Université Mohammed V-Rabat
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Filière SMA
Module de topologie
Semestre 5

Cours, exercices et anciens examens avec corrigés.

Hamza BOUJEMAA

Table des matières:

Appendices

Introduction

Ce polycopié est issu du cours de topologie enseigné à la faculté des sciences de Rabat dans le cadre de la licence de mathématiques de l'automne 2014 à celui de 2022.

Le contenu du module de topologie enseigné en semestre 5 ne peut constituer un exposé complet étant donné le nombre d'heures de cours alloué. Cependant, il constitue une introduction à la topologie générale. Avant de définir les espaces topologiques, on se place dans un cadre particulier important qui est celui des espaces métriques où les ouverts et les voisinages peuvent être mieux intégrés grâce à la notion de distances et de boules. Vu le temps imparti, les semi normes ainsi que les topologies associées n'apparaissent pas dans cet exposé. Par contre, avant de parler des espaces métriques, on introduit un cas particulier important qui est celui des espaces vectoriels normés. Cela permettra aussi de définir les espaces de Banach qui seront utiles notamment pour le module de calcul différentiel.

La continuité des applications, les espaces compacts ainsi que le théorème de Bolzano Weierstrass constituent l'essentiel de l'exposé. Le calendrier ne laissant pas de temps pour étudier le théorème d'Ascoli et étant donné son importance en analyse fonctionnelle, nous introduisons ce résultat en appendice.

Mis à part le premier chapitre, tous les autres s'inspirent du livre "Topologie" de G. Chirstol, A. Cot et C-M. Marle qui contient aussi un bon nombre d'exercices dont une partie sera traitée en travaux dirigés.

A la fin de ce polycopié, le lecteur trouvera une série d'exercices corrigés et une collection d'anciens examens avec corrigés assez détaillés clôt ce travail.

Bien qu'un soin particulier ait été apporté à la rédaction des notes de cours, des erreurs ou imprécisions peuvent subsister. L'auteur espère qu'elles seront peu nombreuses, tous les commentaires et remarques étant les bienvenus.

Chapitre 1: Rappels et compléments.

I. Espaces vectoriels normés. Espaces de Banach.

Dans tout ce qui suit E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme c'est à dire d'une application notée

$$\|.\| \ : \ E \to \mathbb{R}_+,$$

et vérifiant:

a. $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

b. $\|kx\| = |k|\|x\|$ pour tout $k \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et tout $x \in E$.

c. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous x et $y \in E$.

Exercices: 1. Vérifier que, dans $\mathbb{R}^n$, l'expression $\|(x_1, ..., x_n)\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n {x_i}^2}$ définit bien une norme. Faire de même pour les deux autres normes de $\mathbb{R}^n$, $\|(x_1, ..., x_n)\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = sup_{i=1,...,n}|x_i|$.
2. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des applications définies, continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\| = sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Vérifier qu'il s'agit bien d'une norme.

Nous pouvons alors associer une application appelée distance notée d et définie par

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ pour tous } x \text{ et } y \in E.$$

Nous considérerons qu'une application f de E vers F (F étant un autre espace vectoriel normé) est continue quand $d(f(x), f(y))$ tend vers 0 lorsque $d(x, y)$ tend vers 0.

La définition d'une suite de Cauchy dans E est la même que dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$ c.a.d. qu'une suite d'éléments $(x_n)_n$ de E est dite de Cauchy si

$$\forall\epsilon > 0 \ , \exists N \in \mathbb{N} \text{tel que } \forall n \geq N \text{ et } p \geq 0, \ d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon.$$

On dira que E est un espace de Banach (ou un espace vectoriel normé complet) si toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E.

Exemples

-$I\!R$ muni de la norme valeur absolue est un espace de Banach.(On rappelle qu'on démontre que toute suite de Cauchy est bornée puis qu'elle possède forcément une seule valeur d'adhérence et qu'enfin la suite est convergente vers cette valeur qui est par conséquent sa limite.)

-$I\!R^n$ muni de la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2}$ est un espace de Banach. (On vérifie que si $(x_p)_p$ est de Cauchy dans $I\!R^n$, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, la suite formée par la i^{eme} composante notée $({x^i}_p)_p$ est de Cauchy dans $I\!R$ et par conséquent convergente dans $I\!R$. On déduit alors aisément que $(x_p)_p$ est convergente dans $I\!R^n$.

- On note $E = \mathcal{C}([a,b], I\!R)$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur l'intervalle fermé, borné $[a,b]$ et à valeurs dans $I\!R$. On le munit de la norme du sup:

$$\|f\| = sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

On remarquera qu'elle est bien définie et que c'est bien une norme. On peut montrer que cet espace est complet, voir série 1.

- On peut généraliser en posant $E = \mathcal{C}_b(X, I\!R)$, espace des fonctions définies, bornées et continues sur X, espace vectoriel normé quelconque, à valeurs réelles et

$$\|f\| = sup_{x\in X}|f(x)|.$$

-On peut se placer dans un cadre plus général en considérant $E = \mathcal{C}_b(X, F)$ où F est un espace de Banach. (Ce qui garantira l'existence d'une limite pour toute suite $(f_n(x))_n$ lorsque que x est un élément quelconque fixé dans X et l'idée de la démonstration est analogue à la pécédente.)

On notera que les derniers exemples donnés sont des espaces de Banach de dimension infinie.

A présent, nous allons étudier la continuité des applications linéaires entre espaces de Banach.

II. Applications linéaires continues.

Théorème Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f:\ E \to F$ une application donnée. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes:

a. f est continue.

b. f est continue en 0.

c. Il existe une constante M strictement positive telle que

$$\|f(x)\| \leq M \text{ pour tout } \ x \in E \text{ vérifiant} \|x\| \leq 1.$$

Autrement dit, f est bornée sur la boule unité. Cette propriété est équivalente à

$$\exists M > 0, \text{telle que } \forall x \in E\ ;\ \|f(x)\| \leq M\|x\|.$$

Démonstration Il est clair que a) implique b). Montrons que b) implique c).

Pour $\epsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que pour $\|x\| < \delta$ on a $\|f(x)\| < \epsilon$. En particulier, pour $\epsilon = 1$, si $\|x\| < r$ alors $\|f(x)\| < 1$. On aura donc $\|f(x)\| < \frac{1}{r}$ si $\|x\| < 1$. Ainsi, f est bornée sur la boule unité.

Pour l'implication de c) vers a), on remarque d'abord que si $x \in E$ est non nul, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, par suite, en utilisant c) et la linéarité de f, on aura $\|f(x)\| \leq M\|x\|$. A nouveau, via l'argument de linéarité, on aura

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| < M\|x-y\|.$$

Ce qui signifie la continuité de f en tout x.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E vers F et on le munit de la norme

$$\|f\| = sup_{\|x\|\leq 1}\|f(x)\|.$$

On a la proposition suivante dont la démonstration est facile et laissée en exercice:

Proposition 1. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\|f\|$ vérifie $\|f(x)\| \leq \|f\|\|x\|$ et c'est le plus petit des réels M vérifiant $\|f(x)\| \leq M\|x\|$.
2. Il s'agit bien d'une norme!

Théorème Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Démonstration On se place sur la boule B_r fermée de E de centre 0 et de rayon $r > 0$ et on considère $\mathcal{C}_b(B_r, F)$. Nous avons vu que c'est un espace de Banach, par conséquent, si $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$ et si $(g_n)_n$ désigne la suite des restrictions des f_n à B_r, (g_n) est une suite de Cauchy dans l'espace complet $\mathcal{C}_b(B_r, F)$ (muni de la norme du sup), elle converge donc vers une certaine limite g appartenant à $\mathcal{C}_b(B_r, F)$, ceci étant vrai pour tout $r > 0$. Cette limite est continue. Ceci étant vrai pour tout $r > 0$, on a alors l'existence d'une limite notée f dans $\mathcal{L}(E, F)$ et telle que la restriction de f à B est g. (Voir l'appendice 1 pour les étapes détaillées.)

Isomorphismes d'espaces vectoriels normés.

Définition. Un isomorphisme d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F est une application linéaire, bijective, continue dont l'inverse est également linéaire et continue.

Remarques 1. Si une application est bijective est linéaire, alors son inverse est également linéaire.
2. Si une application est un homéomorphisme linéaire, alors c'est un isomorphisme linéaire.

Les deux points sont faciles à établir. Par contre, une autre implication résulte d'un théorème beaucoup plus difficile à démontrer que nous allons simplement énoncer:

Théorème Si $f : E \to F$ est une application entre deux espaces de Banach linéaire, bijective et continue, alors c'est un isomorphisme d'espaces de Banach.

Définition On appelle isométrie toute application bijective, linéaire f vérifiant
$$\|f(x)\| = \|x\|.$$
Conséquence Toute isométrie est continue et est un isomorphisme.

La réciproque est évidemment fausse. Il suffit de considérer les homothéties.

III. Normes équivalentes.

Définition ρ_1 et ρ_2 désignent deux normes sur un espace vectoriel normé E. Elles sont dites équivalentes si l'application

$$\text{Id}: \ (E, \rho_1) \to (E, \rho_2) \text{ est bicontinue.}$$

Comme conséquence directe de la caractérisation de la continuité d'une application linéaire, on a le résultat suivant:

Proposition Elles sont équivalentes si et seulement si il existe deux constantes m et M strictement positives telles que

$$m\rho_1(x) \leq \rho_2(x) \leq M\rho_1(x), \text{ pour tout } x \in E.$$

Il s'avère qu'en dimension finie, toute les normes sont équivalentes. Pour cela, nous allons d'abord établir ce résultat dans le cas de $\mathbb{R}^n$.

Proposition Dans $I\!R^n$, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration Nous allons montrer que toute norme ρ sur $I\!R^n$ est équivalente à la norme euclidienne. Si ρ est une norme sur $I\!R^n$, alors elle est continue. En effet, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x - y),$$

et en posant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, on aura d'après les propriétés d'une norme

$$\rho(x - y) \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \rho(e_i).$$

Ainsi, quand x tend vers y, alors les x_i tendent vers les y_i et par suite $|\rho(x) - \rho(y)|$ tend vers 0. Ceci signifie que ρ est continue et que par suite elle est bornée sur la sphère unité fermée. Il existe donc deux constantes strictement positives m et M vérifiant

$$m \leq \rho(x) \leq M.$$

On aura donc bien

$$m\|x\| \leq \rho(x) \leq M\|x\| \text{ pour tout} x \in E,$$

ρ et $\|.\|$ sont bien équivalentes.

Nous déduisons le résultat suivant

Corollaire Soit E un espace vectoriel normé et $f : I\!R^n \to E$ une application linéaire et bijective, alors f est un isomorphisme.

Démonstration Si ρ désigne la norme sur E, $\rho \circ f$ est une norme sur $I\!R^n$ (à vérifier!). Puisque toutes les normes sur $I\!R^n$ sont équivalentes, il existe donc deux constantes m et M strictement positives telles que

$$m\|x\| \leq \rho \circ f(x) \leq M\|x\|.$$

Une des inégalités précédentes prouve que f est continue, l'autre montre que f^{-1} l'est aussi.

Nous pouvons à présent énoncer le résultat qui règle la question de la continuité des applications linéaires quand la dimension est finie.

Théorème Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, alors E est un espace de Banach et toute application linéaire $f : E \to F$, où F est un espace vectoriel normé est continue.

Démonstration Montrons d'abord que E est complet et considérons une suite de Cauchy $(x_n)_n$ dans E. La dimension étant finie, il existe une application linéaire bijective $g : I\!R^n \to E$, et d'après ce qui précède, g est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés. Il admet donc une application réciproque linéaire et continue $h : E \to I\!R^n$. Il existe alors une constante M strictement positive telle que

$$\|h(x_n) - h(x_p)\| \leq M\|x_n - x_p\|.$$

Ceci justifie que la suite $(h(x_n))_n$ est de Cauchy dans $I\!R^n$, elle converge donc vers une certaine limite l, et la continuité de g prouve que $x_n = g \circ h(x_n)$ converge vers $g(l)$. Par suite, E est un espace de Banach.
Soit maintenant $f : E \to F$ une application linéaire, si on montre que $\varphi = f \circ g$ est continue, alors $f = \varphi \circ g^{-1}$ sera continue. Or, l'application φ est continue car elle est continue en 0. En effet, si $(x_1, ..., x_n)$ désigne un élément quelconque de $I\!R^n$, et $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canonique de $I\!R^n$, alors $\varphi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i\varphi(e_i)$ et ceci explique que quand $(x_1, ..., x_n)$ tend vers 0 alors $\varphi(x_1, ..., x_n)$ tend aussi vers 0.

Deux cas particuliers de $\mathcal{L}(E, F)$

- Si E est $I\!R$, alors $\mathcal{L}(I\!R, F)$ s'identifie à F par un isomorphisme naturel qui est une isométrie de la manière suivante: A tout élément $y \in F$, on associe l'application $\varphi_y \in \mathcal{L}(I\!R, F)$ définie par

$$\varphi_y : I\!R \to F$$

$$\lambda \mapsto \lambda y.$$

Il est alors facile de se convaincre qu'on a $\|\varphi_y\| = \|y\|$.
On a donc une application

$$\phi : \mathcal{L}(I\!R, F) \to F$$

$$\varphi \mapsto \varphi(1),$$

ou ce qui revient au même une application

$$\psi = \varphi^{-1} : F \to \mathcal{L}(I\!R, F)$$

$$y \mapsto \varphi_y,$$

et ϕ vérifie $\|\phi\| = 1$.(ψ aussi!)
- Si F est $I\!R$, $\mathcal{L}(E, I\!R)$ est l'espace des formes linéaires continues appelé aussi dual topologique.

IV. Le groupe $Iso(E, E)$ et l'application $u \mapsto u^{-1}$.

Dans l'optique d'étudier l'existence de certains inverses, nous avons besoin de rappeler des résultats sur les séries convergentes dans les espaces de Banach.

Définition Soit $(u_n)_n$ une suite dans un espace de Banach E. On dit que la série $\sum u_n$ est normalement convergente si la série $\sum \|u_n\|$ est convergente dans $I\!R$.

Théorème Si une série est normalement convergente, alors elle est convergente.

Démonstration Ceci se justifie par l'inégalité

$$\|\sum u_n\| \leq \sum \|u_n\|.$$

et donc le fait d'être de Cauchy pour l'une dans $I\!R$ implique que l'autre est aussi de Cauchy mais cette fois-ci dans l'espace E qui est de Banach.

Nous avons les deux propositions suivantes

Proposition Si E est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, E)$ est de Banach et si $u \in \mathcal{L}(E, E)$ est tel que $\|u\| < 1$, alors $1 - u$ est inversible.

Démonstration Le premier point a déjà été établi précédemment.
Soit u tel que $\|u\| < 1$. La série $\sum u_n$ où $u_n = u^n = u \circ u \circ ... \circ u$, n fois, est convergente car elle est normalement convergente. Cela résulte de l'inégalité

$$\|u^n\| \leq \|u\|^n$$

et si on pose $v = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$ alors v vérifie

$$uv = vu = \sum_{n=1}^{\infty} u^n.$$

Par suite, $Id = v - uv = (Id - u)v = u = v - vu = v(Id - u)$ ce qui prouve que $1 - u$ est inversible.

Proposition 1. $Iso(E, E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E, E)$. (E est supposé de Banach)
2. L'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue.

Démonstration Pour montrer qu'il s'agit d'un ouvert, il suffit de montrer que $u_0^{-1}u$ est un inversible si u est proche de $u_0 \in Iso(E, E)$. D'après le résultat précédent, il suffit de vérifier que $\|1 - u_0^{-1}u\| < 1$ si u est suffisamment proche de u_0.
Or $1 - u_0^{-1}u = u_0^{-1}(u_0 - u)$, d'où en passant aux normes

$$\|1 - u_0^{-1}u\| \leq \|u_0^{-1}\|\|u_0 - u\|.$$

Ainsi si on suppose $\|u_0 - u\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$, alors on aura $u_0^{-1}u$ inversible et par suite u inversible.
Pour l'autre point, on pose $u = u_0(1 - v)$ avec $\|v\| < 1$. On a $u^{-1} = (1 - v)^{-1}u_0^{-1}$, d'où on déduit

$$\|u_0^{-1} - u^{-1}\| \leq \frac{\|v\|}{1 - \|v\|} \qquad (*)$$

et quand u tend vers u_0, v tend vers 0 ($v = 1 - u_0^{-1}u$ donc $\|v\| \leq \|u_0^{-1}\|\|u_0 - u\|$) et, en vertu de (*), u^{-1} tend vers u_0^{-1}. D'où la continuité.

On montre, dans un cours de calcul différentiel, que cette application est même $\mathcal{C}^\infty$ et on peut donner sa différentielle en tout point de $Iso(E, E)$.

Pour finir ces rappels et compléments, nous allons étendre des notions vues dans le cadre linéaire au cadre multilinéaire.

V. Applications multilinéaires continues

Dans ce qui va suivre $E_1, ..., E_n$, F sont des espaces vectoriels normés et une application $f : E_1\text{x}...\text{x}E_n \to F$ est dite multilinéaire si elle est linéaire par rapport à chaque variable. Nous allons caractériser les applications multilinéaires continues.

Proposition Il y a équivalence entre les trois affirmations suivantes:
a) f est continue.
b) f est continue en zéro.
c) f est bornée sur le produit des boules unités, c'est à dire, il existe une constante M strictement positive telle que $\|f(x_1, ..., x_n)\| \leq M$ pour tous $\|x_1\| \leq 1$,...,$\|x_n\| \leq 1$.

La démonstration est similaire à celle établie dans le cas linéaire en apportant les traductions qui s'imposent.

Si on pose $\|f\| = sup_{\|x_1\|\leq 1,...,\|x_n\|\leq 1}\|f(x_1,...,x_n)\|$, on vérifie que $\|f\|$ est le plus petit des réels positifs M vérifiant $\|f(x_1,...,x_n)\| \leq M$ pour tous $\|x_1\| \leq 1$,...,$\|x_n\| \leq 1$ et on vérifie que ceci définit une norme sur $\mathcal{L}(E_1$x...x$E_n, F)$ (ensemble des applications multilinéaires continues)

Exemple d'applications bilinéaires: La composée..

On considère l'application

$$\phi : \mathcal{L}(F,G)\text{x}\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(E,G)$$

$$(g,f) \mapsto g \circ f.$$

Comme $\|\phi(g,f)\| = \|g \circ f\| \leq \|g\|\|f\|$, ϕ est donc continue et sa norme est inférieure ou égale à 1.

L'isométrie naturelle $\mathcal{L}(E\mathbf{x}F,G) \simeq \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$.

L'isométrie est donnée par

$$\psi : \mathcal{L}(E\text{x}F,G) \to \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$$

$$f \mapsto \psi(f)$$

avec $\psi(f)(x)$, pour $x \in E$, est l'élément de $\mathcal{L}(F,G))$ défini pour tout $y \in F$ par $\psi(f)(x)(y) = f(x,y)$. Il est facile de vérifier que $\|\psi(f)\| = \|f\|$ et que par suite, $\|\psi\| = 1$.

Chapitre 2: Espaces métriques.

I. Définition et exemples d'espaces métriques.

Définition. Un espace métrique est un ensemble E sur lequel on a défini une **distance**, c'est à dire une application $d : E\mathrm{x}E \to I\!R_+$ qui vérifie, pour tous x, y et $z \in E$

$d(x,y) = d(y,x)$ symétrie

d(x,y)$\leq d(x,z) + d(z,y)$ inégalité triangulaire

$d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

L'espace métrique constitué par l'ensemble E muni de la distance d est noté (E,d)

Conséquence utile. $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$.

Exemples.

a. La droite réelle $I\!R$ avec $d(x,y) = |x - y|$.

b. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes avec $d(z,z') = |z - z'|$.

c. **Distances associées bornées.** Soit (E,d) un espace métrique. Pour tout x, $y \in E$, on définit

$$d'(x,y) = Arctan(d(x,y)),\ d"(x,y) = inf(d(x,y),1)$$
$$\text{et}\ \ d'''(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}.$$

Ces formules définissent trois distances bornées. d' est à valeurs dans $[0, \frac{\pi}{2}[$ tandis que $d"$ et d''' sont à valeurs dans $[0,1]$.

d. L'espace $I\!R^n$ peut être muni de la distance d_1 avec $d_1(x,y) = \Sigma_{i=1}^n |x_i - y_i|$, de la distance d_2 avec $d_2(x,y) = \sqrt{\Sigma_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

(distance euclidienne) ou de la distance d_∞ avec $d_\infty(x,y) = max_{1\leq i\leq n}|x_i - y_i|$, où on a noté $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$.

e. **Espace métrique produit.** Soit (E_i, d_i), $1 \leq i \leq n$ une famille finie d'espaces métriques. Si $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ sont deux éléments du produit E_1x...xE_n, la formule

$$d(x,y) = max_{1\leq i\leq n} d_i(x_i, y_i)$$

définit une distance sur le produit.

Si on a un produit dénombrable d'espaces métriques ($i \in I\!N$), la formule annoncée dans le cas d'un produit fini peut donner une valeur infinie. On propose alors

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} Arctan(d_i(x_i, y_i))$$

qui est bien une distance.

f. **Distance sur un espace de fonctions.** Soit $C(I, I\!R)$ l'ensemble des fonctions continues, définies sur un intervalle fermé et borné I, à valeurs réelles. Pour $x, y \in C(I, I\!R)$, on pose

$$d(x,y) = max_{t\in I}|x(t) - y(t)|.$$

On l'appelle distance de la convergence uniforme sur $C(I, I\!R)$. On peut bien entendu définir d'autres distances sur $C(I, I\!R)$.

II. Boules, parties bornées, parties ouvertes, parties fermées, voisinages.

Définitions. L'ensemble $B(a,r) = \{x \in E;\ d(a,x) < r\}$ est appelé **boule ouverte** de centre a et de rayon r.
L'ensemble $B_F(a,r) = \{x \in E;\ d(a,x) \leq r\}$ est appelé **boule fermée** de centre a et de rayon r.
Une partie F de l'espace métrique (E,d) est dite **bornée** si elle est contenue dans une boule.

Conséquence. On établit que si $F \subset E$ est une partie bornée alors, pour tout point $a \in E$, il existe une boule de centre a qui contient F.

En effet, si F est bornée, alors F est contenue dans une boule convenable $B(x_0, r_0)$. Si $a \in F$, la boule $B(a, d(a, x_0) + r_0)$ contient F.

Définition. Le **diamètre** d'une partie F de E est donné par la formule

$$\delta(F) = sup_{x,y \in F} d(x, y).$$

Proposition. Une partie F est bornée si et seulement si son diamètre est fini.

