle une partie est un ouvert pour la topologie si et seulement si elle est ouverte pour la distance d. Voir à ce sujet série 4, exercice 9.

Comme pour les suites, une limite est une valeur d'adhérence et la réciproque n'est pas toujours vraie et on peut montrer la propriété suivante analogue à celle des suites:

Proposition L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une application $f : A \subset E \to F$ en $b \in E$ est

$$\cap_{U \in \mathcal{V}(b)} \overline{f(U \cap A)}.$$

Remarque Les limites et les valeurs d'adhérence des suites sont des cas particuliers des limites et des valeurs d'adhérence des fonctions. Il suffit de remplacer A par $\mathbb{N}$, E par $\bar{\mathbb{R}}$ et b par $+\infty$.

Définition On dit que $f : E \to F$ est continue en $x \in E$ si f admet la limite $f(x)$ en x.

Nous allons donner un théorème de prolongement par continuité qui est valable cette fois-ci dans le cadre plus général des espaces topologiques. Pour cela, on besoin de la définition suivante:

Définition Soit F un espace topologique, on dit que F est **régulier** si F est séparé et si tout point possède un système fondamental de voisinages fermés.

Exemples $\mathbb{R}$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ sont réguliers.

Les espaces métriques sont également des espaces réguliers.

Théorème Soit $g : A \subset E \to F$ une application d'une partie A dense dans E, à valeurs dans un espace topologique régulier F et telle que $\forall x \in \bar{A} = E$, g admet la limite l notée $f(x)$ en x, alors g est prolongeable en une unique application $f : E \to F$ continue.

Démonstration On doit montrer que f est continue en tout $x \in E$. Soit $V(f(x)) \subset F$ un voisinage quelconque de $f(x)$, puisque g admet une limite en x notée $f(x)$, il existe un voisinage $V(x) \subset E$ tel que $g(V(x) \cap A) \subset V(f(x))$. On choisit un voisinage fermé $W(f(x)) \subset V(f(x))$ (ce qui est possible d'après les hypothèses faites sur F), on note $V'(x)$ le voisinage, qu'on choisit ouvert, de x correspondant pour lequel on a $g(V'(x) \cap A) \subset W(f(x))$. Montrons que $\forall y \in V'(x)$, on a $f(y) \in W(f(x))$.

$W(f(x))$ étant fermé, il suffit de montrer que tout voisinage de $f(y)$ intersecte $W(f(x)) = \overline{W(f(x))}$.
Soit donc $V(f(y))$ un voisinage quelconque de y, puisque g admet la limite $f(y)$ en y par définition même de f, il existe un voisinage $V(y)$ tel que $g(V(y) \cap A) \subset V(f(y))$. D'autre part, puisque $V'(x)$ est un ouvert contenant y, c'est également un voisinage ouvert de y et par suite, on a $g(V(y) \cap V'(x) \cap A) \subset V(f(y))$. A étant dense dans E et $V(y) \cap V'(x)$ étant un voisinage de $y \in E$, on a $(V(y) \cap V'(x)) \cap A \neq \emptyset$. L'image $g((V(y) \cap V'(x)) \cap A)$ est aussi non vide et comme elle est incluse dans $W(f(x)) \cap V(f(y))$, cette dernière intersection est également non vide comme on voulait le montrer.

Il existe des espaces topologiques encore plus particuliers que les espaces réguliers, il s'agit des espaces normaux.

Définition Un espace topologique E est **normal** s'il est séparé et si deux parties fermées disjointes ont des voisinages respectifs disjoints.

Exemple Tout espace métrique est normal. (Voir TD: Série 2, exercice 7)

Tout espace régulier est séparé et tout espace normal est régulier. On a une autre caractérisation des espaces réguliers.

Proposition Un espace topologique est régulier si $\forall x \in E$ et $\forall S \subset E$, partie fermée de E, il existe un voisinage $V(x) \subset E$ et un voisinage $V(S)$ de la partie S tels que $V(x) \cap V(S) = \emptyset$.

Limite et valeur d'adhérence dans un espace produit

Soit $F = \Pi_{i \in I} F_i$ un produit d'espaces topologiques et $p_i : F \to F_i$ les projections associées. Soit $A \subset E$ une partie d'un espace topologique, $a \in A$ et $f : A \to F$ une application. On a la proposition suivante:

Proposition $y \in F$ est limite de f en a si et seulement si $\forall i \in I$, $y_i = p_i(y)$ est limite de $p_i \circ f$ en $a \in A$.

De même, $\lambda \in F$ est valeur d'adhérence de f en a alors $\forall i \in I$, $\lambda_i = p_i(\lambda)$ est valeur d'adhérence de $p_i \circ f$ en a.

Mise en garde Si $\forall i \in I$, λ_i est valeur d'adhérence de $p_i \circ f$, $\lambda = (\lambda_i)_i$ peut ne pas être valeur d'adhérence de f comme le montre le contre exemple suivant:

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les deux suites (x_n, y_n) avec $x_n = sin(1/n)$, si n est impair et $x_n = n$ sinon, et $y_n = n$ si n est impair et $y_n = cos(1/(n+1))$ sinon. En effet, 0 est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$, 1 est valeur d'adhérence de $(y_n)_n$ mais le couple $(0, 1)$ n'est pas une valeur d'adhérence de la suite (x_n, y_n)