Démonstration. Si $\delta(F)$ désigne le diamètre de F alors, pour tout $a \in F$, la boule $B(a, \delta(F) + 1)$ contient F. Inversement, si F est bornée alors F est contenu dans une certaine boule $B(a, r)$ et on vérifie qu'on a $\delta(F) < 2r$.

Définition. Une partie O de (E, d) est dite **ouverte** si elle est réunion d'une famille de boules ouvertes. Dans ce cas, O est appelé **ouvert** de E.

Exemples. Une boule ouverte est un ouvert, la partie vide est un ouvert et enfin l'ensemble E est aussi un ouvert.

Proposition. Une partie O est un ouvert si et seulement si tout point de O est le centre d'une boule contenue dans O.

Démonstration. Si $x \in O$ alors x appartient à une certaine boule $B(x_0, r_0)$, et on vérifie alors que la boule $B(x, r_0 - d(x_0, x))$ est contenue dans la boule $B(x_0, r_0)$ et par conséquent contenue dans O. Inversement, On a

$$O = \cup_{x \in O} B(x, r_x),$$

où r_x est un réel convenable dépendant de x.

Définition. Une partie F est dite **fermée** si son complémentaire est un ouvert. Dans ce cas, on dit que F est un **fermé** de (E, d).

Exemple. La boule fermée $B_F(a, r)$ est un fermé. Pour montrer cela, il suffit de vérifier que le complémentaire est un ouvert.(Exercice)

Définition. Une partie V de E est un **voisinage** d'un point $a \in E$ si V contient un ouvert qui contient a.

Intérieur. Adhérence.

Soit A une partie de E, on a les définitions suivantes:

Définition. Un point $a \in E$ est **intérieur** à A si A est un voisinage de a. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et est noté $\mathring{A}$.
On a la proposition suivante:

Proposition. L'intérieur de A est un ouvert contenu dans A. De plus, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Démonstration. Soit x_0 un point intérieur à A, il existe alors une boule centrée en x_0 et de rayon r_0 convenable contenue dans A. Tout élément α de cette boule est aussi un point intérieur car la boule de centre α et de rayon $r_0 - d(x_0, \alpha)$ est aussi contenue dans A. L'intérieur de A est donc bien un ouvert.
Montrons que tout autre ouvert $\mathcal{O}$ contenu dans A est aussi contenu dans l'intérieur de A. Si $x \in \mathcal{O}$, alors il existe une boule ouverte convenable centrée en x et contenue dans $\mathcal{O}$ car ce dernier est un ouvert. Cette boule est aussi contenue dans A. x est donc un point intérieur.

Définitions. Un point $a \in E$ est dit **adhérent** à A si tout voisinage de a rencontre A. L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'adhérence de A et est noté $\bar{A}$.

On a la proposition suivante dont la démonstration est laissée en exercice.

Proposition. $\bar{A}$ est un fermé contenant A. De plus, c'est le plus petit fermé contenant A.

III. Applications continues.

Définitions. Une application f d'un espace métrique (E, d) vers un espace métrique (F, δ) est **continue** en $a \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in E$ vérifiant $d(x, a) \leq \eta$ on ait $\delta(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$.

Si f est continue en tout point de E, on dit que f est continue sur E.

Un **homéomorphisme** est une application entre deux espaces métriques qui est continue, bijective et dont l'inverse est continue.

Une **isométrie** entre deux espaces métriques est une application qui conserve les distances, c'est à dire qui vérifie $\delta(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Proposition. Une isométrie est toujours injective et continue. Si de plus elle est surjective alors son inverse est aussi une isométrie.

Exemple. Distance d'un point à une partie non vide.

Soit $A \subset E$ une partie non vide. On définit

$$d(x, A) = inf_{y \in A} d(x, y).$$

On peut établir l'inégalité

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Ceci montre que l'application $f : E \to I\!R$ définie par

$$f(x) = d(x, A)$$

est lipschitzienne donc continue.

On a les propriétés caractéristiques suivantes:

Propriété 1. Une application $f : E \to F$ est continue, si et seulement si pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.

Démonstration. Soit O un ouvert de F, on suppose $f^{-1}(O)$ non vide et soit $x \in f^{-1}(O)$. On sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x), \varepsilon) \subset O$, et puisque f est continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que $f(B(x, \eta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. Par conséquent, on a $B(x, \eta) \subset f^{-1}(O)$ qui est donc un ouvert de E.

Inversement, si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert, si on se donne un élément $x \in E$ quelconque et $B(f(x), \varepsilon)$ une boule quelconque centrée en $f(x)$, comme cette boule est un ouvert, son image réciproque $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ est aussi un ouvert. Il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que $B(x, \eta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Ceci implique qu'on a : $f(B(x, \eta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$ et que f est continue en x.

Propriété 2. Une application $f : E \to F$ est continue en $a \in E$, si et seulement si pour tout voisinage V de $f(a)$ dans F, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a dans E.

Démonstration. Si f est continue et V est un voisinage d'un élément $f(a)$ dans F, montrons que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a. Par définition, V contient un ouvert O qui contient $f(a)$ et d'après la propriété précédente, $f^{-1}(V)$ est un ouvert contenant a et contenu dans $f^{-1}(V)$ qui est donc un voisinage de a. La réciproque ne pose pas de difficultés particulières.

Certaines distances pouvant être plus pratiques que d'autres, on aimerait pouvoir en changer sans altérer la continuité des applications et donc en conservant les mêmes ouverts. On parle alors de distances topologiquement équivalentes:

Définition. Deux distances sont **topologiquement équivalentes** si tout ouvert pour l'une est aussi ouvert pour l'autre.

Proposition. Deux distances d_1 et d_2 définies sur E sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application $Id : (E, d_1) \to (E, d_2)$ est un homéomorphisme.

Remarque. Lorsque deux distances sont topologiquement équivalentes, on dit que les topologies, au sens voisinage approchant un point, sont les mêmes.

Distances comparables.

Définition. Deux distances d_1 et d_2 sont **comparables** s'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ vérifiant

$$\alpha\, d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta\, d_1(x, y).$$

Proposition. Deux distances comparables sur un ensemble sont topologiquement équivalentes.

Exemples. Sur $I\!R$, les deux distances $d(x, y) = |x - y|$ et $d'(x, y) = |x^3 - y^3|$ sont topologiquement équivalentes mais ne sont pas comparables. Plus généralement, on a le résultat suivant dont la démonstration est laissée en exercice (voir T.D.):

Exercice. Soit $f : I\!R \to I\!R$ un homéomorphisme, d_1 une distance quelconque sur $I\!R$ et d_2 la distance définie sur $I\!R$ par

$$d_2(x, y) = d_1(f(x), f(y)).$$

Montrer que les distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes.

On peut aussi montrer que les trois distances bornées d', d'' et d''' définies précédemment à partir d'une distance d sont topologiquement équivalentes à d mais ne lui sont pas forcément comparables.

Sur $I\!R^n$, les trois distances d_1, d_2 et d_∞ sont comparables et donc topologiquement équivalentes.

IV. Topologie des espaces métriques.

Nous allons, dans ce paragraphe, étudier l'utilisation des suites pour caractériser en particulier les applications continues, les points adhérents et les parties fermées, puis nous introduirons la notion d'espaces métriques compacts ainsi que leur caractérisation grâce au théorème de Bolzano Weierstrass.

Dans le paragraphe précédent, nous avons donné la définition d'une application continue f entre deux espaces métriques (E, d) et (F, δ). Nous allons préciser cette définition dans le cas où $E = E_1 \mathrm{x} E_2$ est un produit d'espaces métriques (E_1, d_1) et (E_2, d_2) muni de la distance $\hat{d}$ définie par

$$\hat{d}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

Soit donc $f : E = E_1 \mathrm{x} E_2 \to F$ et $(x_1, x_2) \in E$, f est continue en (x_1, x_2) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ d_1(x_1, y_1) < \eta, \text{ et } d_2(x_2, y_2) < \eta, \text{ on a } \ \delta(f(x_1, x_2), f(y_1, y_2)) < \varepsilon.$$

Cette définition s'étend au cas d'un produit fini d'espaces métriques.

Exemples. Soit (E, d) un espace métrique alors la distance $d : E \mathrm{x} E \to I\!R_+$ est une application continue. En effet, cela résulte de l'inégalité

$$|d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| \leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) \leq 2\hat{d}((x_1, x_2), (y_1, y_2)).$$

Utilisation des suites.

On dit qu'une suite de points (x_n) de E **tend vers** le point $a \in E$ si $d(x_n, a)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Proposition: Caractérisation des points adhérents. $a \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite (x_n) de points de A qui tend vers a. (Voir T.D.)

Proposition: Caractérisation des parties fermées. Une partie A de E est fermée si et seulement si toute suite de points de A convergente (dans E) est convergente dans A. (La limite appartient à A.)

Démonstration. Si A est fermée et $(x_n)_n$ est une suite dans A qui converge vers une limite $l \in E$, cette limite appartient forcément à A. Par l'absurde, sinon l appartient au complémentaire A^c de A, qui est un ouvert et il existe une boule $B(l, r) \subset A^c$. On aurait $d(x_n, l) \geq r$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit la convergence vers l. Inversement, soit $\alpha \in \bar{A}$. D'après la proposition précédente, il existe une suite $(x_n)_n$ dans A qui converge vers α. Par hypothèse, α doit appartenir à A qui est donc fermée.

Suites et limites d'applications.

Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces métriques, f admet la limite l en $a \in E$ si pour toute suite (x_n) qui tend vers a, la suite $(f(x_n))$ tend vers l.

Valeur d'adhérence et suite extraite.

Définitions.

1. $\lambda \in E$ est dite **valeur d'adhérence** d'une suite (x_n) d'éléments de E si $\forall \varepsilon > 0,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \geq m,\ d(x_n, \lambda) < \varepsilon$.
2. On appelle **suite extraite ou sous-suite** d'une suite $(x_n)_n$ toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_n$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une injection croissante.

Remarque. Une suite peut admettre plusieurs valeurs d'adhérence comme elle peut n'en admettre aucune. (Considérer, par exemple, les suites $((-1)^n)_n$ et $(n)_n$).

Proposition. $(x_n)_n$ étant une suite donnée, on pose $F_m = \overline{\{x_n,\ n \geq m\}}$. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ est $\cap_{m=0}^{\infty} F_m$.(Cet ensemble peut être vide)

Démonstration. Si $\alpha \in \cap_{m=0}^{\infty} F_m$, alors $\forall m \geq 0$, on a $\alpha \in F_m$ et par suite, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un élément x_n, avec $n \geq m$ tel que $d(x_n, \alpha) < \varepsilon$. Ceci signifie que α est une valeur d'adhérence. Pour la réciproque, si α est une valeur d'adhérence, alors $\alpha \in F_m$,

$\forall m \geq 0$. En effet, $\forall \varepsilon > 0$, on a $B(\alpha, \varepsilon) \cap \{x_n, n \geq m\} \neq \emptyset$, $\forall m \geq 0$. Ceci signifie que α est adhérent à l'ensemble $\{x_n,\ n \geq m\}$ pour tout $m \in I\!N$, c'est à dire que α appartient à l'adhérence de l'ensemble $\{x_n,\ n \geq m\}$ qui est F_m pour tout $m \in I\!N$.

On peut établir sans grande difficulté le résultat suivant:

Proposition. $\lambda \in E$ est une valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_n$ si et seulement si il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers λ.

Il suffit de prendre ε de la forme $1/n$ (n entier non nul) et de lui associer, pour chaque entier n, un entier noté $\varphi(n)$ pour lequel on aura $d(x_{\varphi(n)}, \lambda) < 1/n$. (Bien entendu, on peut choisir les entiers $\varphi(n)$ de sorte que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ pour avoir une suite croissante.) L'autre implication ne pose pas de problème.

Suites et continuité.

Proposition. Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces métriques, f est continue en $a \in E$ si et seulement si pour toute suite (x_n) qui tend vers a, la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$.

Démonstration. On se donne une suite $(x_n)_n$ qui tend vers a, et $B(f(a), \varepsilon)$ une boule quelconque centrée en $f(a)$. Puisque f est continue en a, il existe $\eta > 0$ tel que $f(B(a, \eta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$. D'autre part, puisque la suite $(x_n)_n$ converge vers a, il existe un entier N_η tel que si $n \geq N_\eta$, on aura $d(x_n, a) < \eta$. On a donc assuré que si $n \geq N_\eta$, $d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Pour l'autre implication, on raisonne par l'absurde, on suppose qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \eta > 0$, il existe x avec $d(x, a) < \eta$ mais $d(f(x), f(a)) \geq \varepsilon_0$. On prend η de la forme $1/n$ et on construit alors une suite $(x_n)_n$ qui converge vers a mais telle que $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(a)$.

V. Compacts et théorème de Bolzano Weierstrass.

Définitions. Soit A une partie de E, un **recouvrement ouvert** de A est la donnée d'une famille $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E, où I est un ensemble d'indices, telle que

$$A \subset \cup_{i \in I} O_i.$$

Une partie $A \subset E$ est un **compact** si elle possède la propriété suivante dite de **Borel-Lebesgue:** De tout recouvrement ouvert de A, on peut extraire un sous recouvrement fini. Cela signifie qu'il existe une partie finie $J \subset I$ telle que

$$A \subset \cup_{i \in J} O_i.$$

Autres formes équivalentes.

- De toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ dont l'intersection ne rencontre pas A, on peut extraire une sous famille finie dont l'intersection ne rencontre pas A.

- Toute famille de parties fermées de E, dont l'intersection de toute sous famille finie rencontre A, est d'intersection qui rencontre A.

On vérifie facilement que $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^n$ en général, n'est pas compact.

Le théorème qui suit caractérise les espaces métriques compacts.

Théorème de Bolzano Weierstrass.

Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si de toute suite de points de E, on peut extraire une sous suite convergente.

Démonstration.

Supposons (E, d) compact, et soit (x_n) une suite dans E. Posons $F_m = \overline{\{x_n,\ n \geq m\}}$. Les parties $\{F_m,\ m \geq 0\}$ sont des fermés non vides dont toute sous-famille finie est d'intersection non vide. E étant compact, d'après une des formes de la propriété de Borel-Lebesgue, la famille (F_n) est elle même d'intersection non vide. Or cette intersection est exactement l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n). Ceci prouve une implication.

Pour l'autre partie de la démonstration, nous allons d'abord établir deux assertions.

Assertion 1. Soit (E, d) un espace métrique telle que toute suite possède une valeur d'adhérence et soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E, alors $\exists$r > 0 $\forall x \in E$, la boule $B(x, r)$ est contenue dans l'un des ouverts de la famille $(O_i)_{i\in I}$.

Par l'absurde, supposons le contraire et prenons $r_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, auquel est associé un élément $x_n \in E$ tel que la boule $B(x_n, 2^{-n})$ ne soit contenue dans aucun des O_i. La suite (x_n) admet une valeur d'adhérence λ qui appartient bien entendu à l'un des (O_i) noté O_{i_0}. Ce dernier étant un ouvert, il existe un réel $\mu > 0$ pour lequel $B(\lambda, \mu) \subset O_{i_0}$.

Or, si n est assez grand et convenablement choisi, on a $B(x_n, 2^{-n}) \subset B(\lambda, \mu) \subset O_{i_0}$ ce qui contredit la supposition.

Assertion 2. Soit (E, d) un espace métrique telle que toute suite possède une valeur d'adhérence, alors $\forall r > 0$ l'espace E peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon r.

Par l'absurde, on suppose l'existence d'un $r_0 > 0$ tel que E ne puisse pas être recouvert par un nombre fini de boules. Ainsi, si $x_0 \in E$, la boule $B(x, r_0)$ est strictement incluse dans E, il existe $x_1 \notin B(x_0, r_0)$. De même, la partie $B(x_0, r_0) \cup B(x_1, r_0)$ est strictement incluse dans E. On construit ainsi une suite (x_n) qui doit admettre une valeur d'adhérence . Or tous les termes de la suite se trouvent les uns des autres à une distance supérieure ou égale à r_0, d'où une contradiction.

Supposons donné un recouvrement ouvert $(O_i)_{i \in I}$ de E. D'après l'assertion 1, il existe $r_0 > 0$ tel que $\forall x \in E$, la boule $B(x, r_0)$ est contenu dans l'un de (O_i), et d'après l'assertion 1, pour ce même r_0, E peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon r_0 qu'on note $B(x_1, r_0), B(x_2, r_0), ..., B(x_p, r_0)$. Ces boules sont contenues dans l'union de p ouverts de la famille (O_i). Ces p ouverts recouvrent donc aussi E. Nous avons donc réussi à extraire un sous-recouvrement fini. Ceci achève la démonstration.

VI. Continuité uniforme et prolongement.

Un intérêt majeur des applications uniformément continues est qu'elles conservent les suites de Cauchy, ce qui est très utile, comme on le verra plus tard, lorsqu'on étudiera les espaces métriques complets.

Définition. Soit (E, d) et (F,δ) deux espaces métriques. Une application $f : E \to F$ est uniformément continue si

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$ si $d(x, y) < \eta,$ alors $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$

Exemples. 1. Les application lipschitziennes. On rappelle qu'on a l'existence d'un réel $k > 0$ tel que $\delta(f(x), f(y)) \leq k\ d(x, y)$ pour tout $x, y \in E$.

2. L'application distance $d : E\text{x}E \to I\!R_+$ est uniformément continue puisqu'elle vérifie

$$|d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| \leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) \leq 2\hat{d}((x_1, x_2), (y_1, y_2)).$$

On rappelle qu'on a muni ExE de la distance $\hat{d}$ donnée par

$$\hat{d}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}.$$

3. Toute application linéaire continue entre deux espaces vectoriels normés est une application lipschitzienne.

En effet, nous savons que si $f : (E, || \, . \, ||_E) \to (F, || \, . \, ||_F)$ est une application linéaire et continue entre deux espaces vectoriels normés E et F, il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout couple $(x, y) \in E^2$, on a: $|| \, f(x) - f(y) \, ||_F \leq M \, || \, x - y \, ||_E$.

Il est aisé d'établir les deux points suivants:

Propriétés.

1. La composée de deux applications uniformément continues est uniformément continue.
2. Une application uniformément continue est continue.

L'application f définie sur $I\!R$ et à valeurs réelles, donnée par $f(x) = x^3$ prouve qu'une application peut être continue sans être uniformément continue.

Théorème. Soit (E, d) un espace métrique compact et (F, δ) un espace métrique et $f : E \to F$ une application continue, alors f est uniformément continue.

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'existence d'une suite (x_n, y_n) dans ExE qui vérifie $d(x_n, y_n) < 2^{-n}$ et $\delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. E étant un espace métrique compact, l'espace produit ExE est compact (on peut extraire de toute suite une sous-suite convergente dans ExE). Cette sous-suite notée $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})_n$ est donc convergente. L'inégalité $d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \leq 2^{-\varphi(n)} \leq 2^{-n}$ prouve que les deux suites $(x_{\varphi(n)})_n$ et $(y_{\varphi(n)})_n$ convergent vers une même limite notée l. Par suite, $\delta(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)}))$ doit tendre vers 0, ce qui contredit l'hypothèse.

Définition. Deux distances d et δ sur un même ensemble E sont dites uniformément équivalentes si l'application identique de $Id : (E, d) \to (E, \delta)$ est uniformément continue et d'inverse uniformément continue.

Deux distances uniformément équivalentes sont topologiquement équivalentes et la réciproque est fausse en général.(Voir travaux dirigés)

Deux distances comparables sont uniformément équivalentes.

VII . Suites de Cauchy, espaces complets.

Définition. Critère de Cauchy. Une suite $(x_n)_n$ dans un métrique (E,d) est **de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \text{ tel que pour tous entiers } m \geq N,\ \text{ et }\ n \geq N,\ d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Propriétés.

1. Les suites de Cauchy restent les mêmes lorsqu'on remplace la distance initiale d par une distance δ qui lui est uniformément équivalente.
2. Une suite de Cauchy pour d peut ne pas être de Cauchy pour une autre distance δ si δ est topologiquement équivalente à d. (Voir T.D.)
3. Si f est une application uniformément continue de (E,d) vers (F,δ) et $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (E,d) alors $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans (F,δ). Voir série 2.
4. Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
5. Toute suite de Cauchy est bornée.
6. Si une suite de Cauchy possède une valeur d'adhérence, elle converge vers cette valeur.
7. Toute suite convergente est de Cauchy.

Nous allons vérifier le sixième point. Notons λ cette valeur d'adhérence et supposons que la suite ne converge pas vers λ. Il existe donc un réel $\varepsilon_0 > 0$ et des indices notés m arbitrairement grands tels que $d(x_m, \lambda) \geq \varepsilon_0$. Comme λ est une valeur d'adhérence, il existe aussi des indices notés n arbitrairement grands tels que $d(x_n, \lambda) < \varepsilon_0/2$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on aura $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon_0$ pour des indices m et n arbitrairement grands, ce qui contredit le fait que la suite est de Cauchy.

Définition. Un espace métrique est **complet** si toute suite de Cauchy est convergente.

Avant de donner des exemples d'espaces métriques complets, nous allons généraliser, dans ce cadre, un théorème étudié en première année et connu sous le nom du théorème des intervalles fermés emboités.

Théorème de Cantor. Un espace métrique (E,d) est complet si et seulement si pour toute suite $(F_n)_n$ de fermés non vides de E, décroissante (pour l'inclusion) dont les diamètres tendent vers 0 on a $\cap_{n=0}^{\infty} F_n$ réduite à un point.

Démonstration. Si (E,d) est complet et $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés donnée telle que dans l'énoncé, on choisit un élément x_n dans chaque F_n pour tout $n \geq 0$. La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy et donc converge d'après l'hypothèse vers un certain α qui appartient à $\cap_{n=0}^{\infty} F_n$. Cette intersection est donc non vide. Elle est réduite à α car son diamètre est nul.

Pour l'autre implication, si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, on considère $F_m = \overline{\{x_n,\ n \geq m\}}$. Ce sont des fermés non vides emboités et de diamètre tendant vers 0. On a remarqué dans un autre paragraphe que $\cap_{n=0}^{\infty} F_n$ est exactement l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ qui est de Cauchy. D'après l'hypothèse, cette intersection est non vide et dans ce cas, il y a une seule valeur d'adhérence, la suite étant de Cauchy, elle est convergente vers cette valeur d'adhérence. Ceci achève la démonstration.

Exemples d'espaces métriques complets.

1. Tout espace métrique compact est complet et, plus généralement, tout espace dont les boules fermées sont compactes est complet. (Ainsi, pour $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ est complet.)
2. Si dans un espace métrique, toute boule fermée est compacte, alors E est complet.
3. Tout fermé dans un espace complet est un complet.
4. Toute réunion finie de complets est un complet.
5. Toute intersection quelconque de complets est un complet.
6. Tout produit (fini ou dénombrable) d'espaces complets, muni de l'une des distances précisées auparavant, est complet.

Démonstration.
1. Si l'espace est compact, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite admet une valeur d'adhérence. En particulier, si on se donne une suite de Cauchy, elle possède une valeur d'adhérence vers laquelle elle va forcément converger.
2. Si on se donne une suite de Cauchy, elle est bornée. C'est donc une suite de Cauchy dans une boule fermée (bornée) convenable. Elle converge dans cette boule fermée, et donc elle converge dans l'espace E.
3. Si A est un fermé et on se donne une suite de Cauchy dans A, comme c'est une suite de Cauchy dans l'espace, qui est complet, elle converge vers une limite appartenant à l'adhérence de A. Puisque A est fermée, cette limite est dans A qui est par conséquent complet.
4. Soit $(A_i)_i$ une famille finie de partie de E. On suppose que chaque A_i est une partie complète. Montrons que $\cup_i A_i$ est complet. Il suffit de le faire pour une famille à deux éléments A_1 et A_2. On se donne donc une suite $(x_n)_n$ de Cauchy dans $A_1 \cup A_2$. On peut extraire une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui soit ou bien dans A_1 ou bien dans A_2 (s'en convaincre!). Cette sous suite est elle-même de Cauchy, elle converge vers une limite qui est une valeur d'adhérence de la suite initiale. La suite converge donc vers cette valeur d'adhérence.
5. Pour l'intersection (éventuellement infinie) de parties A_i, il suffit de remarquer que

toute suite de Cauchy dans l'intersection est une suite de Cauchy dans chaque partie A_i et qu'elle est donc convergente dans chaque partie vers une limite l_i. La limite étant unique, elle ne dépend pas de l'indice i.
6. Seul le cas où on a un produit de deux facteurs $E_1 \times E_2$ est à faire. Il est laissé à titre d'exercice. Remarquer qu'il faut considérer la distance $\hat{d}$ définie sur le produit et que les deux suites formées respectivement en prenant les premières puis les secondes composantes sont de Cauchy dans les facteurs respectifs.

Proposition. Tout complet dans un espace métrique est fermé.

Démonstration. Soit F une partie de E complète et $l \in \bar{F}$. Il existe une suite $(f_n)_n$ d'éments de F qui converge vers l et cette suite est convergente dans E donc de Cauchy. Puisque la partie F est complète, cette suite converge vers un élément de F qui est forcément l car la limite de toute suite lorsqu'elle existe est unique.

Avant de clore ce paragraphe, nous allons énoncer un important théorème de prolongement très utile et souvent utilisé en analyse fonctionnelle approfondie.

Théorème. Soit A une partie dense d'un espace métrique (E, d), (F, δ) un espace métrique complet et $g : A \to F$ une application uniformément continue, alors g se prolonge de facon unique en une application continue $f : E \to F$. De plus, f est uniformément continue.

Démonstration. Remarquons d'abord que si ce prolongement f existe, on a forcément pour tout $x \in E$, $f(x) = \lim_{a \to x} g(a)$. Il faut s'assurer que cette limite existe et que cette limite ne dépend pas de la suite choisie dans A. L'application g étant uniformément continue, si $(a_n)_n$ est une suite d'éléments de A convergente vers x, elle est de Cauchy et la suite $(g(a_n))_n$ est elle-même de Cauchy. Par suite, elle converge vers une limite. Cette limite ne dépend pas de la suite $(a_n)_n$ choisie convergente vers x. En effet, si $(b_n)_n$ est une suite de Cauchy convergente vers x, la suite $(c_n)_n$ définie par pour tout $n \in I\!N$ par:

$$c_{2n} = a_n, \text{ et } c_{2n+1} = b_n,$$

est convergente aussi vers x. Elle est donc de Cauchy et la suite $(g(c_n))_n$ est de Cauchy dans F, elle converge donc vers une limite qui est forcément celle de $(g(c_{2n}))_n$ et donc celle de $(g(a_n))_n$. Cette limite est aussi celle de $(g(c_{2n+1}))_n$ c'est à dire celle de $(g(b_n))_n$. On a donc vérifié que la limite $f(x)$ ne dépend pas de la suire $(a_n)_n$ choisie.
Il reste à montrer que f est uniformément continue. Par hypothèse, g étant uniformément

continue, $\exists \eta > 0$, tel que si $d(x_n, y_n) < \eta$, on aura $\delta(g(x_n), g(y_n)) < \varepsilon/3$. Nous allons montrer que si $d(x,y) < \eta/3$ alors $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. En effet, si x et y sont deux éléments de E, il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ dans A qui convergent respectivement vers x et y. En particulier, on a $d(x_n, x) < \eta/3$ et $d(y_n, y) < \eta/3$ si n est assez grand. D'après l'inégalité triangulaire appliquée deux fois, on obtient $d(x_n, y_n) < \eta$, et par suite $\delta(g(x_n), g(y_n)) < \varepsilon/3$.
D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), g(x_n)) + \delta(g(x_n), g(y_n)) + \delta(g(y_n), f(y)).$$

Puisque la suite $(g(x_m))_m$ converge vers $f(x)$ et que la distance δ est continue, alors pour tout entier n fixé, la suite de réels $(\delta(g(x_m), g(x_n)))_m$ converge vers $\delta(f(x), g(x_n))$. Par conséquent, si m est assez grand et n étant fixé assez grand pour avoir $d(x_n, x_m) < \eta$, la suite de réels $(\delta(g(x_m), g(x_n)))_m$ est majorée par $\varepsilon/3$ et donc il en est de même pour sa limite $\delta(f(x), g(x_n))$. On fait de même pour la suite $(y_n)_n$ pour obtenir $\delta(f(y), g(y_n)) < \varepsilon/3$. On aboutit à $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$, et le prolongement f est donc uniformément continue.

Remarque. L'hypothèse sur l'uniforme continuité est nécessaire comme le montre l'exemple suivant:

Sur l'ensemble $\mathbb{Q}^*$ des rationnels privé de 0, on définit la fonction $f(x) = sin(1/x)$.

$\mathbb{Q}^*$ est dense dans $\mathbb{R}$, mais cette application n'est pas prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier. Le théorème précédent ne s'applique pas car elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{Q}^*$.

Pour clore ce chapitre, nous allons énoncer et démontrer le théorème du point fixe. On rappelle tout d'abord la définition suivante:

Définition. Une application f d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (F, δ) est dite contractante s'il existe une constante réelle $0 < k < 1$ telle que

$\forall (x, y) \in E\text{x}E$, $\delta(f(x), f(y)) \leq k\ d(x, y)$.

Remarque. Une application contractante est une application lipschitzienne de constante strictement inférieure à 1.

Théorème du point fixe. Soit f une application contractante d'un espace métrique complet (E, d) vers lui-même, alors f admet un unique point fixe, c'est à dire qu'il existe un unique $l \in E$ tel que $f(l) = l$.

Remarque. On utilise assez souvent ce théorème en analyse pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution pour une équation donnée. Par exemple, pour prouver l'existence de limite d'une suite récurrente ou bien pour montrer l'existence d'une solution d'une équation fonctionnelle. Ainsi, le théorème de Cauchy-Lipschitz qui assure, sous certaines conditions, l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation différentielle s'établit en se ramenant à un problème de point fixe. La partie importante du travail consiste non pas à appliquer le théorème du point fixe, mais à choisir les espaces métriques complets dans lesquels le théorème s'appliquera.

Démonstration. On choisit $u_0 \in E$ quelconque et on définit par récurrence la suite $(u_n)_n$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$. On peut établir sans difficulté majeure que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy en utilisant le fait que f est contractante. En s'aidant des formules pour les suites géométriques, on obtiendra pour $1 \leq n < m$,

$$d(u_n, u_m) \leq \frac{k^{n-1}(1 - k^{m-n})}{1 - k} d(u_0, u_1) \leq \frac{k^{n-1}}{1 - k} d(u_0, u_1).$$

L'espace étant complet, la suite $(u_n)_n$ admet une limite notée l. Cette limie vérifie $f(l) = l$ grâce à la continuité de f. (On passe à la limite dans l'égalité $f(u_n) = u_{n+1}$.)

Il reste à montrer que f ne peut pas admettre deux points fixes distincts. Supposons l'existence de deux éléments distincts de E notés l_1 et l_2 qui vérifient $f(l_1) = l_1$ et $f(l_2) = l_2$. Puisque f est contractante, on aura

$$d(l_1, l_2) < k\, d(l_1, l_2).$$

Ceci est exclu, d'où l'unicité.

Il suffit de supposer qu'une itérée de l'application f est contractante pour assurer l'existence et l'unicité d'un point fixe.

Corollaire. Soit f une application d'un espace métrique complet (E, d) vers lui-même. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = f \circ ... \circ f$ soit contractante, alors f admet un unique point fixe $x_0 \in E$.

Démonstration. On applique le théorème précédent à f^n qui admet donc un point fixe x_0. On a donc $f^n(x_0) = x_0$ qui implique $f[f^n(x_0)] = f^n[f(x_0)] = f(x_0)$. Par unicité du point fixe, on a forcément $f(x_0) = x_0$ et donc x_0 est aussi un point fixe pour f.

Si f possédait un autre point fixe x_1, il serait aussi un point fixe pour f^n ce qui n'est pas.

Chapitre 3: Espaces topologiques

I. Définition et exemples.

Dans le chapitre précédent, nous avons défini les ouverts puis nous avons également caractérisé les points adhérents, les points intérieurs, les applications continues sans faire référence directement à la distance. Toujours dans le cadre des espaces métriques, on peut vérifier que l'ensemble vide et l'ensemble E sont des ouverts, que toute intersection finie d'ouverts est un ouvert, et que toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Ces propriétés seront le point de départ pour généraliser certains résultats précédents à un autre cadre qui sera celui des espaces topologiques. Mais, tout d'abord, nous allons définir ce qu'on entend par une topologie définie sur un ensemble donné E.

Définition. Une **topologie** sur un ensemble E est la donnée d'une famille $\mathcal{O} \subset P(E)$ de parties de E, stable par intersection finie et par réunion quelconque et telle que $\emptyset$ et E appartiennent à cette famille.

Les éléments de la famille $\mathcal{O}$ sont appelés **ouverts**. Ainsi, les ouverts vérifient les axiomes suivants:

Axiomes des ouverts.

1. $\emptyset$ et E sont des ouverts.
2. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.
3. Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

Un ensemble E muni d'une topologie est dit **espace topologique.**

Exemples

1. La topologie grossière $\mathcal{O} = \{\emptyset, E\}$.

2. La topologie discrète $\mathcal{O} = P(E)$.

3. Les espaces métriques où un ouvert O est caractérisé par: $\forall x \in O,\ \exists B(x, r) \subset O$.

4. Si E est un espace topologique et $A \subset E$ est une partie de E, on définit une topologie sur A en décidant que tout ouvert de A est la trace d'un ouvert de E, c'est à dire, qu'on considère la famille $\mathcal{O}_A \subset P(A)$ définie par $\mathcal{O}_A = \{O \cap A,\ O \text{ ouvert de } E\}$.

On dit que A muni de cette topologie (induite) est un sous espace topologique.

5. Sur la droite réelle achevée $\bar{I\!R} = I\!R \cup \{+\infty, -\infty\}$ ordonnée par $\forall a \in I\!R$, $a \leq +\infty$ et $-\infty \leq a$, on définit un ouvert quelconque O de $\bar{I\!R}$ comme étant de l'un des types suivants:

- Ou bien c'est un ouvert de $I\!R$ (lorsqu'il ne contient ni $+\infty$, ni $-\infty$) ,

- Ou bien il est de la forme $]a, +\infty] \cup O_1$, où O_1 est un ouvert quelconque de $I\!R$ et a est un réel quelconque (lorsqu'il contient $+\infty$),

- Ou bien de la forme $[-\infty, b[\cup O_1$, où O_1 est un ouvert quelconque de $I\!R$ et b est un réel quelconque (lorsqu'il contient $-\infty$),

- Ou bien de la forme $[-\infty, b[\cup O_1 \cup]a, +\infty]$, où O_1 est un ouvert quelconque de $I\!R$, a et b étant des réels quelconques (lorsqu'il contient à la fois $+\infty$ et $-\infty$).

On peut remarquer que $[-\infty, b[$, $]a, +\infty]$, $]-\infty, +\infty]$ et $[-\infty, +\infty[$ sont des ouverts de $\bar{I\!R}$.

Ceci définit bien une topologie sur $\bar{I\!R}$. (Exercice: Vérifier qu'on a la stabilité par intersection finie et par réunion quelconque.) Il découle de cette définition que $I\!R$ est un ouvert de $\bar{I\!R}$, et que c'est un sous espace topologique de $\bar{I\!R}$.

Remarques importantes.

1. Nous avons défini, au chapitre 2, les ouverts dans le cadre d'un espace métrique (E, d). Si on se donne une topologie sur un ensemble quelconque où aucune distance n'est donnée, on peut se poser la question suivante: Est il possible de définir une distance sur notre ensemble pour laquelle les ouverts au sens "ouverts dans un espace métrique cette fois" soient exactement les ouverts de la topologie que l'on s'est donnée. **Se poser cette question c'est se demander si la topologie donnée est métrisable.** La réponse est que ce n'est pas toujours possible. Il existe un contre exemple évident.

Si $E = \{a, b\}$ est un ensemble à deux éléments et si on choisit la topologie grossière où seuls $\emptyset$ et E sont les ouverts, il n'existe pas de distance d définie sur E telle que les seuls ouverts de l'espace métrique (E, d) soient $\emptyset$ et E. En effet, par l'absurde, si une telle distance existe, alors on a: $d(a, a) = d(b, b) = 0$ et $d(a, b) = d(b, a) = \alpha > 0$ et ces relations définissent bien une distance. Toute boule ouverte est un ouvert dans l'espace métrique, en particulier, $B(a, \frac{\alpha}{2})$ est un ouvert, or cet ouvert est aussi $\{a\}$, mais $\{a\}$ n'est pas un ouvert pour la toplogie grossière.

2. Si E est un ensemble quelconque, la topologie discrète est métrisable. On définit pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, x) = 0$ et $d(x, y) = 1$. C'est bien une distance (les trois propriétés sont vérifiées.) Dans l'espace métrique (E, d), la boule $B(x, 1/2)$ est un ouvert pour tout $x \in E$. Or cette boule est égale à $\{x\}$. Ainsi, tout singleton est un ouvert et par suite toute partie de E est un ouvert. La topologie discrète est donc métrisable. Cette topologie ne présente pas beaucoup d'intérêt car toutes les applications définies sur E et à valeurs dans E seront continues, ce qui ne permet pas d'avoir par exemples des applications non continues.

II. Fermés, voisinages, bases d'ouverts et base de voisinages.

Définition. Une partie d'un espace topologique E est dite fermée si c'est le complémentaire d'un ouvert.

Axiome des fermés.
- Toute intersection quelconque de fermés est un fermé.
- Toute réunion finie de fermés est un fermé.
- $\emptyset$ et E sont des fermés.

Définition. Une partie $V(x) \subset E$ est appelée voisinage de x si elle contient un ouvert O qui contient x.

Remarque. Un ouvert est voisinage de chacun de ses points mais un voisinage n'est pas forcément un ouvert. Par exemple, dans l'espace métrique $\mathbb{R}$ muni de la distance définie à partir de la valeur absolue, $V(1) = [0, 2]$ est un voisinage de 1 mais ce n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

Axiomes des voisinages. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble de tous les voisinages de x. On a les propriétés suivantes:

1. $\forall x \in E$, $\mathcal{V}(x)$ est non vide. et $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$.
2. Si $A \subset E$ est une partie quelconque de E et si A contient un élément de $\mathcal{V}(x)$, alors $A \in \mathcal{V}(x)$.
3. $\mathcal{V}(x)$ est stable par intersection finie.
4. $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists W \subset V$ tel que $\forall y \in W$, $V \in \mathcal{V}(y)$. (Il suffit de choisir n'importe quel ouvert W contenu dans V.)

Remarque On peut définir une topologie à partir de la donnée d'une famille de fermés vérifiant l'axiome des fermés en décidant qu'un ouvert est le complémentaire d'un fermé. La famille des ouverts ainsi définie vérifie alors les axiomes des ouverts.

De la même manière, on peut le faire à partir des voisinages en décidant qu'un ouvert O est une partie voisinage de chacun de ses points. On vérifie alors que c'est bien une topologie et que, pour cette topologie, les voisinages sont exactement la famille initiale de voisinages.

Définitions On appelle **base d'ouverts** toute sous famille $\mathcal{U}$ de l'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts telle que tout élément $O \in \mathcal{O}$ s'écrive comme réunion d'éléments de $\mathcal{U}$. On appelle **base de voisinages** de x ou **système fondamental de voisinages** de x une sous-famille

$\mathcal{W}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ telle que
$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists W \in \mathcal{W}(x),\ W \subset V.$$

Exemples.

Si E est un espace métrique, les ouverts sont par définition des réunions de boules ouvertes. Par suite, les boules ouvertes constituent une base d'ouverts. Les boules ouvertes de rayon rationnel constituent aussi une base d'ouverts.

Toujours dans le cadre des espaces métriques, les boules centrées en un élément $x \in E$ et rayon $r_n = 2^{-n}$ constituent un système fondamental de voisinages de x.

Définitions. A étant une partie de E, un point $x \in A$ est dit **intérieur** à A s'il existe un voisinage V de x contenu dans A. On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.

Un point $x \in E$ est **adhérent** à A si tout voisinage de x rencontre A. On note $\bar{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.

On appelle **frontière** de la partie A l'ensemble des éléments qui sont adhérents à la fois à A et à son complémentaire. La frontière de A est notée Fr(A). On a donc Fr(A)=$\bar{A}\cap\overline{A^c}$.

Une partie A est dite **dense** dans E si $\bar{A} = E$.

Soient A et B deux parties vérifiant $A \subset B$, on dit que A est **dense dans** B si $\bar{A}$ *contient* B.

Conséquences: Comme dans le cas des espaces métriques, on démontre sans trop de peine que $\mathring{A}$ est un ouvert et que c'est le plus grand ouvert contenu dans A, que $\bar{A}$ est un fermé et que c'est le plus petit fermé contenant A.

En effet, si $x \in \mathring{A}$, il existe un ouvert O_x contenant x et contenu dans A. On a alors $O_x \subset \mathring{A}$ car si $y \in O_x$, O_x est un ouvert contenant y et contenu dans A, et on a donc $y \in \mathring{A}$. D'autre part, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A car si W est un ouvert vérifiant $\mathring{A} \subset W \subset A$, alors tout $x \in W$ est un point intérieur, par conséquent $x \in \mathring{A}$. On démontre de façon analogue les résultats relatifs à l'adhérence.

Définition. Un espace topologique est dit **séparé** s'il vérifie la propriété suivante dite de **Hausdorff**: Deux éléments distincts ont des voisinages respectifs disjoints.

Exemples

- Les espaces métriques sont des espaces séparés. En effet, si x et y sont deux éléments distincts et si $r = d(x, y)$, les boules $B(x, r/2)$ et $B(y, r/2)$ sont des voisinages respectifs disjoints.
- $\mathbb{R}$ et $\bar{\mathbb{R}}$ sont séparés.
- Tout sous-espace d'un espace séparé est séparé.

Propriété: Dans un espace topologique séparé, les singletons sont des fermés.

Démonstration: Soit $y \in \{x\}^c$ un élément quelconque. L'espace étant séparé, il existe un ouvert O_x contenant x et un ouvert O_y contenant y disjoints. On aura $O_y \subset \{x\}^c$ et $\{x\}^c$ est donc un ouvert.

III. Applications continues.

Définitions. Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application. On dit que f est continue en $x \in E$ si $\forall V \in \mathcal{V}(f(x)), \exists U \in \mathcal{V}(x),$ tel que $f(U) \subset V$.

Ceci équivaut à $\forall V \in \mathcal{V}(f(x)),\ f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$.

On dit que f est continue sur E si f est continue en tout point de E et f est un homéomorphisme si f est continue sur E, bijective et f^{-1} est continue sur F.

Propriétés.

1. Si $\mathcal{W}(f(x))$ est un système fondamental de voisinages de $f(x)$, alors pour montrer que f est continue en x, il suffit de vérifier le point suivant: $\forall V \in \mathcal{W}(f(x)),\ f^{-1}(V)$ est un voisinage de x.
2. Soient E, F et G trois espaces topologiques, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications continues alors la composée $g \circ f$ est continue.
3. Soit $f : E \to F$ une application continue, $A \subset E$ une partie et $x \in E$ adhérent à A, alors $f(x) \in \overline{f(A)}$. ($f(x)$ est adhérent à $f(A)$ ou autrement écrit $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.)
4. Si $f : E \to F$ est un homéomorphisme, il existe une bijection entre les ouverts de E et les ouverts de F.

Démonstration Nous allons montrer le premier point puis le troisième point.

Si $U \in \mathcal{V}(f(x))$ est un voisinage de $f(x)$, alors U contient un voisinage W appartenant au système fondamental de voisinages $\mathcal{W}(f(x))$. Ainsi, $f^{-1}(U)$ contient $f^{-1}(W)$ et sera donc un voisinage de x.

Pour le troisième point, si A est une partie de E, $x \in E$ tel que $x \in \bar{A}$, montrons qu'on a $f(x) \in \overline{f(A)}$. Soit donc $V(f(x))$ un voisinage quelconque de $f(x)$, f étant continue, $f^{-1}(V(f(x)))$ est un voisinage de x, par conséquent, $f^{-1}(V(f(x))) \cap A \neq \emptyset$. Finalement, il existe $y \in V(f(x)) \cap f(A)$, c'est à dire $f(x) \in \overline{f(A)}$.

Théorème Soit $f : E \to F$ continue, on a équivalence entre:

1. f est continue sur E.
2. $\forall A \subset E,\ f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
3. Pour tout fermé B de l'espace topologique F, $f^{-1}(B)$ est un fermé de E.

4. Pour tout ouvert $O \subset F$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.

Démonstration.

On va montrer $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$. Le point $1 \to 2$ a déjà été établi ainsi que le point $4 \to 1$. On va montrer $2 \to 3$ et $3 \to 4$.

Soit B un fermé de F, d'après 2, $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))}$ et par suite, $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \bar{B} = B$. D'où $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$. $f^{-1}(B)$ est donc fermé.

Supposons le point 3, et soit O un ouvert de F, montrons que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E. Notons A son complémentaire et B celui de O. Cela revient à montrer que A est fermé, or $A = f^{-1}(B)$ et B est fermé par hypothèse d'où le résultat.

Remarque L'image d'un ouvert par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert. Si c'est le cas, on dit que l'application est ouverte. C'est notamment le cas des homéomorphismes.

IV. Comparaison de topologies.

Définition On dit qu'une topologie T_1 définie par une famille $\mathcal{O}_1$ de parties est **moinsfine** qu'une topologie T_2 définie par une famille $\mathcal{O}_2$ de parties si tout élément de $\mathcal{O}_1$ est un élément de $\mathcal{O}_2$, c'est à dire que tout ouvert pour T_1 est un ouvert pour T_2.

Propriétés. Si T_1 est moins fine que T_2, on a:

1. Tout fermé de T_1 est un fermé pour T_2.
2. Tout voisinage pour T_1 d'un élément $x \in E$ est un voisinage de x pour T_2.
3. L'intérieur de A pour T_1 est contenu dans l'intérieur de A pour T_2.
4. L'adhérence de A pour T_1 **contient** l'adhérence de A pour T_2.
5. Si un espace topologique (E, T) est séparé et si T' est une topologie plus fine que celle initialement définie sur E, alors l'espace topologique (E, T') reste séparé.
6. Soit $f : E \to F$ une application continue entre deux espaces topologiques (E, T_1) et (F, T_2). L'application f reste continue si on remplace la topologie de F par une topologie moins fine et la topologie de E par une topologie plus fine.

Démonstration Si F est un fermé pour T_1 alors c'est le complémentaire d'un ouvert pour T_1 qui est aussi un ouvert pour T_2 et par conséquent F est aussi un fermé pour T_2.

Tout voisinage W de x pour T_1 contient un ouvert pour T_1 qui contient x, cet ouvert est aussi un ouvert pour T_2. Ainsi, W est aussi un voisinage de x pour la topologie T_2.

Notons $\mathring{A}_1$ l'intérieur de A pour la topologie T_1 et $\mathring{A}_2$ l'intérieur de A pour la topologie T_2. Soit $x \in \mathring{A}_1$, il existe un ouvert O pour T_1 contenant x et contenu dans A. Comme T_1 est moins fine que T_2, O est aussi un ouvert pour T_2 contenu dans A et donc $x \in \mathring{A}_2$.

Enfin, si $\bar{A}_1$ désigne l'adhérence de A pour la topologie T_1 et $\bar{A}_2$ celle de A pour la topologie T_2, et si $x \in \bar{A}_2$ et O est un ouvert quelconque pour T_1, alors O étant aussi un ouvert pour T_2, O intersecte A. Ainsi, on a bien $x \in \bar{A}_1$.

Les deux derniers points se démontrent par le même raisonnement.

Remarque Dans l'ensemble des topologies définies sur un ensemble E, la relation "être plus fine que" est une relation d'ordre.

Théorème Borne inférieure et borne supérieure de topologies

Soit $\{T_i,\ i \in I\}$ une famille de topologies définies sur un même ensemble E, I étant un ensemble quelconque d'indices.

Dans l'ensemble de toutes les topologies définies sur E, il existe une **borne inférieure** "la plus fine des topologies moins fines que les T_i" et il existe une **borne supérieure** "la moins fine des topologies plus fines que les T_i".

Démonstration

L'ensemble des topologies moins fines que chacune des T_i est non vide car il contient la topologie grossière. Un ouvert pour la borne inférieure des topologies T_i est nécessairement un ouvert pour chaque topologie T_i. On vérifie aisément que ceci définit bien une topologie ($\emptyset$ et E sont des ouverts, stabilité par intersection finie et par union quelconque.) Cette topologie est bien la plus fine des topologies moins fines que chacune des T_i car si O est un ouvert pour une topologie moins fine que chacune des T_i alors O est un ouvert pour chacune de T_i et par suite forcément un ouvert de la topologie borne inférieure.

L'ensemble des topologies plus fines que chacune des T_i est non vide car il contient la topologie discrète. Le bon candidat pour la borne supérieure est donné par sa famille d'ouverts qui est l'intersection de toutes la familles d'ouverts des topologies plus fines que chacune des T_i. Cette topologie borne supérieure est bien plus fine que chacune des T_i et c'est la moins fine de toutes les topologies plus fines que chacune des T_i.

Définition Topologie engendrée par une famille de parties $\{A_k\}$.

Soit $\{A_k, k \in K\}$ une famille de parties de E, on appelle **topologie engendrée** par les A_k la borne inférieure des topologies pour lesquelles les A_k sont des ouverts.

Remarques 1. Dans la topologie engendrée par une famille de parties $\{A_k\}$, les A_k sont des ouverts.

2. Cette topologie borne inférieure doit contenir toutes les intersections finies des parties A_k, ainsi que les réunions quelconques de telles parties. On montre que cette topologie est formée exactement en prenant toutes les intersections finies possibles des A_k

puis en prenant les réunions quelconques de toutes les intersections finies précédentes. On doit vérifier que cette famille est à nouveau stable par intersections finies ce qui est vrai!

Sous espaces topologiques.

Définition Soient E un espace topologique et $A \subset E$ une partie de E. On appelle topologie induite sur A la topologie pour laquelle les ouverts sont les traces sur A des ouverts de E.

O_A est un ouvert de A s'il existe un ouvert O de E tel que $O_A = O \cap A$.

Proposition 1. La famille d'ouverts $\{O \cap A,\ O \text{ ouvert de } E\}$ de A définit bien une topologie sur A.

2. La topolgie induite est la topologie la moins fine rendant continue l'application "injection canonique" $i_A : A \to E$.

Démonstration La première partie ne pose pas de difficultés. Pour le second point, i_A est continue si l'image réciproque de tout ouvert de E est un ouvert de A, ce qui est le cas d'après la définition même d'un ouvert de A. De plus, c'est la moins fine des topologies pour lesquelles i_A est continue car toutes ces topologies doivent admettre les parties de la forme $O \cap A$ comme ouverts, et par conséquent, tout ouvert de la topologie induite est forcément un ouvert pour toute topologie rendant continue l'application i_A. Finalement, la topologie induite est la moins fine de toutes ces topologies.

V. Espaces topologiques produits.

En analyse, nous avons appris que pour montrer qu'une application, définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, est continue, il suffit de vérifier que ses composantes (toutes à valeurs dans $\mathbb{R}$) sont continues. Ceci est rendu légitime par le fait que les deux projections $p_1(x, y) = x$ et $p_2(x, y) = y$, sont continues de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. Ceci va nous guider pour définir la topologie produit.

Soit $\{E_i,\ i \in I\}$ une famille d'espaces topologiques et $E = \Pi_{i\in I} E_i$ le produit de ces espaces. On note $p_i : E \to E_i$ la projection canonique sur le facteur E_i.

Définition La **topologie produit** (définie sur E) est celle engendrée par les parties $p_i^{-1}(O_i)$ où O_i est un ouvert quelconque de E_i.

E, muni de cette topologie, est appelé **espace topologique produit.**

Propriété La topologie produit est la topologie la moins fine rendant continues les projections p_i, $i \in I$.

Démonstration C'est la topologie borne supérieure des topologies pour lesquelles les $p_i^{-1}(O_i)$ sont des ouverts. Pour ces topologies, les projections p_i sont continues.

Définition Un **pavé ouvert** est une intersection finie d'éléments de la forme $p_i^{-1}(O_i)$, où O_i est un ouvert de E_i, qui sont appelés pavés élémentaires.

Les pavés ouverts sont donc des ouverts pour la topologie produit. De plus, on peut caractériser les pavés ouverts de E.

Proposition Les pavés ouverts de E sont exactement les parties de la forme $\Pi_i O_i$ où O_i est un ouvert de E_i égal à E_i sauf pour un nombre fini d'indices.

Démonstration Considérons $\Pi_i O_i$, où O_i est un ouvert de E_i égal à E_i sauf pour un nombre fini d'indices, et notons $i_1 < ... < i_k$ ces indices. On a $\Pi_i O_i = p_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap ... \cap p_{i_k}^{-1}(O_{i_k})$ et par suite, il s'agit bien d'un pavé ouvert. Inversement, si on se donne un pavé ouvert $p_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap ... \cap p_{i_k}^{-1}(O_{i_k})$ et x un élément de ce pavé, ceci équivaut à $x \in \Pi_i O_i$ avec $O_i = E_i$ si $i \notin \{i_1, ..., i_k\}$.

Théorème Une partie de $E = \Pi_i E_i$ est ouverte pour la topologie produit si et seulement si elle est la réunion d'une famille quelconque de pavés ouverts.

Démonstration

La topologie produit est la topologie engendrée par les pavés ouverts. Elle doit être stable par intersection finie et par réunion quelconque. Elle contient donc les intersections finies de pavés ouverts et les réunions quelconques de pavés ouverts. Montrons que ce sont les seuls types d'éléments de cette topologie c'est à dire que les ouverts pour cette topologie sont exactement les pavés ouverts et les réunions quelconques de pavés ouverts. En effet, toute intersection finie de pavés ouverts est un pavé ouvert, et toute intersection finie d'une réunion quelconque de pavés ouverts est une réunion de pavés ouverts. Pour voir ceci, il suffit de se convaincre que l'intersection de deux réunions quelconques de pavés ouverts est une réunion de pavés ouverts. L'intersection de deux réunions étant une réunion d'intersections, et l'intersection de deux pavés ouverts étant un pavé ouvert, on a le résultat.

Propriété universelle du produit.

Soit F un espace topologique, $E = \Pi_{i\in I}E_i$ un produit d'espaces topologiques muni de la topologie produit , $f : F \to E$ une application donnée et $p_i : E \to E_i$.

f est continue si et seulement si $p_i \circ f$ est continue $\forall i \in I$.

Démonstration

Si f est continue alors $p_i \circ f$ est continue comme composée de deux applications continues. Inversement, supposons $p_i \circ f$ continue $\forall i$, et soit $O \subset E$ un ouvert, c'est une réunion de pavés ouverts et chaque pavé ouvert est de la forme $\Pi_i O_i$ où $O_i = E_i$ sauf pour un nombre fini d'indices. Pour montrer que f est continue, il suffit de montrer que $f^{-1}(O')$ est un ouvert lorsque $O' = \Pi O'_i$ est un pavé ouvert. Notons $i_1, ..., i_k$ les indices pour lesquels $O'_{i_k} \neq E_{i_k}$. On a donc $O'_i = E_i$ pour $i \notin \{i_1, ..., i_k\}$. Il découle de ce qui précède qu'on a l'égalité

$$f^{-1}(O') = \cap_{i\in\{i_1,...,i_k\}}(p_i \circ f)^{-1}(O'_i).$$

Il s'agit d'une intersection finie d'ouverts. Ceci achève la démonstration.

Produit fini d'espaces métriques.

Soit $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$ n espaces métriques et $E = \Pi E_i$ l'espace produit muni de la distance

$d(x, y) = \max_i d_i(x_i, y_i)$. On a la proposition suivante:

Proposition

La topologie associée à la métrique d est la topologie produit.

Démonstration Soit O un ouvert pour la topologie produit, O est réunion de pavés ouverts, chacun de ces pavés étant une intersection finie de pavés élémentaires. On va montrer que chaque pavé ouvert contient une boule ouverte pour la distance d. Soit donc $U = \Pi_i O_i$ un pavé ouvert et $J = \{i \in I,\ O_i \neq E_i\}$. Pour tout $i \in J$, il existe un réel strictement positif r_i tel que $B(x_i, r_i) \subset O_i$. Si on pose $r = \inf_{i\in J} r_i$ alors $B_d(x, r) \subset U$. Ainsi, la topologie définie par la distance d est plus fine que la topologie produit.

Inversement, soit O un ouvert pour la distance d, montrons qu'il contient un ouvert pour la topologie produit. Soit $x \in O$, O contient une boule ouverte $B_d(x, r)$ pour la distance d. Ainsi, si $x = (x_i)$ et $O_i = \{y_i \in E_i,\ d_i(x_i, y_i) < r\}$ alors $\Pi_i O_i$ est un ouvert pour la topologie produit contenu dans $B_d(x, r)$. La topologie produit est donc plus fine que la topologie définie par la métrique d. Il s'agit donc d'une seule et même topologie.

Produit dénombrable d'espaces métriques.

Soit $((E_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques. On remplace, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les métriques d_n par les métriques $\delta_n = \inf\{d_n, 1\}$ (on rappelle que ces métriques sont topologiquement équivalentes). Ceci permet de définir la distance suivante sur le produit E

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-i} \delta_i(x_i, y_i).$$

La topologie définie à partir de la distance d est la topologie produit.

Remarque Lorsqu'on a un produit infini non dénombrable d'espaces métriques, la topologie produit n'est pas forcément métrisable, c'est à dire, qu'il n'existe pas forcément de métrique d sur le produit qui donnera une topologie identique à la topologie produit. On peut voir à ce sujet le dernier exercice de la série 3.

VI. Limite, valeur d'adhérence et applications continues.

Définition On dit qu'une suite $(x_n)_n$ admet la limite $l \in E$, E étant un espace topologique quelconque, si pour tout voisinage de l, $V(l)$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$, $x_n \in V(l)$.

On dit que $\lambda \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si pour tout voisinage $V(\lambda)$ de λ, pour tout entier N il existe un entier naturel n tel que $n \geq N$ et $x_n \in V(\lambda)$.

On peut résumer ce qui précède en disant que l est limite de la suite $(x_n)_n$ ssi tout voisinage de l contient les x_n à partir d'un certain rang et que λ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ ssi pour tout voisinage $V(\lambda)$ de λ, il existe une infinité d'indices n pour lesquels $x_n \in V(\lambda)$.

Remarque Si on munit E de la topologie grossière, alors n'importe quel élément de E est limite de n'importe quelle suite. En particulier, toutes les suites sont convergentes. Ceci peut expliquer le manque d'intérêt pour cette topologie. Ainsi, plus il y a d'ouverts dans la topologie choisie, plus on pourra s'approcher "finement" des éléments de E.

Définition Soit $f : A \subset E \to F$ une application définie sur une partie dense A d'un espace topologique E à valeurs dans un espace topologique F et soit $b \in \bar{A}$. On dit que f admet la limite l quand x tend vers b si pour tout voisinage $V(l)$, il existe un voisinage $V(b)$ de b dans E tel que $f(V(b) \cap A) \subset V(l)$.

Proposition La limite, lorsqu'elle existe, n'est pas nécessairement unique. En revanche, si F est un espace topologique séparé, l'existence d'une limite implique son unicité.

Démonstration En effet, s'il s'agit de la topologie grossière (dans F), tout élément de F est limite. Si F est séparé, supposons l'existence de deux limites distinctes $l_1 \neq l_2$, et prenons des voisinages distinctes $V(l_1)$ et $V(l_2)$, il ne peut exister un voisinage $V(b)$ de

b pour lequel $f(V(b) \cap A)$ soit à fois contenu dans $V(l_1)$ et dans $V(l_2)$.

Définition Soit $f : A \subset E \to F$ une application définie sur une partie dense A d'un espace topologique E à valeurs dans un espace topologique F et soit $b \in \bar{A}$. On dit que $\lambda \in F$ est une valeur d'adhérence de f quand x tend vers b si pour tout voisinage $V(\lambda)$, pour tout voisinage $V(b)$ de b dans E, $f(V(b) \cap A) \cap V(\lambda) \neq \emptyset$.

Remarque importante. Dans un espace métrique, si un élément x est adhérent à une partie A, il est possible de construire une suite $(x_n)_n$ de points de A qui converge vers x. Cette propriété n'est plus vérifiée, en général, dans un espace topologique si l'espace topologique n'est pas métrisable, c'est à dire si on ne peut pas définir une distance d pour laquelle une partie est un ouvert pour la topologie si et seulement si elle est ouverte pour la distance d. Voir à ce sujet série 3, exercice 8.

Comme pour les suites, une limite est une valeur d'adhérence et la réciproque n'est pas toujours vraie et on peut montrer la propriété suivante analogue à celle des suites:

Proposition L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une application $f : A \subset E \to F$ en $b \in E$ est

$$\cap_{U \in \mathcal{V}(b)} \overline{f(U \cap A)}.$$

Remarque Les limites et les valeurs d'adhérence des suites sont des cas particuliers des limites et des valeurs d'adhérence des fonctions. Il suffit de remplacer A par $\mathbb{N}$, E par $\bar{\mathbb{R}}$ et b par $+\infty$.

Définition On dit que $f : E \to F$ est continue en $x \in E$ si f admet la limite $f(x)$ en x.

Nous allons donner un théorème de prolongement par continuité qui est valable cette fois-ci dans le cadre plus général des espaces topologiques. Pour cela, on besoin de la définition suivante:

Définition Soit F un espace topologique, on dit que F est **régulier** si F est séparé et si tout point possède un système fondamental de voisinages fermés.

Exemples $\mathbb{R}$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ sont réguliers.

Les espaces métriques sont également des espaces réguliers.

Théorème Soit $g : A \subset E \to F$ une application d'une partie A dense dans E, à valeurs dans un espace topologique régulier F et telle que $\forall x \in \bar{A} = E$, g admet la limite l notée $f(x)$ en x, alors g est prolongeable en une unique application $f : E \to F$ continue.

Démonstration On doit montrer que f est continue en tout $x \in E$. Soit $V(f(x)) \subset F$ un voisinage quelconque de $f(x)$, puisque g admet une limite en x notée $f(x)$, il existe un voisinage $V(x) \subset E$ tel que $g(V(x) \cap A) \subset V(f(x))$. On choisit un voisinage fermé $W(f(x)) \subset V(f(x))$ (ce qui est possible d'après les hypothèses faites sur F), on note $V'(x)$ le voisinage, qu'on choisit ouvert, de x correspondant pour lequel on a $g(V'(x) \cap A) \subset W(f(x))$. Montrons que $\forall y \in V'(x)$, on a $f(y) \in W(f(x))$.

$W(f(x))$ étant fermé, il suffit de montrer que tout voisinage de $f(y)$ intersecte $W(f(x)) = \overline{W(f(x))}$.

Soit donc $V(f(y))$ un voisinage quelconque de y, puisque g admet la limite $f(y)$ en y par définition même de f, il existe un voisinage $V(y)$ tel que $g(V(y) \cap A) \subset V(f(y))$. D'autre part, puisque $V'(x)$ est un ouvert contenant y, c'est également un voisinage ouvert de y et par suite, on a $g(V(y) \cap V'(x) \cap A) \subset V(f(y))$. A étant dense dans E et $V(y) \cap V'(x)$ étant un voisinage de $y \in E$, on a $(V(y) \cap V'(x)) \cap A \neq \emptyset$. L'image $g((V(y) \cap V'(x)) \cap A)$ est aussi non vide et comme elle est incluse dans $W(f(x)) \cap V(f(y))$, cette dermière intersection est également non vide comme on voulait le montrer.

Il existe des espaces topologiques encore plus particuliers que les espaces réguliers, il s'agit des espaces normaux.

Définition Un espace topologique E est **normal** s'il est séparé et si deux parties fermées disjointes ont des voisinages respectifs disjoints.

Exemple Tout espace métrique est normal. (Voir TD: Série 2, exercice 4.)

Tout espace régulier est séparé et tout espace normal est régulier. On a une autre caractérisation des espaces réguliers.

Proposition Un espace topologique est régulier si $\forall x \in E$ et $\forall S \subset E$, partie fermée de E, il existe un voisinage $V(x) \subset E$ et un voisinage $V(S)$ de la partie S tels que $V(x) \cap V(S) = \emptyset$.

Limite et valeur d'adhérence dans un espace produit

Soit $F = \Pi_{i \in I} F_i$ un produit d'espaces topologiques et $p_i : F \to F_i$ les projections associées. Soit $A \subset E$ une partie d'un espace topologique, $a \in A$ et $f : A \to F$ une application. On a la proposition suivante:

Proposition $y \in F$ est limite de f en a si et seulement si $\forall i \in I$, $y_i = p_i(y)$ est limite de $p_i \circ f$ en $a \in A$.

De même, $\lambda \in F$ est valeur d'adhérence de f en a alors $\forall i \in I$, $\lambda_i = p_i(\lambda)$ est valeur d'adhérence de $p_i \circ f$ en a.

Mise en garde Si $\forall i \in I$, λ_i est valeur d'adhérence de $p_i \circ f$, $\lambda = (\lambda_i)_i$ peut ne pas être valeur d'adhérence de f comme le montre le contre exemple suivant:

Dans $I\!R^2$, on considère les deux suites (x_n, y_n) avec $x_n = sin(1/n)$, si n est impair et $x_n = n$ sinon, et $y_n = n$ si n est impair et $y_n = cos(1/(n+1))$ sinon. En effet, 0 est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$, 1 est valeur d'adhérence de $(y_n)_n$ mais le couple $(0, 1)$ n'est pas une valeur d'adhérence de la suite (x_n, y_n)

Chapitre 4: Espaces compacts et espaces connexes

I. Espaces compacts et espaces localement compacts

1. Espaces compacts.

Définitions Soit A une partie d'un espace topologique E, un **recouvrement ouvert** de A est la donnée d'une famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de A pour la topologie induite, où I est un ensemble d'indices, telle que

$$A = \cup_{i\in I} O_i.$$

Une partie $A \subset E$ est un **compact** si elle est séparée pour la topologie induite et si elle possède la propriété suivante dite de **Borel-Lebesgue:** De tout recouvrement ouvert de A, on peut extraire un sous recouvrement fini. Cela signifie qu'il existe une partie finie $J \subset I$ telle que

$$A = \cup_{i\in J} O_i.$$

Autres formes équivalentes:

- De toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ de E, telle que $(\cap_{i\in I} F_i) \cap A = \emptyset$, on peut extraire une sous famille finie $J \subset I$ telle que $(\cap_{i\in J} F_i) \cap A = \emptyset$

- Toute famille de parties fermées de E, dont l'intersection de toute sous famille finie intersecte A, est telle que l'intersection de tous les éléments de la famille intersecte A.

Un espace topologique est dit compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de l'espace, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

$*$ On vérifie facilement que $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^n$ en général, n'est pas compact. (On peut donner un recouvrement par des ouverts pour lequel il n'existe pas de sous recouvrement fini)

$*$ Si $(x_n)_n$ est une suite convergente vers l alors l'ensemble $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

Théorème de Heine Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est compact.

Démonstration $\mathbb{R}$ étant un espace métrique, on peut vérifier que l'intervalle $[a, b]$ est compact en s'assurant que toute suite bornée admet une suite extraite convergente. Ce que nous allons faire dans le cadre de ce chapitre, c'est de considérer $\mathbb{R}$ comme un espace topologique, où les ouverts sont définis comme étant des unions quelconques d'intervalles ouverts. On se donne donc un recouvrement ouvert $(O_i)_i$ de $[a, b]$ puis on va montrer qu'il est possible d'en extraire un sous recouvrement fini. On considère l'ensemble

$A = \{x \in [a, b],\ [a, x]$ puisse être recouvert par un nombre fini d'ouverts$\}$.

A contient a et est majoré par b donc admet une borne supérieure α. Montrons que α appartient à A. On a α appartient à l'un des ouverts du recouvrement initial noté O_α. D'autre part, d'après la propriété de la borne supérieure, il existe un élément $m \in A$ tel que $m < \alpha$ et $[m, \alpha] \in O_\alpha$. L'intervalle $[a, m]$ peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts $O_{i_1}, ..., O_{i_k}$ et l'intervalle $[a, \alpha]$ est recouvert par $O_{i_1}, ..., O_{i_k}, O_\alpha$. Ceci prouve que $\alpha \in A$. Par un raisonnement analogue, on peut montrer que l'hypothèse $\alpha < b$ contredirait le fait que α soit un majorant de A, car on trouvera un autre élément $m_1 \in O_\alpha$, avec $m_1 > \alpha$ et l'intervalle $[a, m_1]$ sera aussi recouvert par $O_{i_1}, ..., O_{i_k}, O_\alpha$ et donc on a $m_1 \in A$. Ainsi $\alpha = b$, et l'intervalle $[a, b]$ peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts de la famille initiale, $[a, b]$ est donc compact.

Proposition Si deux espaces topologiques sont homéomorphes et si l'un deux est compact, l'autre est compact.

Démonstration Soit $f : E \to F$ un homéoporphisme, supposons E compact, montrons que F est compact. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de F, $(f^{-1}(O_i))_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de E qui est compact. Par conséquent, il existe un sous recouvrement fini $(f^{-1}(O_i))_{i \in J}$ de E et $(O_i)_{i \in J}$ sera un sous recouvrement fini pour F.

Conséquence $\bar{\mathbb{R}}$ est compact car il est homéomorphe à l'intervalle $[-1, +1]$ (muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$).

On peut proposer l'homéomorphisme suivant: $f : \bar{\mathbb{R}} \to [-1, +1]$ défini par $f(x) = (2/\pi)Arctan(x)$ si $x \in \mathbb{R}$, $f(+\infty) = 1$ et $f(-\infty) = -1$. (Exercice: Montrer que c'est bien un homéomorphisme.)

Propriétés

1. Si $(x_n)_n$ est une suite dans un espace compact alors $(x_n)_n$ admet au moins une valeur d'adhérence.
2. Si $(x_n)_n$ est une suite, dans un espace compact, qui admet une valeur d'adhérence unique alors cette suite converge vers cette unique valeur d'adhérence.
3. Toute partie fermée dans un espace compact est compact.
4. Toute partie compacte d'un espace séparé est fermée.
5. Dans un espace topologique séparé, toute intersection quelconque de parties compactes est une partie compacte et toute réunion finie de parties compactes est une partie compacte.

Démonstration

Pour le premier point, on considère les parties

$$F_m = \overline{\{x_n,\ n \geq m\}}.$$

$(F_m)_m$ est une famille de parties fermées dont toute sous famille finie est d'intersection non vide, puisque l'espace est compact, l'intersection de toute la famille est aussi non vide. Or, cette intersection est exactement l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite.

Pour le deuxième point, supposons que cette unique valeur d'adhérence notée λ ne soit pas une limite. Il existe alors une infinité d'indices n pour lesquels les x_n correspondants sont à l'extérieur d'un certain voisinage ouvert $V(\lambda)$. On a alors une suite extraite dans un espace compact qui admet donc une valeur d'adhérence. Cette valeur d'adhérence appartient au fermé complémentaire de $V(\lambda)$. Ceci contredit l'unicité de la valeur d'adhérence λ.

Soit F un fermé dans un espace compact et soit $(F_n)_n$ une famille de fermés de F dont toute sous famille finie est d'intersection non vide. Les fermés de F étant les parties de la forme $F_n = J_n \cap F$, où les J_n sont des fermés de l'espace compact, les F_n sont aussi des fermés de l'espace. On a alors par hypothèse :

$$(\cap_{finie} F_n) = \cap_{finie}(J_n \cap F) \neq \emptyset.$$

L'espace étant compact, d'après une des formes de la propriété de Borel-Lebesgue, l'intersection de toute la famille est non vide et on a donc

$$\cap_{infinie}(J_n \cap F) \neq \emptyset.$$

Ceci montre que la partie F est compacte.

Pour le point suivant, notons K la partie compacte et soit $l \in \bar{K}$. Montrons que $l \in K$. Tout voisinage $V(l)$ de l rencontre K, son adhérence $\bar{V(l)}$ rencontre aussi K. Donnons nous la famille de tous les voisinages fermés $(F_i)_{i \in I}$ de l, l'intersection de toute sous famille finie de ces voisinages, étant elle-même un voisinage de l, rencontre K. Puisque K est compact, l'intersection de tous les éléments de cette famille rencontre K. Or, l'espace étant séparé, cette intersection, qui contient l, ne peut contenir un autre élément. Car sinon si y est un élément quelconque avec $y \neq l$, parmi les F_i, il y en a un qui ne contient pas y (sinon l'espace ne serait pas séparé), et par suite, y n'appartient pas à $\cap_{i \in I} F_i$. On a donc

$$(\cap F_i) \cap K = \{l\} \cap K \neq \emptyset.$$

La preuve du dernier point ne pose aucune difficulté et est laissée comme exercice.

Corollaire Les parties compactes de $I\!R$ sont les parties fermées bornées.

Démonstration

$I\!R$ étant séparé, les compacts de $I\!R$ sont fermés. De plus, ils sont forcément bornés (sinon, on peut contredire la propriété de Borel-Lebesgue). Inversement, si on se donne une partie bornée, elle est contenue dans un intervalle fermé borné qui est compact d'après un résultat qui précède. La partie étant fermée dans un compact elle est compacte.

2. Espaces compacts et applications continues.

Théorème Soit E un espace topologique compact, F un espace topologique séparé et $f : E \to F$ une application continue alors $f(E)$ est une partie compacte de F.

Démonstration

Tout d'abord, $f(E)$ est séparé pour la topologie induite par celle de F puisque F est séparé. On se donne un recouvrement de $f(E)$ par des ouverts $(O_i)_i$ de F, les ouverts $(f^{-1}(O_i))_i$ constituent un recouvrement de E qui est compact. On peut en extraire un sous recouvrement fini qui induira un sous recouvrement fini pour $f(E)$.

On déduit sans difficulté les conséquences suivantes:

Corollaires

1. Soit E un espace topologique compact, F un espace topologique séparé et $f : E \to F$ une application continue alors f est fermée. De plus, si f est bijective, alors f est un homéomorphisme.

2. Soit E un espace topologique compact et $f : E \to I\!R$ une application continue alors f est bornée et atteint ses bornes.

Produits d'espaces compacts

Théorème de Tychonoff

Soit $E = \Pi_{i\in I}E_i$ un produit d'espaces topologiques, E est compact si et seulement si pour tout $i \in I$, E_i est compact.

Remarque

On va montrer ce résultat dans le cas où on a un produit fini, et plus particulièrement dans le cas où on a deux composantes. Lorsque l'ensemble des indices est infini, la démonstration fait appel à des notions qui ne font pas partie du programme de ce cours.

Démonstration Supposons E compact, soit $\{O_i,\ i \in I\}$ et $\{O'_j,\ j \in J\}$ deux recouvrements ouverts respectifs de E_1 et E_2. La famille $\{O_i\text{x}O'_j,\ (i,j) \in I\text{x}J\}$ est un recouvrement ouvert de E. On peut donc en extraire un sous recouvrement fini. Il existe donc un ensemble fini $N \subset I\text{x}J$ tel que $\{O_i\text{x}O'_j,\ (i,j) \in N\}$ recouvre E. Il existe donc un nombre fini $I' \subset I$ d'indices i tel que la famille $\{O_i,\ i \in I'\}$ recouvre E_1 et par suite

E_1 est compact. Il en est de même pour E_2.

Inversement, on suppose que les deux composantes E_1 et E_2 sont compactes et on se donne un recouvrement ouvert $\{W_i,\ i \in I\}$ de E. Chaque ouvert W_i est une réunion de pavés ouverts $U_j^i \text{x} V_j^i$, où U_j^i est un ouvert de E_1 et V_j^i un ouvert de E_2.

Pour tout $y \in E_2$ fixé, l'espace topologique $E_1\text{x}\{y\}$ muni de la topologie induite par celle de E est compact. En effet, on peut se convaincre que l'injection naturelle $i_1 : E_1 \to E_1\text{x}\{y\}$ est un homéomorphisme et E_1 est compact par hypothèse.

Du recouvrement $\cup_{i,j} U_j^i \text{x} V_j^i$, on peut extraire un sous recouvrement fini $\cup_{(i,j)\in M} U_j^i \text{x} V_j^i$ de $E_1\text{x}\{y\}$ où M est un ensemble fini. On peut supposer que chacun des V_j^i contient y. Si on pose $V'_y = \cap_{(i,j)\in M} V_j^i$, V'_y est un voisinage de y dans E_2 et $\cup_{(i,j)\in M} U_j^i \text{x} V'_y$ est un recouvrement ouvert de $E_1\text{x}\{y\}$. Quand y parcourt E_2, on obtient un recouvrement ouvert de E_2 duquel on peut extraire un sous recouvrement fini $V'_{y_1}, ..., V'_{y_k}$. On a finalement obtenu un recouvrement ouvert fini de la forme $\cup_j (\cup_{finie} U_l^k \text{x} V'_{y_j})$ chacun des facteurs $U_l^k \text{x} V'_{y_j}$ étant contenu dans l'un des W_i de départ. D'où un sous recouvrement fini de notre recouvrement initial.

3. Espaces localement compacts et compactification.

Définition Un espace topologique E est **localement compact** si E est séparé et si tout point de E admet un voisinage compact.

Exemples

$*$ $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ sont localement compacts.

$*$ $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ n'est pas localement compact.

Remarque L'intérêt des espaces localement compacts est qu'ils peuvent être compactifiés dans un sens qui sera précisé au théorème suivant, mais ce qui constitue une propriété encore plus importante est que les espaces localement compacts sont des espaces de Baire. Ce type d'espaces n'est pas au programme mais constitue une classe très importante pour des études mathématiques avancées.

Avant d'énoncer le théorème, nous proposons l'exercice suivant qui sera commenté en cours et corrigé en détail en travaux dirigés.

Exercice "La projection stéréographique." Dans $\mathbb{R}^2$, on note S le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Une copie de $\mathbb{R}$ étant $\mathbb{R}\text{x}\{0\}$, on munit S et $\mathbb{R}\text{x}\{0\}$ de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$. On considère l'application $\varphi : S \to \mathbb{R}$ définie comme suit:

Si $N(0,1)$ est le pôle nord de S, et $M(x,y)$ un point quelconque de S différent de N, la droite $\mathcal{D}$ passant par N et M coupe la droite horizontale $\mathbb{R}\text{x}\{0\}$ en un point P d'abscisse

X. On pose alors $\varphi(M) = P$.

Montrer que l'application ainsi définie est un homéomorphisme de $S \setminus \{N\}$ vers $\mathbb{R}$.

S étant compact, on dit que c'est un compactifié de $\mathbb{R}$. On dit aussi que N est le point à l'infini.

Théorème Soit E un espace topologique localement compact, non compact. Il existe un espace topologique compact $\hat{E}$, un élément $\omega \in \hat{E}$ et une application $f : E \to f(E) \subset \hat{E}$ tels que $f(E)$ est dense dans $\hat{E}$, $f(E)^c = \{\omega\}$ et f est un homéomorphisme de E sur $f(E)$.

$\hat{E}$ est le compactifié d'Alexandroff de E et ω est le point à l'infini.

Démonstration On pose $\hat{E} = E \cup \{\omega\}$. On définit sur $\hat{E}$ la topologie pour laquelle les ouverts sont les ouverts de E et les parties de la forme $K^c \cup \{\omega\}$ où K est voisinage compact quelconque (qui existe car E est localement compact). Cette famille d'ouverts, qui contient $\emptyset$ et E, est stable par réunion quelconque et par intersection finie (à vérifier!). Elle constitue donc bien une topologie.

On définit l'application $f : E \to \hat{E}$ par $f(x) = x$. On a donc $f(E) = E$. E est dense dans $\hat{E}$ car pour tout ouvert $O = K^c \cup \{\omega\}$ voisinage de ω, le complémentaire de K dans E, K^c est un ouvert non vide (sinon E serait compact). Ainsi O intersecte E.

Il faut d'abord vérifier que $\hat{E}$ est séparé. Il suffit de vérifier que ω et tout point x de E possèdent dans $\hat{E}$ des voisinages ouverts respectifs disjoints. Pour cela, il suffit de choisir un voisinage ouvert O_x avec $K = \overline{O_x}$ compact et pour ω choisir le voisinage $K^c \cup \{\omega\}$.

Montrons maintenant que $\hat{E}$ est compact. On se donne un recouvrement de $\hat{E}$ par des ouverts $(U_i)_i$. Parmi ces ouverts, certains contiennent ω, notons les $(O_i)_i$ et les autres ne contiennent pas ω, notons les $(O'_i)_i$. Soit O_{i_0} un des ouverts contenant ω, on a $O_{i_0} = K^c \cup \{\omega\}$. Le voisinage compact K est aussi recouvert par la famille $(U_i)_i$, on peut déduire de ce recouvrement de K un recouvrement $(V_i)_i$ par des ouverts de $\mathbb{R}$ obtenus en gardant les ouverts de U_i qui ne contiennent pas ω et en enlevant ω aux ouverts qui le contiennent. Les $(V_i)_i$ constituent un recouvrement de K par des ouverts de $\mathbb{R}$, on peut en extraire un sous recouvrement fini. D'où un recouvrement fini de K par des ouverts de la famille $(U_i)_i$. Si on ajoute à ces ouverts (en nombre fini) O_{i_0}, on obtient, pour $\hat{E}$, un sous recouvrement fini. Ainsi, $\hat{E}$ est compact.

Remarque On a vu que $\overline{\mathbb{R}}$ est un compact contenant $\mathbb{R}$. Mais, on a ajouté dans ce cas deux points $\mathbb{R}$. Il ne s'agit pas du compactifié d'Alexandroff mais d'un autre façon de compactifier.

Les compactifiés d'Alexandroff d'un espace topologique localement compact ne sont pas uniques mais sont uniques à homéomorphisme près. On énonce le résultat:

Théorème Soient $\hat{E}_1$ et $\hat{E}_2$ deux compactifiés d'un même espace topologique localement compact E, f_1, f_2 les applications correspondantes et ω_1, ω_2 les points à l'infini correspondants, alors l'application $\varphi : \hat{E}_1 \to \hat{E}_2$ définie pour tout $x \in f_1(E_1)$ par $\varphi(x) = f_2 \circ f_1^{-1}(x)$ et $\varphi(\omega_1) = \omega_2$ est un homéomorphisme de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$.

Démonstration Montrons la continuité de φ en ω_1 les autres points ne posant pas de problème particulier. Soit $V(\omega_2)$ un ouvert de $\hat{E}_2$ contenant ω_2, le complémentaire de $V(\omega_2)$ dans $\hat{E}_2$ est fermé dans un compact et par suite égal à un compact K. On veut montrer que $\varphi^{-1}(V(\omega_2))$ est ouvert c'est à dire que son complémentaire $(\varphi^{-1}(V(\omega_2)))^c = \varphi^{-1}(K)$ est fermé. Or, K est un compact dans un séparé donc fermé, et f_2 étant un homéomorphisme, son image par f_2^{-1} est fermé dans E, à nouveau l'image de ce fermé par f_1 est fermé pour la même raison. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Suite à une question posée par un étudiant qui se demandait à juste titre si un produit d'espaces localement compacts est localement compact, on suggère l'exercice suivant:

Exercice. Montrer que tout produit fini d'espaces localement compacts est localement compact et qu'un produit infini (dénombrable ou infini non dénombrable) d'espaces localement compacts mais non compacts n'est jamais localement compact. (On donne l'indication suivante pour la seconde partie: Il n'est pas possible de trouver pour un point donné un voisinage pour la topologie produit qui soit compact car l'adhérence de tout pavé ouvert est non compact.)

II. Espaces connexes et espaces localement connexes.

1. Connexité.

Définition Un espace topologique E est dit **connexe** s'il n'existe pas 2 ouverts O_1, O_2 non vides, disjoints et tels que $O_1 \cup O_2 = E$.

Une partie $A \subset E$ est dite connexe si elle est connexe pour la topologie induite par celle de E.

Remarque Dans la définition, on peut remplacer "ouverts" par "fermés".

Proposition Un espace topologique E est connexe si les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E.

Démonstration S'il existait une partie B différente de $\emptyset$ et de E à la fois ouverte et fermée, B et son complémentaire seraient deux ouverts non vides différents de E disjoints dont l'union est E. Ceci prouverait que E ne serait pas connexe. L'autre implication ne pose pas de problème non plus.

Exemple $\mathbb{R}$ est connexe. En effet, montrons que si $\mathbb{R} = O_1 \cup O_2$, où O_1 et O_2 sont deux ouverts disjoints, avec $O_1 \neq \emptyset$, alors $O_2 = \emptyset$.

Supposons l'existence d'un élément $c \in O_1^c$. Il existe un élément $d \in O_1$ tel que ou bien $d < c$ ou bien $d > c$. Supposons par exemple $d < c$ et considérons l'ensemble

$$O = \{x \in O_1,\ x < c\}.$$

O est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, elle admet donc une borne supérieure α. α n'appartient pas à O_1 car sinon comme O_1 est ouvert, il contiendrait un intervalle ouvert contenant α et α ne serait alors pas la borne supérieure de O. α est un point adhérent à O_1 qui en même temps appartient à $O_1^c = O_2$. Mais alors, O_2 ne serait plus ouvert car il n'existe pas d'intervalle ouvert contenant α et contenu dans O_2, d'où une contradiction. Par conséquent, $\mathbb{R}$ est connexe.

Conséquence Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes.

Ceci se démontre de la même façon sachant que les ouverts de l'intervalle sont les traces sur l'intervalle des ouverts de $\mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}$ n'est pas connexe pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. Par exemple, les deux parties $]-\infty, \sqrt{2}[\cap\, \mathbb{Q}$ et $]\sqrt{2}, +\infty[\cap\, \mathbb{Q}$ sont deux ouverts de $\mathbb{Q}$ non vides disjoints dont la réunion est $\mathbb{Q}$.

Le théorème suivant permet de caractériser les connexes de $\mathbb{R}$ et de $\overline{\mathbb{R}}$:

Théorème Une partie A de $\mathbb{R}$ ou de $\overline{\mathbb{R}}$ est connexe si et seulement si A est un intervalle.

Démonstration Si A est un intervalle on procède comme ci-dessus pour $\mathbb{R}$. Supposons que A est connexe sans être un intervalle. Il existe donc $c \notin A$, et α, $\beta \in A$ tels que $\alpha < c < \beta$. Comme pour $\mathbb{Q}$, on peut alors proposer deux ouverts non vides disjoints de la partie A dont la réunion est A, par exemple $]-\infty, c[\cap\, A$ et $]c, +\infty[\cap\, A$.

Propriétés Dans un espace topologique E, on a les propriétés suivantes:

1. Si A est connexe alors toute partie B vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe. En particulier, $\overline{A}$ est connexe.

2. <u>*Passage de la douane.*</u> Si une partie connexe A rencontre l'intérieur d'une partie B et l'extérieur de B (c'est à dire l'intérieur du complémentaire de B) où B est une partie non vide, alors A rencontre la frontière de B. C'est à dire $A \cap \ Fr(B) \neq \emptyset$.

3. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de connexes telles que $A_i \cap \ A_j \neq \emptyset$ pour $i, j \in I$, alors $\cup_{i\in I} A_i$ est connexe.

Démonstration On suppose $B = (O_1 \cap B) \cup \ (O_2 \cap B)$. Ceci donnera un recouvrement de A par deux ouverts $A \cap \ O_1$ et $A \cap \ O_2$. A étant connexe, l'un de ces ouverts est forcément vide, par exemple $A \cap \ O_1$. On aura donc $A \subset O_1^c$ et aussi $\bar{A} \subset O_1^c$ puisque O_1^c est un fermé contenant A. On a donc aussi $B \subset O_1^c$ et donc $B \cap \ O_1 = \emptyset$. Ainsi B est connexe.

Pour le deuxième point, si A ne rencontre pas $Fr(B)$, alors on peut recouvrir A par deux ouverts non vides disjoints qui sont $(A \cap \ int(B))$ et $(A \cap \ int(B^c))$. Ceci recouvre bien A car si $x \in A$ alors ou bien $x \in int(B)$ ou bien $x \in int(B^c)$. En effet, si $x \notin int(B)$ alors $x \in \bar{B}^c$ et si $x \notin int(B^c)$ alors $x \in \overline{B}$. Par suite si $x \notin int(B) \cup \ int(B^c)$ alors $x \in Fr(B)$ et selon l'hypothèse, $x \notin A$. Ainsi si A n'intersecte pas $Fr(B)$, A peut être recouvert par deux ouverts non vides disjoints. Or, ceci contredit la connexité de A. A doit donc intersecter la frontière de B.

Pour le dernier point, on suppose qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $\cup_{i\in I} A_i \ \subset \ U \cup \ \ V$ nous allons montrer qu'on a ou bien $\cup_{i\in I} A_i \cap \ \ U \ = \ \emptyset$, ou bien $\cup_{i\in I} A_i \cap \ \ V = \emptyset$. U et V recouvrent chaque A_i et puisque A_i est connexe pour tout $i \in I$, on a $A_i \cap \ U = \emptyset$ ou $A_i \cap \ V = \emptyset$. On affirme alors qu'on est dans l'un des deux cas suivants: Ou bien $A_i \cap \ U = \emptyset$ pour tout $i \in I$, ou bien $A_i \cap \ V = \emptyset$ pour tout $i \in I$. En effet, supposons qu'il existe $i \neq j$ tels que $A_i \cap \ U = \emptyset$ et $A_j \cap \ V = \emptyset$, mais comme il existe $x \in A_i \cap \ A_j$, x ne serait ni dans U ni dans V. Or U et V recouvrent $\cup_{i\in I} A_i$, ceci est une contradiction.

Théorème Soit $f : E \to F$ une application continue entre espaces topologiques, si E est connexe alors $f(E)$ est connexe.

Démonstration On se donne un recouvrement de $f(E)$ par deux ouverts disjoints, puisque f est continue, cela donnera un recouvrement de E par deux ouverts disjoints. Puisque E est connexe, l'un de ces ouverts doit être vide et par suite l'un des ouverts du recouvrement de $f(E)$ doit être vide. Ainsi, $f(E)$ est connexe.

Remarque L'image réciproque d'un connexe par une application continue n'est pas connexe en général. Par exemple, si $f : I\!R \to I\!R$ est définie par $f(x) = |x|$ et $O =]1, +\infty[$ alors $f^{-1}(O) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ n'est pas connexe.

Le théorème de la valeur intermédiaire est une conséquence du théorème précédent. On énonce le théorème.

Théorème Soit E un espace topologique connexe et $f : E \to I\!R$ une application continue. Si a et b sont deux éléments de $f(E)$ avec $a < b$, alors pour tout c vérifiant $a < c < b$, il existe $\alpha \in E$ tel que $f(\alpha) = c$.

Théorème Soit $I \subset I\!R$ un intervalle et $f : I \subset I\!R \to I\!R$ une application continue alors les trois points suivants sont équivalents:
(i) f est strictement monotone
(ii) f est fermée
(iii) f est ouverte.

Démonstration

Nous allons montrer "strictement monotone" $\to$ "ouverte" $\to$ "fermée" $\to$ "strictement monotone".

Supposons par exemple que f est strictement croissante et soit $x \in O$ où O est un ouvert de I. Deux cas se présentent selon que x est un point intérieur de I ou pas. Si x est intérieur alors il existe un intervalle $K =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O \subset I$ et dans ce cas, $f(K) =]f(x - \varepsilon), f(x + \varepsilon)[\subset f(O) \subset f(I)$ car $f(K)$ est un intervalle et f est strictement croissante. Ceci montre donc que $f(O)$ est un ouvert. Si x se trouve à l'extrêmité de I, par exemple à gauche, alors il existe un $\varepsilon > 0$ pour lequel $L = [x, x + \varepsilon[\subset O \subset I$. On a alors $f(L) = [f(x), f(x + \varepsilon)[\subset f(O) \subset f(I)$. $f(L)$ est bien un ouvert de $f(I)$ pour la topologie induite contenu dans $f(O)$. Par conséquent, l'application f est ouverte.

Supposons f ouverte et soit F un fermé de I. On a $f(F) \cup f(F^c) = f(I)$, et comme F^c est un ouvert, $f(F^c)$ est un ouvert de $f(I)$. Son complémentaire $f(F)$ est donc un fermé de $f(I)$, f est donc fermée.

Si f est fermée, nous allons d'abord montrer que f est injective puis que f est strictement monotone. Soit x et y deux éléments de I, avec par exemple $x < y$. L'image de l'intervalle fermé $[x, y]$ est un intervalle fermé noté $[\alpha, \beta]$. On a ou bien $f(x) = \alpha$ ou bien $f(x) = \beta$ car si $f(x)$ était un point intérieur l'image par f du connexe $]x, y]$ ne serait pas connexe. De même, $f(y)$ est aussi une extrêmité. Ce qui prouve que x et y ont des images différentes et donc f est injective.

Il reste à montrer que f est strictement monotone. Pour cela, supposons par exemple qu'il existe $a < b < c$ tels que $f(a) < f(b)$ mais $f(b) > f(c)$, il y aurait alors un élément de $f(I)$ qui aurait deux antécédents et f ne serait pas injective.

Proposition Soit E_i, $i \in I$, une famille de parties d'un espace topologique E. $\Pi_{i \in I} E_i$ est connexe si et seulement si E_i est connexe pour tout $i \in I$.

Démonstration

Si $\Pi_{i\in I}E_i$ est connexe, alors pour tout $i \in I$, puisque l'application p_i est continue, l'image $p_i(\Pi_{i\in I}E_i) = E_i$ est donc connexe.

Inversement, on suppose que les E_i, $i \in I$, sont connexes. Montrons que $\Pi_{i\in I}E_i$ est connexe. On suppose donnés deux ouverts U et V (pour la topologie produit) dont l'intersection est vide et tels que $U\cap \Pi_{i\in I}E_i$ et $V\cap \Pi_{i\in I}E_i$ recouvrent $\Pi_{i\in I}E_i$. Les projections p_i étant des applications ouvertes, pour tout $i \in I$, $p_i(U\cap \Pi_{i\in I}E_i)$ et $p_i(V\cap \Pi_{i\in I}E_i)$ sont des ouverts de E_i qui recouvrent E_i. E_i étant connexe, l'un de ces ouverts est vide. Supposons par exemple $p_i(U\cap \Pi_{i\in I}E_i) = \emptyset$ et on fixe un tel indice $i = i_0$. On fait de même pour un autre indice $i_1 \in I$. Forcément, on a ici aussi $p_{i_1}(U\cap \Pi_{i\in I}E_i) = \emptyset$. Sinon, supposons $p_{i_1}(V\cap \Pi_{i\in I}E_i) = \emptyset$ et soit $a = (a_i)_i$ un élément du produit. Cet élément ne peut pas appartenir à $U\cap \Pi_{i\in I}E_i$ car sinon sa projection $p_{i_0}(a)$ appartiendrait à $p_{i_0}(U\cap \Pi_{i\in I}E_i)$ qui a été supposé vide. De même, il ne peut pas appartenir à $V\cap \Pi_{i\in I}E_i$ car sinon sa projection $p_{i_1}(a)$ appartiendrait à $p_{i_1}(V\cap \Pi_{i\in I}E_i)$ qui a été lui aussi supposé vide. Par suite a n'appartiendrait pas à $\Pi_{i\in I}E_i$ ce qui est absurde. Ainsi, en itérant le raisonnement précédent, on obtient que pour tout $i \in I$, $p_i(U\cap \Pi_{i\in I}E_i)$ est vide et par suite, $U\cap \Pi_{i\in I}E_i$ est vide. On a montré que le produit $\Pi_{i\in I}E_i$ est connexe.

2. Connexité par arcs.

Définition Un espace topologique est dit connexe par arcs si pour tous a et b deux éléments distincts de E, il existe une application $f : [0,1] \to E$ continue telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

On peut aussi définir la connexité par arcs pour une partie de E en considérant la toplogie induite sur cette partie par celle de E. Un des principaux intérêt de la connexité par arcs est souligné dans la proposition suivante:

Proposition Un espace topologique connexe par arcs est connexe.

Démonstration Si E n'était pas connexe, il y aurait deux ouverts U et V disjoints non vides et dont la réunion serait E. On choisit $a \in U$ et $b \in V$, d'après la connexité par arcs, il existe une application f continue définie sur $[0,1]$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ seraient deux ouverts disjoints non vides qui recouvriraient l'intervalle $[0,1]$. Or, nous avons vu que les intervalles sont connexes. E est donc connexe.

Remarque Un espace connexe n'est pas forcément connexe par arcs (voir ci-dessous un contre exemple classique). Par contre, on peut montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ connexe est connexe par arcs.

Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi(x) = sin(1/x)$. La partie formée par la réunion du graphe de ϕ et du segment $\{0\}$x$[-1, 1]$ est connexe mais non connexe par arcs.

Nous allons clore ce chapitre par deux définitions puis nous indiquerons une application de la connexité.

Composantes connexes

Définition Une partie $A \subset E$ est dite composante connexe si A est connexe et s'il n'existe pas de partie connexe contenant strictement A.

Les composantes connexes sont fermées. En effet, l'adhérence de tout connexe est connexe.

3. Espaces localement connexes.

Définition Un espace est dit localement connexe si tout point possède un système fondamental de voisinages connexes.

Remarque. On ne fait ici que donner la définition mais on veut préciser l'importance de ces espaces notamment dans le cadre des espaces vectoriels topologiques en association avec les seminormes. Ces concepts n'entrent pas dans le cadre de ce module.

Application de la connexité: Exercice Montrer qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ ne peut être homéomorphe à un disque de $\mathbb{R}^2$.

Solution : S'ils étaient homéomorphes alors en retirant un élément de l'intervalle et un élément du disque, les deux parties obtenues, munies des topologies induites, seraient elles aussi homéomorphes. Or, le disque privé d'un point reste connexe car il est connexe par arcs alors que l'intervalle privé d'un point n'appartenant pas au bord n'est plus connexe. Il n'existe donc pas d'homéomorphisme entre un intervalle de $\mathbb{R}$ et un disque de $\mathbb{R}^2$.

Appendice 1: Sur l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$.

On se propose de démontrer le théorème suivant:

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, on suppose que F est complet. Si $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues muni de la norme $||.||$ définie par: $||f|| =\mathbf{sup}_{||x||_E \leq 1} ||f(x)||_F$ alors c'est un espace complet.

Nous avons montré que l'espace $A = \mathcal{C}([a, b], I\!R)$, muni de la norme $||f||_A = sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ est complet.

1. Soit F un espace vectoriel normé quelconque, on considère l'espace vectoriel $B = \mathcal{C}([a, b], F)$ muni de la norme $||f||_B = sup_{x\in[a,b]}||f(x)||_F$.

1a. Justifier que cette norme est bien définie, c'est à dire que si $f \in B$ alors $\{||f(x)||_F, x \in [a, b]\}$ est borné. (On suppose le contraire, c'est à dire l'existence d'une suite $(x_n)_n$ dans $[a, b]$ telle que $||f(x_n)||_F \geq n$ et on déduit une contradiction.)

1b. On suppose que F est complet et on se donne une suite d'applications $(f_n)_n$ dans B de Cauchy, c'est à dire telle que: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in I\!N$, si $n, p \geq N$, $||f_n - f_p||_B < \varepsilon$. Vérifier rapidement (comme dans A) les points suivants:

(i) $\forall x \in [a, b]$, la suite $(f_n(x))_n$ admet une limite dans F. (On note $f(x) =\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.)

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ n \geq N,\ ||f_n - f||_B \leq \varepsilon$.

(iii) La limite f est continue en x_0, $\forall x_0 \in [a, b]$.

2. On se donne un autre espace vectoriel normé E et on note, pour tout $k \in I\!N^*$, $B(0, k)$ la boule dans E de centre 0 et de rayon k. On note $E_k = \mathcal{C}_b(B(0, k), F)$ l'espace vectoriel des applications définies, continues et **bornées** sur $B(0, k)$ et à valeurs dans F. Pour tout $f \in E_k$, on pose $||f||_k =\sup_{x\in B(0,k)} ||f(x)||_F$.

2a. Vérifier rapidement que E_k est un espace vectoriel normé complet. (On s'assurera que toutes les étapes de 1b. sont vérifiées pour cet espace.) Ainsi si $(f_{k,n})_n$ est une suite de Cauchy dans E_k alors elle converge vers un élément $f_k \in E_k$.

2b. Justifier que si $k' \in I\!N$ vérifie $k' > k$ et si $(f_{k',n})n$ est une suite de Cauchy dans $E_{k'}$ alors la suite des restrictions $(f_{k,n} = f_{k',n}|_{B(0,k)})_n$ est de Cauchy dans E_k et que la limite des restrictions est égale à la restriction de la limite, c'est à dire qu'on a: $f_k = f_{k'}|_{B(0,k)}$.

3. A présent, on considère l'e.v.n. $\mathcal{L}(E, F)$ où F est supposé complet et on se donne une suite de Cauchy $(g_n)_n$ dans $\mathcal{L}(E, F)$.

3a. Pour tout $k \in I\!N^*$, on pose $g_{k,n} = g_n|_{B(0,k)}$. En utilisant le fait que les g_n sont linéaires, montrer qu'on a $||g_{k,n}||_k \leq k.||g_n||$.

3b. Déduire que, $\forall k \in I\!N^*$, la suite $(g_{k,n})_n$ est de Cauchy dans E_k. Ce dernier étant complet d'après 2a, on note $g_k =\lim_{n\to+\infty} g_{k,n}$.

3c. On considère $g \in \mathcal{L}(E, F)$ définie par $g|_{B(0,k)} = g_k$.

Justifier que g est linéaire et continue en tout $x \in E$.

En remarquant que $\sup_{||x||_E\leq 1}||(g_n - g)(x)||_F \leq \sup_{||x||_E\leq k}||(g_{k,n} - g_k)(x)||_F$, conclure que $||g_n - g||$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Corrigé

1a. On raisonne par l'absurde, s'il existe une suite $(x_n)_n$ dans $[a, b]$ telle que $||f(x_n)||_F \geq n$, puisque l'intervalle $[a, b]$ est compact, la suite admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente vers λ. La fonction étant continue, la suite des images $(f(x_{\varphi(n)}))_n$ doit être convergente vers $f(\lambda)$ et donc bornée, ce qui contredit l'hypothèse $||f(x_{\varphi(n)})||_F \geq \varphi(n)$. Ainsi, pour tout $f \in B$, l'ensemble $\{f(x), x \in [a, b]\}$ est borné.
1b. (i) Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans B muni de la norme $||\ .\ ||_B$, alors pour tout $x \in [a, b]$, on a $||\ f_n(x) - f_m(x)\ ||_F \leq ||\ f_n - f_m\ ||_B < \varepsilon$, si n et m sont supérieurs à un entier convenable. Par conséquent, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans F qui est complet. Elle est donc convergente vers une limite qui dépend de x et qu'on note $f(x)$.
(ii) On sait que $\forall \varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que si $n, m \geq N_\varepsilon$, alors $||\ f_n(x) - f_m(x)\ ||_F < \varepsilon$, ceci pour tout $x \in [a, b]$. Si on fait tendre m vers $+\infty$ alors, par passage à la limite, on aura $||\ f_n(x) - f(x)\ ||_F < \varepsilon$, ceci pour tout $x \in [a, b]$ et donc $||\ f_n - f\ ||_B < \varepsilon$, si $n \geq N_\varepsilon$.
(iii) Pour établir la continuité de f, on décompose:

$$||\ f(x) - f(x_0)\ ||_F \leq ||\ f(x) - f_n(x)\ ||_F + ||\ f_n(x) - f_n(x_0)\ ||_F + ||\ f_n(x_0) - f(x_0)\ ||_F\ .$$

On choisit n assez grand pour avoir $||\ f_n - f\ ||_B < \varepsilon$ (ce qui est possible d'après la question précédente). Pour ce n choisi, la fonction f_n est continue en x_0 quel que soit $x_0 \in [a, b]$, il existe donc $\eta > 0$ tel que si $|\ x - x_0\ | < \eta$, $x, x_0 \in [a, b]$, alors $||\ f_n(x) - f_n(x_0)\ ||_F < \varepsilon$. On obtient finalement $||\ f(x) - f(x_0)\ ||_F \leq 3\varepsilon$ si $|\ x - x_0\ | < \eta$, $x, x_0 \in [a, b]$. f est donc continue en x_0, pour tout $x_0 \in [a, b]$.
2a. Tout d'abord, la norme $||\ f\ ||_k$ est bien définie pour tout $f \in E_k$ car f est supposée bornée. Si on se donne une suite de Cauchy $(f_{k,n})_n$ dans E_k, alors, comme précédemment, pour tout $x \in B(0, k)$, la suite $(f_{k,n}(x))_n$ est de Cauchy dans F qui est complet, elle converge donc vers un élément de F noté $f_k(x)$.
On aura alors, par passage à la limite ici aussi, $||\ f_{k,n} - f\ ||_k < \varepsilon$ si n est supérieur à un certain rang. La continuité de f en n'importe quel $x_0 \in B(O, k)$ se déduit comme dans 1c. avec, cette fois-ci, l'intervalle $[a, b]$ remplacé par $B(0, k)$ et la valeur absolue par la norme dans E.
2b. Soit $k' \in I\!N$ vérifiant $k' > k$ et $(f_{k',n})n$ est une suite de Cauchy dans $E_{k'}$. la suite des restrictions $(f_{k,n} = f_{k',n}|_{B(0,k)})_n$ vérifie $||\ f_{k,n} - f_{k,m}\ ||_k \leq ||\ f_{k',n} - f_{k',m}\ ||_{k'}$. La suite des restrictions est de Cauchy dans E_k, elle est donc convergente vers une limite notée f_k. Soit $x \in B(0, k)$ quelconque, puisque les deux suites $(\mathrm{f}_{k,n}(x))_n$ et $(\mathrm{f}_{k',n}(x))_n$ sont les mêmes, les limites sont égales, c'est à dire $f_k(x) = f_{k'}(x)$.
3a. Remarquons d'abord que si $g \in \mathcal{L}(E, F)$, alors sa restriction g_k à la boule $B(0, k)$ est bien un élément de E_k. Soit $x \in B(0, k)$ non nul, alors $||g_{k,n}(\frac{x}{||x||_k})||_F \leq \sup_{||y||_k=1}\ ||$

$g_n(y) \ ||_F = ||g_n||_{\mathcal{L}(E,F)}$. Puisque $x \in B(0,k)$, on a $||\ x\ ||_k \leq k$ et donc $||g_{k,n}(x)||_F \leq k||g_n||_{\mathcal{L}(E,F)}$. En passant au sup pour les $x \in B(0,k)$, on a l'inégalité souhaitée.

3b. D'après ce qui précède, on a: $||g_{k,n} - g_{k,m}||_k \leq k.||g_n - g_m||_{\mathcal{L}(E,F)}$. La suite $(g_{k,n})_n$ est donc de Cauchy dans E_k, elle converge (d'après 2a.) vers un élément de E_k noté g_k.

3c. Soient x, y quelconques dans E et k assez grand pour avoir x, y et $x+y$ tous dans E_k. On a clairement, $g(x+y) = g_k(x+y) = \lim_n g_{k,n}(x+y) = \lim_n g_n(x+y) = \lim_n g_n(x) + g_n(y) = g_k(x) + g_k(y) = g(x) + g(y)$. L'autre égalité se démontrant de la même manière, la limite g est bien linéaire. Pour justifier que g est continue, il suffit de le montrer en 0, or comme $0 \in B(0,1)$ et que g_1 est la restriction de g à la boule $B(0,1)$ et que g_1 est continue en 0, g l'est aussi.

L'inégalité écrite provient simplement de l'inclusion $B(0,1) \subset B(0,k)$, pour tout $k \geq 1$. Puisque la suite $(g_{k,n})_n$ converge dans E_k vers g_k, on aura bien $||g_n - g||_{\mathcal{L}(E,F)}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Appendice 2: Espaces de fonctions et théorème d'Ascoli.

On se place dans des espaces topologiques particuliers qui sont des espaces de fonctions. On cherche à mieux comprendre les parties compactes dans ce type d'espaces. le théorème d'Ascoli permet de mieux comprendre certaines classes de parties compactes dans un espace de fonctions continues.

I. Généralités

Pour deux espaces topologiques E et F, on note $F^E = \{f : E \to F\}$ l'ensemble des applications de E vers F. On note aussi cet ensemble par $\Pi_{x\in E} F_x$, avec la convention suivante:

Une fonction f peut être confondue avec un élément de $\Pi_{x\in E} F_x$ si on admet que l'image $f(x)$ appartient à F_x (les F_x étant tous des ensembles identifiés à F).

Le produit $\Pi_{x\in E} F_x$ peut être fini, dénombrable ou infini non dénombrable.

On munit l'ensemble F^E de la topologie produit qui en fait un espace topologique. On rappelle que les ouverts de F^E sont les réunions quelconques de pavés, où un pavé est une partie intersection finie de la forme

$$p_{x_1}^{-1}(O_{x_1}) \cap ... \cap p_{x_n}^{-1}(O_{x_n}).$$

Si on prend par exemple l'ouvert $U = p_{x_1}^{-1}(O_{x_1}) \cap ... \cap p_{x_n}^{-1}(O_{x_n})$, alors une fonction f appartient à U ssi $f(x_1) \in O_{x_1}$,...,$f(x_n) \in O_{x_n}$.

La proposition suivante explique la raison pour laquelle cette topologie s'appelle la topologie de la convergence simple.

Proposition Une suite $(f_n)_n$ converge vers f pour la topologie produit si et seulement si $\forall x \in E$, la suite $(f_n(x)_n$ converge vers $f(x)$.

Démonstration Soit $x \in E$ un élément quelconque, montrons que $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. Soit O_x un ouvert de F contenant $f(x)$, l'ouvert $V = p_x^{-1}(O_x)$ contient f. Puisqu'on a supposé que la suite $(f_n)_n$ converge vers f pour la topologie produit, si n est assez grand, f_n est élément de V. Or, ceci signifie que $f_n(x)$ appartient à O_x si n est assez grand.

Inversement, supposons donnée une suite de fonctions $(f_n)_n$ telle que $\forall x \in E$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$, montrons que la suite $(f_n)_n$ converge vers f pour la topologie produit. On se donne donc un voisinage de f noté $O(f)$, qui contient un ouvert contenant f. Cet ouvert étant une réunion quelconque de pavés, on peut supposer que f appartient à l'un de ces pavés. Si ce pavé est noté P, alors P est de la forme

$$P = p_{x_1}^{-1}(O_{x_1}) \cap ... \cap p_{x_n}^{-1}(O_{x_n}).$$

Pour x_1, il existe N_1 tel que si $n \geq N_1$, on a $f_n(x_1) \in O_{x_1}$. On fait de même pour x_2,...,x_n. Si on pose $N = sup\{N_1, ..., N_n\}$, nous avons garanti que pour $n \geq N$, $f_n \in P$. Par suite, la suite $(f_n)_n$ converge vers f pour la topologie produit.

Si F est un espace métrique muni d'une distance notée d_F, on peut définir sur F^E une autre topologie, celle de la convergence uniforme, de la façon suivante:

Si $f, g \in F^E$, on pose

$$d(f,g) = sup_{x \in E} d_F(f(x), g(x)),$$

cette valeur pouvant être "$+\infty$". On peut se ramener à des valeurs finies, en remplaçant la distance d_F de F par une distance d'_F qui lui est uniformément équivalente. Par exemple, on peut poser $d'_F = inf\{d_F, 1\}$. Dorénavant, on peut supposer que la distance d définie sur F^E est finie. Ainsi, F^E est aussi un espace métrique, où la topologie associée est celle de la convergence uniforme. On peut comparer les deux topologies:

Proposition

La topologie de la convergence uniforme est plus fine que celle de la convergence simple.

Démonstration Il suffit de s'assurer que si O est un ouvert pour la topologie de la convergence simple alors O est un ouvert pour la topologie de la convergence uniforme. Supposons donc qu'on a

$$O = p_{x_1}^{-1}(O_{x_1}) \cap ... \cap p_{x_n}^{-1}(O_{x_n}).$$

Soit $f \in O$, on a donc $f(x_i) \in O_{x_i}$ pour $i = 1, ..., n$. Chaque O_{x_i} contient une boule ouverte de F centrée en $f(x_i)$ et de rayon r_i. On peut trouver une boule centrée en f et de rayon convenable (qui est un ouvert pour la topologie de la convergence uniforme) contenue dans O. En effet, si on pose $r = inf\{r_1, ..., r_n\}$, alors la boule (dans F^E) de centre f et de rayon r convient. On a garanti que si $g \in B(f,r)$, alors $g(x_i) \in O_{x_i}$ pour $i = 1, ..., n$ et par suite $B(f,r) \subset O$.

Théorème Soit E un espace topologique, (F, d_F) un espace métrique et $f_n : E \to F$ une suite de fonctions continues telles que la suite $(f_n)_n$ converge vers une limite f pour la topologie de la convergence uniforme, alors f est continue.

Démonstration Il suffit d'écrire:

$$d_F(f(x), f(x')) \leq d_F(f(x), f_n(x)) + d_F(f_n(x), f_n(x')) + d_F(f_n(x'), f(x')),$$

puis de choisir n assez grand pour que

$$d_F(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3, \forall x \in E,$$

et enfin de remarquer que $d_F(f_n(x), f_n(x')) < \varepsilon/3$ si x' appartient à un voisinage convenable de x.

Corollaire L'espace des fonctions continues $\mathcal{C}(E, F)$ est un fermé de F^E pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème de Dini Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur E, à valeurs réelles et continues. On suppose que E est un espace topologique compact et que la suite $(f_n)_n$ est monotone. Si la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction continue f alors $(f_n)_n$ converge vers f pour la topologie de la convergence uniforme.

Démonstration On suppose la suite $(f_n)_n$ croissante, sinon on peut s'y ramener en considérant la suite $(-f_n)_n$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, on pose $F_n = \{x,\ |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$. On souhaite montrer que les F_n sont vides à partir d'un certain rang N, cela prouvera que si $n \geq N$, $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, ceci $\forall x \in E$.

D'après les hypothèses, $(F_n)_n$ est une suite décroissante de fermés. Puisque la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f, on a:

$$\cap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset.$$

E étant compact, d'après la propriété de Borel-Lebesgue, on peut en extraire une sous famille finie d'intersection vide. Cela signifie que les F_n sont vides à partir d'un certain rang. Ce qu'il fallait montrer.

II. Familles équicontinues

Soit E un espace topologique, (F, d) un espace métrique et A une partie de F^E.

Définitions Soit $a \in E$, on dit que la famille A est équicontinue en a si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un voisinage $V(a) \subset E$, tel que $\forall x \in V(a)$, on a $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ ceci $\forall$f$\in A$.

On dit que A est équicontinue si A est équicontinue en tout $a \in A$.

On dit que A est uniformément équicontinue si (E, δ) est métrique et si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $\delta(x, y) < \eta$ alors $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ceci $\forall f \in A$, $\forall x, y \in E$.

Exemples

* La famille de fonctions $A = \{f_n,\ n \in I\!N\}$ avec $f_n : [0, 1] \to I\!R$, $f_n(x) = sin(nx)$, n'est pas équicontinue en 0.

* La famille de fonctions $B = \{f_n,\ n \in I\!N\}$ avec $f_n : [0, 1] \to I\!R$, $f_n(x) = sin(x/(n + 1))$ est équicontinue en tout $x \in [0, 1]$. Elle est même uniformément équicontinue.

(En effet, on a $|sin(x/(n + 1)) - sin(x'/(n + 1))| \leq |x - x'|$)

Proposition

1. Si A est équicontinue en a alors $\forall f \in A$, f est continue en a.(La réciproque est fausse)
2. Si A est une famille finie d'applications continues alors A est équicontinue.
3. Si on ajoute une fonction continue à une famille équicontinue, la famille obtenue est équicontinue.
4. La réunion de deux familles équicontinues est une famille équicontinue.

Théorème Soit E un espace toplogique séparé, F un espace métrique et F^E qu'on suppose muni de la topologie de la convergence simple. Si $A \subset F^E$ est équicontinue en a, alors $\overline{A}$ est équicontinue en A.

Démonstration On se donne $f \in \overline{A}$ et soit $(f_n)_n$ une suite dans A qui converge simplement vers une fonction f. D'après l'hypothèse, on a $d(f_n(x), f_n(a)) \leq \varepsilon$ si $x \in V(a)$. Par passage à la limite, on déduit que $d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$ si $x \in V(a)$ et donc que $\overline{A}$ est équicontinue.

Corollaire Si une suite d'applications $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f, si $\forall n \in I\!N$, $f_n \in A$ où A est une famille équicontinue alors f est continue.

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le théorème d'Ascoli:

Théorème d'Ascoli Soit E un espace métrique compact, $\mathcal{C}(E,F)$ l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme et $A \subset \mathcal{C}(E,F)$. On a l'équivalence:

1. $\overline{A}$ est compact.
2. $\forall x \in A$, $\overline{\{f(x),\ f \in A\}}$ est compact et A est équicontinue.

Démonstration Supposons le premier point, et considérons, pour $x \in E$ fixé, l'application

$$\phi : \mathcal{C}(E,F) \longrightarrow F$$

$$f \mapsto \phi(f) = f(x).$$

Cette application est continue pour la topologie de la convergence simple, et donc pour la topologie de la convergence uniforme. On en déduit que la partie $\phi(\overline{A}) = \{f(x),\ f \in \overline{A}\}$ est compacte dans F qui est séparé, $\phi(\overline{A})$ est donc aussi fermée. Cette partie contient aussi $\overline{\{f(x),\ f \in A\}}$ qui est par conséquent compact. Ceci démontre le premier point.

Montrons à présent que A est équicontinue. en tout $x \in E$.

L'espace $\mathcal{C}(E,F)$ étant fermé pour la topologie de la convergence uniforme, A étant une partie de cet espace, son adhérence $\overline{A}$ est aussi contenue dans $\mathcal{C}(E,F)$. Cet espace étant métrique, on peut donc pour tout $\varepsilon > 0$, recouvrir $\overline{A}$ par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon/3$, $B(f_1, \varepsilon/3), ..., B(f_p, \varepsilon/3)$, où f_1,...,f_p sont des éléments de $\overline{A}$. Pour $x \in E$, on a $d(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon/3$ si y appartient à un voisinage convenable $V_i(x)$.

Si on pose $V = \cap_{i=1,\dots,p} V_i(x)$, et si $f \in A$, alors $\forall y \in V(x)$, on a $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. En effet, il suffit d'écrire

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y))$$

lorsque $f \in B(f_i, \varepsilon/3)$. Ceci prouve que A est équicontinue en x. x étant quelconque, A est donc équicontinue.

Inversement, montrons que $\overline{A}$ est compact. Pour cela, on se donne une suite $(h_n)_n$ dans $\overline{A}$, et on veut montrer qu'elle admet une sous suite convergente (pour la topologie de la convergence uniforme). On peut se ramener à une suite dans A, en choisissant pour chaque n, une fonction $f_n \in A$ telle que $d(h_n, f_n) < 2^{-n}$. Si on montrer que la suite $(f_n)_n$ admet une sous suite $(f_{n_p})_p$ convergente, alors la sous suite $(h_{n_p})_p$ sera aussi convergente.

Tout d'abord, puisque (E, δ) est compact, on peut pour tout entier n recouvrir E par des boules $B(x_1^n, 2^{-n}), ..., B(x_{p_n}^n, 2^{-n})$. Lorsque n parcourt $\mathbb{N}$, les centres de toutes ces boules forment une famille dénombrable $E' = \{x_0, x_1, ...\}$ qui est dense dans E. Pour

x_0, la suite $(f_n(x_0))_n$ appartient à $\overline{A_{x_0}}$ qui est supposé compact, cette suite admet donc une sous suite convergente $(f_{n_p^0}(x_0))_p$. On considère à présent la suite $(f_{n_p^0}(x_1))_p$ qui appartient elle aussi à un compact, elle admet une sous suite convergente que nous allons noter $(f_{n_p^1}(x_1))_p$. On construit ainsi par récurrence, pour tout l, une famille de sous suite $(f_{n_p^l}(x_l))p$ avec $(f_{n_p^{l+1}})_p$ sous suite de $(f_{n_p^l})_p$.

La suite diagonale $(f_{n_p^p})_p$ converge simplement sur E'. Si on montre qu'elle converge uniformément sur E, alors on aura exhibé une sous suite qui converge pour la topologie de la convergence uniforme et on aura montré que $\overline{A}$ est compact.

Puisque la famille A est équicontinue en a_i, on a pour tout $f, g \in A$, $d(f(x), f(a_i)) < \varepsilon$ et $d(g(x), g(a_i)) < \varepsilon$ si $\delta(x, a_i) < \eta$. Par compacité de E, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules $B(a_i, \eta)$ où les a_i sont des éléments de E'.

Pour tout $x \in E$, il existe un indice i tel que $x \in B(a_i, \eta)$, on écrit alors

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(a_i)) + d(f(a_i), g(a_i)) + d(g(a_i), g(x)).$$

Les a_i étant en nombre fini, si f est assez proche de g pour la topologie de la convergence simple sur E', on aura $d(f(a_i), g(a_i)) < \varepsilon$ pour tout i et par suite $d(f(x), g(x)) < 3\varepsilon$ pour tout $x \in E$.

Nous avons donc bien obtenu que lorsque f est assez proche de g pour la topologie de la convergence simple sur E', f est assez proche de g pour la topologie de la convergence uniforme (sur E).

Application La partie $B = \{f_n,\ n \in I\!N\}$ avec $f_n : [0,1] \to I\!R$, $f_n(x) = sin(x/(n+1))$ est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}([0,1], I\!R)$. On vérifie aisément les conditions du théorème.

Quelques séries d'exercices traités en travaux dirigés avec corrigés.

Série 1

Exercice 1. Soit a, b deux réels strictement positifs. On pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

1. Prouver que N est une norme.
2. Dessiner la boule de centre (0,0) et de rayon 1.
3. Déterminer le plus petit réel $p > 0$ tel que $N \leq p||.||_2$ et le plus petit réel $q > 0$ tel que $||.||_2 \leq q.N$. ($||.||_2$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.)

Exercice 2. $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée, à coefficients réels et de degré n$\leq$ 2. On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ donné par $P(x) = ax^2+bx+c$:

$$||P||_\infty = sup_{x\in[0,1]}|P(x)|, \text{ et } ||P|| = max\{| a |, | b |, | c |\}$$

1. Montrer que ces deux normes sont équivalentes.
2. Calculer la norme de l'application linéaire:
Id: $(\mathbb{R}_2[X], || \cdot ||) \to (\mathbb{R}_2[X], || \cdot ||_\infty)$ puis celle de l'application linéaire
Id: $(\mathbb{R}_2[X], || \cdot ||_\infty) \to (\mathbb{R}_2[X], || \cdot ||)$.

Exercice 3. $\mathbb{R}[X]$ désigne l'anneau des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide. On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$||P||_A = sup_{x\in A}|P(x)|.$$

Quelles conditions A doit-elle satisfaire pour que l'on obtienne une norme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 4. $E = M_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Pour tout $A = (a_{ij}) \in E$, on pose

$$N(A) = n.\max_{i,j}|a_{ij}|.$$

Vérifiez que l'on définit bien une norme sur E, puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est à dire qu'elle vérifie:

$$N(AB) \leq N(A).N(B), \ \forall(A, B) \in E^2.$$

Exercice 5. Si E désigne l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[-1, 1]$ à valeurs réelles, on définit, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 = sup_{x\in[-1,1]}|f(x)|$.
Nous avons établi en cours que E muni de cette norme est un espace de Banach.
On introduit sur E une nouvelle norme notée $||.||_2$ définie pour tout $f \in E$ par $||f||_2 =$

$\int_{-1}^{1} |f(x)|dx$.
Vérifier qu'il s'agit bien d'une norme puis montrer que E muni de cette norme n'est pas complet. On considérera, par exemple, pour $n \geq 2$ la suite $(f_n)_n$ de fonctions définies sur $[-1, 1]$ par $f_n(x) = 0$ si $x \in [-1, -1/n]$, $f_n(x) = 1$ si $x \in [1/n, 1]$ et sur $[-1/n, 1/n]$ on prendra la fonction affine qui assure la continuité en $-1/n$ et en $1/n$.

<u>Exercice 6.</u> Si E désigne l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[-1, 1]$ à valeurs réelles, on définit, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 = sup_{x\in[-1,1]}|f(x)|$. Nous savons que E muni de cette norme est un espace de Banach. On considère le sous-espace $F \subset E$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$. L'objectif est de montrer que F muni de la norme précédente n'est pas complet grâce à un contre exemple.
On définit la suite $(f_n)_n$ dans F par:

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n+1} + x^2}.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction g que l'on précisera.
2. Montrer que la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy (au sens de la norme que l'on a choisie).
3. Conclure que l'espace F n'est pas complet.

<u>Exercice 7.</u> L'objectif de cet exercice est de munir l'espace F de l'exercice précédent d'une nouvelle norme pour laquelle il sera complet.
On pose pour tout $f \in F$, $\|f\|_2 = sup_{x\in[-1,1]}|f'(x)| + |f(0)|$.
1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une norme.
2. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy.
2a. Montrer que la suite des dérivées converge uniformément vers une fonction φ.
2b. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction ψ que l'on déterminera.
2c. Conclure que l'espace est complet pour cette norme.

<u>Exercice 8.</u> $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels. On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}_[X]$,

$$||P|| = sup_{x\in[0,1]}|P(x)|.$$

On considère l'application linéaire φ à valeurs réelles et définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par:

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} ka_k, \text{ si } P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

En vous inspirant d'un exercice similaire traité en cours, montrer que cette application n'est pas continue.

Corrigé série 1

Ex1

1. Pour l'inégalité triangulaire, on élève au carré (deux fois) et on obtient une identité remarquable de la forme $(A-B)^2$ qui est positive. Les autres points sont faciles à établir.

2. Pour cette norme, la boule unité est l'intérieur de l'ellipse d'équation $a^2x^2+b^2y^2=1$.

3. On vérifie que pour tout $(x,y)\in \mathbb{R}^2$, on a $N(x,y)\leq max(a,b)||(x,y)||_2$ et que $||(x,y)||_2 \leq \frac{1}{min(a,b)}N(x,y)$.

D'autre part, si on suppose par exemple que $max(a,b)=a$, alors pour le vectreur (1.0), on a $N(1,0)=|a|$ et $||(1,0)||_2=1$ et par suite $N(1,0)=a.||(1,0)||_2$. Ainsi, $max(a,b)$ est le plus petit p tel que $N\leq p.||.||_2$.

De même, si on suppose que $a=min(a,b)$, on remarque que $N(1,0)=a$ et $\frac{1}{a}||(1,0)||_2=\frac{1}{a}$. Par conséquent, $q=\frac{1}{min(a,b)}$ est le plus petit réel q tel que $||.||_2\leq q.N$

Ex2

1. Si $P(x)=ax^2+bx+c$, on a $|P(x)|\leq |a|x^2+|b|x+|c|\leq |a|+|b|+|c|$, $\forall x\in[0,1]$. Par suite, on a: $||P||_\infty \leq |a|+|b|+|c|\leq 3max(|a|,|b|,|c|)=3||P||$.

On a également, $P(1)=a+b+c$, $P(0)=c$ et $P(1/2)=a/4+b/2+c$. On peut calculer a, b et c en fonction de $P(0)$, $P(1)$ et $P(1/2)$. On obtient:

$$a=-4P(1/2)+2P(1)+2P(0),\ b=4P(1/2)-P(1)-3P(0) \text{ et } \ c=P(0).$$

D'où $|a|\leq 8|P||_\infty$, $|b|\leq 8||P||_\infty$ et $|c|\leq ||P||_\infty$ et on obtient $||P||\leq 8||P||_\infty$.

2. Lorsque $a=b=c\in \mathbb{R}_+$, on a $||P||_\infty=P(1)=a+b+c=3max(a,b,c)=3||P||$. Par conséquent, 3 est le plus petit réel tel que $||P||_\infty\leq 3||P||$, pour tout P dans notre espace. Ainsi, la norme de la première application est 3.

Pour la seconde norme cherchée, on peut remarquer que si $a=8, b=-8$ et $c=1$, pour le polynôme associé P, on aura $||P||=8$ et $||P||_\infty=1$ et par suite $||P||=8.||P||_\infty$. La norme de la seconde application est donc 8.

Ex3

Si la partie A est finie, on peut poser $A=\{a_1,...,a_n\}$ avec n entier convenable. Le polynôme P défini par $P(x)=\Pi_{k=0}^n(x-a_k)$ vérifie $||P||_A=0$ et P n'est pas le polynôme nul. Ainsi, la partie A doit être infinie.

D'autre part, si on veut que $||P||_A$ soit un nombre positif fini pour tout polynôme P, la partie A doit être bornée.

Ces deux conditions sont suffisantes pour avoir une norme...

Ex4

Nous allons simplement vérifier que c'est une norme d'algèbre. On se donne deux matrices carrées d'ordre n, $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

Leur produit est la matrice $C=(c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$.

On a $|c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \leq n.max_{1\leq i,k\leq n}|a_{ik}|.max_{1\leq k,j\leq n}|b_{kj}|$. On a donc

$$N(C) = n.max|c_{ij}| \leq n.n.max_{1\leq i,k\leq n}|a_{ik}|.max_{1\leq k,j\leq n}|b_{kj}| \leq N(A).N(B).$$

Ex5

1. Montrons que $||.||_2$ définit bien une norme sur $E = \mathcal{C}([-1,1], I\!R)$.
Si $\int_{-1}^{1} |f(x)|dx = 0$, f étant continue, alors $|f|$ est aussi continue, de plus comme elle est positive, son intégrale doit être nulle. Par suite, $|f|$ est la fonction nulle, et f aussi.
L'inégalité triangulaire résulte de l'inégalité triangulaire dans $I\!R$. On écrit: $|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ puis on intègre de -1 à 1.
L'autre propriété ne pose aucune difficulté.
On veut montrer que E muni de la norme $||.||_2$ n'est pas complet. On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ donnée, on précise que sur l'intervalle $[-1/n, 1/n]$, on a $f_n(x) = \frac{n}{2}x + \frac{1}{2}$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(f_n)_n$ converge dans E pour la norme $||.||_2$ vers une fonction continue f. Nécessairement, la fonction f doit être nulle sur l'intervalle $[-1, -1/n[$ pour tout entier $n \geq 2$. En effet, sinon supposons qu'il existe $x_0 \in [-1, -1/n[$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Fixons $N \geq 2$ tel que $x_0 \in [-1, -1/N[$, alors pour tout $n \geq N$, $x_0 \in [-1, -1/n[$ et la fonction $|f - f_n|$ est continue positive sur $[-1, -1/n[$ avec $|f - f_n|(x) = |f(x)|$ pour tout $x \in [-1, -1/n[$. On a aussi $\int_{-1}^{1} |(f - f_n)(x)|dx \geq \int_{-1}^{-1/n} |(f - f_n)(x)|dx = \int_{-1}^{-1/n} |f(x)|dx \geq \int_{-1}^{x_0} |f(x)|dx = \alpha > 0$ où $\alpha > 0$ est un réel fixé dépendant de f.
Or, la suite converge vers f, donc $||f - f_n||_2$ doit tendre vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Mais $||f - f_n||_2 \geq \int_{-1}^{-1/n} |(f - f_n)(x)|dx = \alpha > 0$ ce qui est une contradiction.
De la même manière, on peut montrer que la fonction f doit être égale à 1 sur $]1/n, 1]$ pour tout $n \geq 2$. Par conséquent, f est nulle sur $[-1, 0[$ et vaut 1 sur $]0, 1]$ et n'aurait pas de limte en 0, ainsi elle ne peut être continue en 0 et donc ne peut appartenir à E ce qui est une contradiction. L'espace n'est donc pas complet pour la norme $||.||_2$.

Ex6

$E = \mathcal{C}([-1,1], I\!R)$ est muni de la norme du sup, on considère $F \subset E$ le s.e.v. des applications de classe $\mathcal{C}^1$. On veut montrer que F muni de la norme du sup n'est pas complet.
1. La suite donnée converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto |x|$.
2. Elle est de Cauchy. En effet, si on suppose $n \geq p$:

$$|(f_n - f_p)(x)| = |\frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{p+1}}{\sqrt{\frac{1}{n+1} + x^2} + \sqrt{\frac{1}{p+1} + x^2}}| \leq |\frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{p+1}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}} + \sqrt{\frac{1}{p+1}}}| \leq \frac{\frac{1}{p+1}}{\sqrt{\frac{1}{p+1}}} = \sqrt{\frac{1}{p+1}}.$$

On aura donc $|(f_n - f_p)(x)| \leq \varepsilon$, si $n \geq p \geq N_\varepsilon$.
3. La suite $(f_n)_n$ est de cauchy dans E (qui est complet pour la norme du sup), elle tend vers une limite dans E qui est forcément la fonction $x \mapsto |x|$, mais cette fonction n'étant pas dérivable en 0, elle ne peut appartenir à F. La suite donnée ne converge donc pas

dans F qui n'est pas complet pour la norme du sup.

Ex7

Dans le sous espace F de l'exercice précédent, on définit la norme $||.||_2$ par $||f||_2 = |f(0)| + \sup_{x\in[-1,1]}|f'(x)|$, pour tout $f \in F$.

1. C'est bien une norme. Si f vérifie $||f||_2 = 0$, alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [-1,1]$ et $|f(0)| = 0$. La première égalité implique que la fonction f est constante et la seconde que cette constante est nulle, ainsi ona f est la fonction nulle. Les autres points à vérifier ne posent pas de problème particulier.

2. On se donne une suite de Cauchy pour cette norme.

2a. Les dérivées sont des fonctions continues et sont donc des éléments de $E = \mathcal{C}([-1,1], I\!R)$. La suite $(f'_n)_n$ est donc de Cauchy dans E pour la norme du sup. E étant complet pour cette norme, la suite $(f'_n)_n$ converge vers une fonction $\varphi \in E$.

2b. On a: $| f_n(x) - f_p(x) | \leq | f_n(0) - f_p(0) | + \sup_{\alpha\in[-1,1]} | f'_n(\alpha) - f'_p(\alpha) |$ pour tout $x \in [-1,1]$. Ceci provient du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f_n - f_p$ entre 0 et x, puis d'une majoration. On déduit que $\sup_{x\in[-1,1]} | f_n(x) - f_p(x) | < \varepsilon$ si n, p sont supérieurs à un entier convenable. Par suite, la suite $(f_n)_n$ converge dans E pour la norme du sup vers une fonction notée ψ.

3. Remarquons d'abord que la suite de réels $(f_n(0))_n$ est de Cauchy et qu'elle converge donc vers un réel noté l. On définit la fonction ψ sur $[-1,1]$ par $\psi(x) = \int_0^x \varphi(x)dx + l$, ψ est donc dérivable avec $\psi(0) = l$ et $\psi'(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$. Vérifions que la suite $(f_n)_n$ converge vers ψ pour la norme $||.||_2$:

$||f_n - \psi||_2 = \sup_{x\in[-1,1]}|(f'_n - \psi')(x)| + |f_n(0) - \psi(0)|$

$||f_n - \psi||_2 = \sup_{x\in[-1,1]}|(f'_n - \varphi)(x)| + |f_n(0) - l| < \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon$, si n est assez grand.

La fonction ψ est dérivable de dérivée φ continue, elle est donc bien élément de F qui est donc complet pour la norme utilisée.

Ex8

L'application donnée est linéaire par construction. Si $P_n(x) = x^n$, pour $n \in I\!N$, on a $\varphi(P_n) = n$. D'autre part les polynômes P_n sont tous des éléments de la boule unité puisque $||P_n|| = \sup_{x\in[0,1]}|P_n(x)| = 1$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on a bien que l'application φ n'est pas bornée sur la boule unité. Elle n'est par conséquent pas continue.

Série $\sharp$ 2

Exercice 1 A est une partie non vide d'un espace métrique (E, d). Montrer que $x \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_n$ de points de A convergente vers x.

Exercice 2. d étant une distance sur $I\!R$, soit $f : (I\!R, d) \to (I\!R, d)$ un homéomorphisme. On définit une nouvelle distance δ par

$$\delta(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

1. Vérifier que δ est bien une distance sur $I\!R$.
2. Montrer qu'elle est topologiquement équivalente à la distance d. C'est à dire que tout ouvert pour d est un ouvert pour δ et inversement.
3. Déduire que les deux distances suivantes définies par

$$d_1(x, y) = |x - y|, \text{ et } d_2(x, y) = |x^3 - y^3|$$

sont topologiquement équivalentes. Sont elles comparables?

Exercice 3 1. Soit (E, d) un espace métrique et d_1 une autre distance sur E. On suppose que d et d_1 sont comparables. Montrer que d et d_1 sont topologiquement équivalentes.
2. (E, d) désignant un espace métrique, on définit deux nouvelles distances δ_1 et δ_2 par

$$\delta_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \text{ et } \delta_2(x, y) = \inf\{1, d(x, y)\}.$$

Montrer que les deux distances δ_1 et δ_2 sont topologiquement équivalentes à d.
Les distances δ_1 et δ_2 sont elles comparables?

Exercice 4. Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout $x \in E$ et toute partie non vide $A \subset E$, on pose

$$d(x, A) = inf_{y \in A} d(x, y).$$

1. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \bar{A}$, puis que $d(x, A) = d(x, \bar{A})$.
2. Montrer que, pour A fixé, l'application $f : x \mapsto f(x) = d(x, A)$ est continue sur E.
3. Soient A et B deux parties de E. Montrer que $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$ si et seulement si il existe deux ouverts disjoints U et V de E tels que $A \subset U$ et $B \subset V$. (Considérer l'application $(x \mapsto d(x, A) - d(x, B))$).
4. Soient A et B deux fermés disjoints de E. Montrer qu'il existe une application continue $\varphi : E \to I\!R$ égale à 0 sur A et à 1 sur B. En déduire qu'il existe un ouvert U contenant A et un ouvert V contenant B disjoints.

Exercice 5. Suite **exhaustive** de compacts associée à un ouvert.

Dans cet exercice, on se donne un ouvert $\Omega \subset I\!R^p$ et on veut construire une suite $(K_n)_n$ de compacts contenus dans Ω et telle que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, $\bigcup_n K_n = \Omega$ et pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe n tel que $K \subset K_n$.
On pose, pour tout $n \geq 1$, $K_n = \{x \in \Omega, d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} \bigcap B_n$, où B_n désigne la boule fermée de $I\!R^p$ de centre 0 et de rayon n. Remarquer que les K_n sont tous non vides à partir d'un certain rang.
Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que les K_n conviennent. Expliquer pourquoi on a utilisé l'adjectif "exhaustive".

Exercice 6.

$C([0,1])$ désigne l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur $[0,1]$ muni de la distance de la convergence uniforme. Soit $k \in I\!R_+$. On rappelle qu'une fonction $f \in C([0,1])$ est dite k-lipschitzienne si, pour tous x et $y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$.

1. Montrer que l'ensemble F_k des fonctions k-lipschitziennes est un fermé de $C([0,1])$.

2. Montrer que l'ensemble F des fonctions lipschitziennes éléments de $C([0,1])$ est d'intérieur vide. (On peut supposer qu'il existe une boule ouverte $B(f,r) \subset F$, et on montrera que l'application "$x \mapsto f(x) + \frac{r}{2}\sqrt{x}$ est élément de cette boule sans être lipschitzienne. On aura remarqué que la différence entre deux applications lipschitziennes doit être lipschitzienne.)

3. Soit $f \in C([0,1])$. Pour chaque $n \in I\!N^*$, soit f_n la fonction affine par morceaux définie par

$$f_n(x) = f(i/n) + (nx - i)(f((i+1)/n) - f(i/n)), \ si\ x \in [i/n, (i+1)/n],\ 0 \leq i \leq n-1.$$

Montrer, que pour tout $n \in I\!N^*$, on a $f_n \in F$ et que la suite $(f_n)_{n \in I\!N^*}$ converge uniformément vers f. En déduire que F est dense dans $C([0,1])$.

Exercice 7.

Soit $(E, ||\ .\ ||)$ un espace normé et $T : E \to I\!R$ une forme linéaire non nulle.
1. Montrer que T est continue si et seulement si $Ker(T)$ est un fermé.
2. Montrer que si T n'est pas continue alors $Ker(T)$ est dense dans E.

Exercice 8. Espace complet et continuité uniforme.

(X, d) et (Y, δ) sont deux espaces métriques donnés et $f : X \to Y$ une application.
1. Montrer que si f est uniformément continue et si $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans X alors $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy dans Y. Que peut on dire de la réciproque?
2. On suppose que f est un homéomorphisme uniformément continu, établir que si Y est complet alors X est complet.

Exercice 9.

l^∞ désigne l'espace vectoriel des suites réelles bornées, on le munit de la norme du sup, c'est à dire que si $(u_n)_n \in l^\infty$, on pose $\|\, (u_n)_n \,\|_\infty = \sup_n \mid u_n \mid$. Soit $E \subset l^\infty$ le sous espace vectoriel (s'en convaincre!) des suites périodiques à partir d'un certain rang. (On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est périodique à partir d'un certain rang s'il existe deux entiers N et T non nuls tels que $u_{n+T} = u_n$ pour tout $n \geq N$.)

1. On veut montrer que l'espace métrique $(l^\infty, \|\, .\, \|_\infty)$ est complet. On se donne une suite de Cauchy dans l^∞, c'est à dire une suite de suites notée $((u_n^i)_n)_i$ qui est de Cauchy. On précise que pour tout $i \in I\!N$, $(u_n^i)_n$ est un élément de l^∞

1a. On suppose donc que $\sup_n \mid u_n^l - u_n^k \mid < \varepsilon$ si $k, l \geq N_\varepsilon$.

Montrer, que pour tout $n \in I\!N$, la suite de nombres réels $(u_n^i)_i$ converge vers un certain réel noté l_n.

1b. En faisant tendre k vers $+\infty$, montrer qu'on a

$$\sup_n \mid u_n^l - l_n \mid < \varepsilon, \text{ si } l \geq N_\varepsilon \text{ puis conclure.}$$

2. Soit $T : E \to E$ l'application définie par:

$$T(u_0, u_1, ...) = (0, \frac{u_0 + 1}{2}, \frac{u_1 + 1}{2}, ...).$$

Montrer que T est contractante puis déduire que E n'est pas un fermé de l^∞.

Corrigé série 2

Ex1

On suppose $x \in \overline{A}$, alors toute boule de centre x et de rayon $r > 0$ quelconque intersecte A, c'est à dire contient un élément de A. On prend r de la forme $1/n$, où $n \geq 1$ est un entier quelconque. La boule $B(x, 1/n)$ contient un élément de A qu'on note x_n, on obtient ainsi une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Inversement, si x est la limite d'une suite $(x_n)_n$ dans A alors quelle que soit la boule $B(x, \varepsilon)$ de rayon $\varepsilon > 0$ quelconque, cette boule contient tous les x_n si n est assez grand, elle contient par conséquent au moins un élément de A et donc $x \in \overline{A}$.

Ex2

1. δ est bien une distance. La première propriété découle de l'injectivité de f, la deuxième propriété est évidente et la dernière découle de l'inégalité triangulaire appliquée à la distance d.

2. Montrons que tout ouvert O pour δ est un ouvert pour d. Il suffit de montrer que si $B_\delta(x, r)$ est une boule ouverte pour δ centrée en $x \in O$ quelconque et de rayon r, elle contient une boule $B_d(x, R)$ où R est un réel positif convenable. on sait que $f : (I\!R, d) \to (I\!R, d)$ est un homéomorphisme, pour $B_d(f(x), r)$, il existe un réel $R > 0$ tel

que $f(B_d(x,R)) \subset B_d(f(x),r)$. Ainsi, si $y \in B_d(x,r)$ alors $f(y) \in B_d(f(x),r)$, c'est à dire $d(f(x),f(y)) < r$ ou bien $\delta(x,y) < r$. Ceci signifie qu'on a: $B_d(x,R) \subset B_\delta(x,r)$. Tout ouvert pour δ est donc un ouvert pour d.

Pour montrer que tout ouvert pour d est un ouvert pour δ, on procède de la même manière en utilisant cette fois-ci la continuité et la bijectivité de l'application f^{-1}.

3. Pour justifier que les deux distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes il suffit de remarquer que l'application $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Ces deux distances ne sont pas comparables car il n'existe pas de réel positif α pour lequel on a $d_2(x,y) \leq \alpha d_1(x,y)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En effet, par l'absurde, on prend alors $x > 0$ et $y = 0$, on aura: $x^3 \leq \alpha x$ ceci $\forall x > 0$, ce qui est une contradiction.

Ex3

1. Si d et d_1 sont comparables, ceci équivaut à l'existence de deux réels $0 < a < b$ tels que $a.d(x,y) \leq d_1(x,y) \leq b.d(x,y)$, pour tout couple $(x,y) \in E^2$. On peut déduire qu'on a les inclusions suivantes:

$$B_d(x,r) \subset B_{d_1}(x,b.r), \text{ et } B_{d_1}(x,r) \subset B_d(x,r/a), \text{ pour tout } x, \text{ et tout } r > 0.$$

Ainsi, toute boule, pour l'une des distances, centrée en x contient une boule convenable pour l'autre distance centrée aussi en x. Les deux distances sont donc topologiquement équivalentes.

2. Montrons d'abord que d et δ_1 sont topologiquement équivalentes. On peut remarquer que $\delta_1(x,y) \leq d(x,y)$ pour tout couple $(x,y) \in E^2$. Par conséquent, on a $B_d(x,r) \subset B_{\delta_1}(x,r)$ pour tout $x \in E$ et tout réel $r > 0$. Cela assure que tout ouvert pour δ_1 est un ouvert pour d. Il reste à montrer la réciproque. Pour $R > 0$, on cherche par exemple un réel R' tel que si $\delta_1(x,y) < R'$ alors $d(x,y) < R$ car cela impliquera que $B_{\delta_1}(x,R') \subset B_d(x,R)$ et donc que tout ouvert pour d est un ouvert pour δ_1. Il suffit de poser $R' = \frac{R}{1+R}$.
Montrons, à présent, que δ_1 et δ_2 sont topologiquement équivalentes. On a $B_{\delta_2}(x,r) \subset B_{\delta_1}(x,r)$ si $r < 1$. (Si $\delta_2(x,y) < r < 1$, alors $d(x,y) < r$ et par suite $\delta_1(x,y) < d(x,y) < r$.) Tout ouvert pour δ_1 est un ouvert pour δ_2. Inversement, on se donne $B_{\delta_2}(x,r')$ et on suppose que $r' < 1$ pour lequel on va chercher une boule convenable pour δ_1. Vérifions que si $\delta_1(x,y) < r'/2$ alors $\delta_2(x,y) < r'$.
En effet, si $\delta_1(x,y) < r'/2$, on a $d(x,y) < \frac{r'}{2-r'} < r' < 1$ et donc $\delta_2(x,y) < r'$. On a donc montré qu'on a $B_{\delta_1}(x,r'/2) \subset B_{\delta_2}(x,r')$, elles sont donc topologiquement équivalentes.

Il reste à étudier si δ_1 et δ_2 sont comparables. On a clairement, $\delta_1(x,y) \leq d(x,y)$ et $\delta_1(x,y) \leq 1$, d'où $\delta_1(x,y) \leq \inf\{1, d(x,y)\} = \delta_2(x,y)$ pour tout $(x,y) \in E^2$. D'autre part, si $d(x,y) \leq 1$, on a $\delta_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq \frac{d(x,y)}{2} \geq \frac{1}{2}\inf\{1, d(x,y)\}$ et si $d(x,y) \geq 1$, on a $\delta_1(x,y) \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}\inf\{1, d(x,y)\}$. Dans les deux cas, on a vérifié qu'on a $\delta_1(x,y) \geq \frac{1}{2}\delta_2(x,y)$. Les deux distances sont donc comparables.

Ex4

1. D'après l'exercice 1, $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite de points $(x_n)_n$ de A telle que $d(x, x_n) \leq 1/n$. On a donc $inf\ d(x,A) = 0$. Si cette borne inférieure est nulle, on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $d(x,a) < \varepsilon$. C'est à dire que toute boule $B(x,\varepsilon)$ intersecte A et donc $x \in \overline{A}$.
Montrer à présent que pour tout $x \in E$, on a $d(x,A) = d(x,\overline{A})$. Puisque $A \subset \overline{A}$, on a $d(x,A) \geq d(x,\overline{A})$. On a forcément l'égalité, sinon supposons $d(x,A) > d(x,\overline{A})$, il existe donc $\alpha \in \overline{A}$ tel que $d(x,\overline{A}) \leq d(x,\alpha) < d(x,A)$. Pour tout $a \in A$, d'après l'inégalité triangulaire, on a $d(\alpha,a)+d(\alpha,x) \geq d(x,a)$. D'où, pour tout $a \in A$, $d(\alpha,a) \geq d(x,a)-d(\alpha,x)$, et donc $d(\alpha,a) \geq d(x,A) - d(\alpha,x)$ et par suite $d(\alpha,A) \geq d(x,A) - d(\alpha,x) > 0$. C'est une contradiction car cela signifie que α n'est pas un point adhérent.

2. Pour toute partie non vide A fixée, l'application $x \mapsto d(x,A)$ est continue car elle est lipschitzienne: Elle vérifie $\mid f(x) - f(y) \mid \leq d(x,y)$.

3. Pour tout $x \in A$, si on note $g(x) = d(x,A) - d(x,B)$, on a $g(x) \leq 0$. De plus, puisque $A \cap \overline{B} = \emptyset$, d'après ce qui a précédé, $d(x,B) > 0$ et donc $g(x) < 0$. De même, pour tout $x \in B$, on a $g(x) > 0$. L'application g étant continue comme différence entre deux fonctions continues, $g^{-1}(]-\infty,0[)$ est un ouvert contenant A et $g^{-1}(]0,+\infty[)$ est un ouvert contenant B. Le premier ouvert convient pour U et le deuxième pour V.

4. Remarquons d'abord que si A et B sont des fermés disjoints, on a $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ et par suite, pour tout $x \in E$, on a $d(x,A) + d(x,B) > 0$. Si h désigne l'application $h : E \to I\!\!R$ définie par $h(x) = \frac{1}{d(x,A)+d(x,B)}$ alors h est bien définie. De plus, elle est continue comme composée de "$x \mapsto d(x,A) + d(x,B)$" avec "$x \mapsto 1/x$". Si on considère l'application $k : E \to I\!\!R$ définie par:

$$k(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)},$$

elle est continue sur E et elle vaut 0 sur A et 1 sur B. On peut alors poser $U = k^{-1}(]-1/2, 1/2[)$ puis $V = k^{-1}(]1/2, 3/2[)$.

Ex5

Si f désigne l'application "$x \mapsto d(x,\Omega^c)$", f étant continue, $\{x \in \Omega,\ d(x,\Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} = f^{-1}([\frac{1}{n}, +\infty[)$ est un fermé pour tout entier $n \geq 1$, par suite K_n est fermé car intersection de deux fermés. Comme $K_n \subset B_n$ et que la boule B_n est bornée, K_n est aussi borné et par suite, K_n est un compact de $I\!\!R^p$.

Montrons que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$. Soit $x \in K_n$, puisque $d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n+1}$ et f est continue, il existe donc un ouvert O_x contenant x tel que $\forall y \in O_x$, on a $f(y) > \frac{1}{n+1}$. D'autre part, comme $x \in B_n$, x appartient à l'intérieur de la boule fermée B_{n+1}, qui est la boule ouverte. Il existe un ouvert O'_x tel que $O'_x \subset \overset{\circ}{B}_{n+1}$. On vérifie alors que $O_x \cap O'_x$ est un ouvert contenant x et contenu dans K_{n+1}. On a donc bien $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$.
On vérifie à présent que $K_n = \Omega$. Soit $x \in \Omega$, il existe n assez grand tel que $d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}$ et d'autre part, il existe un entier m assez grand tel que $x \in B_m$. Si on pose $k = \max\{n, m\}$, alors on aura $x \in K_k$.
L'adjectif "exhaustive" signifiant " complète" a été utilisé pour souligner que la suite de compacts $(K_n)_n$ recouvre la totalité de l'ouvert Ω.

Ex6

1. L'ensemble F_k des fonctions k-lipschitziennes est fermé: Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions k-lipschitziennes convergeant vers f dans l'espace $C([0,1], I\!R)$. On a pour tout entier n et pour tout couple $(x, y) \in [0,1]^2$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x - y|$. Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ et donc la limite f est aussi k-lipschitzienne.
2. Supposons qu'il existe une boule $B(f, r)$ contenu dans l'ensemble des fonctions lipshitziennes. Si on considère la fonction φ donnée par "$x \mapsto f(x) + \frac{r}{2}\sqrt{x}$", cette fonction appartient à la boule considérée, en effet, $\sup_{x\in[0,1]}|f(x) - \varphi(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{r}{2}\sqrt{x} = \frac{r}{2} < r$. On rappelle que la fonction "$x \mapsto \sqrt{x}$" n'est pas lipschitzienne tout simplement car le rapport $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}$ tend vers l'infini lorsque x tend vers 0^+ et que la différence entre deux applications lipschitziennes est aussi lipschitzienne. Ainsi, l'application $f - \varphi$ devrait être lipschitzienne ce qui est faux, d'où une contradiction. L'ensemble des fonctions lipschitzienne est donc d'intérieur vide.
3. Montrons la densité des fonctions lipschitziennes dans l'ensemble des fonctions définies et continues sur $[0,1]$ muni de la norme du sup. On se donne donc $f \in C([0,1], I\!R)$ et la suite $(f_n)_n$ de fonctions proposée dans cette question. Remarquons d'abord que chaque f_n est lipschitzienne sur l'intervalle $[i/n, (i+1)/n]$, pour $0 \leq i \leq n-1$ avec pour constante associée $n \mid f((i+1)/n) - f(i/n) \mid$. Soient x, y quelconques dans $[0,1]$, supposons par exemple $x < y$, $x \in [i/n, (i+1)/n]$ et $y \in [j/n, (j+1)/n]$ avec $i < j$.
On décompose: $\mid f(y) - f(x) \mid \leq \mid f(y) - f(j/n) \mid + ... + \mid f((i+1)/n) - f(x) \mid$.
Si on pose $M = \max_{0\leq i\leq n-1} n \mid f((i+1)/n) - f(i/n) \mid$, alors on a:
$\mid f(y) - f(x) \mid \leq M(\mid y - j/n \mid + \mid j/n - (j-1)/n \mid + ... + \mid (i+1)/n - x \mid \leq M \mid y - x \mid$.
Ainsi f_n est lipschitzienne pour tout $n \geq 1$.
Si on montre que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, alors toute boule centrée en f et de rayon quelconque >0 contiendra un certain élément f_n pour n assez grand.
Remarquons que l'application f est uniformément continue, c'est à dire que $\mid f(x) - f(x') \mid < \varepsilon$ si $\mid x - x' \mid < \eta$.

Si $x \in [i/n,(i+1)/n]$, on écrit: $\mid f(x)-f_n(x) \mid \leq \mid f(x)-f(i/n) \mid + \mid f(i/n)-f_n(x) \mid$. Or, si $1/n < \eta$, puisque $\mid x - i/n \mid < 1/n$, on a $\mid f(x)-f(i/n) \mid < \varepsilon$. D'autre part, on a $\mid f(i/n)-f_n(x) \mid = n(x-i/n) \mid f((i+1)/n)-f(i/n) \mid \leq \mid f((i+1)/n)-f(i/n) \mid < \varepsilon$. On a donc obtenu: $\mid f(x)-f_n(x) \mid < 2\varepsilon$ à partir d'un certain rang.

Ex7

1. Si T est continue alors $\{0\}$ étant un fermé de $I\!R$, $f^{-1}(\{0\})$ =Ker(T) est un fermé. Inversement, on suppose Ker(T) fermé et on raisonne par l'absurde. Si T n'est pas continue, comme elle est linéaire, elle n'est pas continue en 0, c'est à dire qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(x_n)_n$ qui tend vers 0 mais telle que $\mid T(x_n) \mid > \varepsilon_0$. T étant non identiquement nulle, il existe un ément $e \in E$ tel que $T(e) = 1$. On considère alors dans E la suite $(y_n)_n$ donnée par $y_n = e - \frac{x_n}{T(x_n)}$. On vérifie que $T(y_n) = 0$, et donc $y_n \in$Ker(T) pour tout n et que y_n tend vers e puisque $\mid\mid y_n - e \mid\mid < \frac{1}{\varepsilon_0} \mid\mid x_n \mid\mid$. Ker(T) étant fermé, la suite $(y_n)_n$ doit converger dans Ker(T) mais $e \notin$Ker(T), d'où une contradiction.
2. On suppose que T n'est pas continue, comme précédemment, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite dans E notée $(x_n)_n$ qui tend vers 0 et telle que $\mid T(x_n) \mid > \varepsilon_0$. Soit $y \in E$ quelconque, on veut l'approcher aussi près que l'on veut par un élément de Ker(T). On pose $T(y) = \alpha$, on a la décomposition: $y = (y - \alpha\frac{x_n}{T(x_n)}) + \alpha\frac{x_n}{T(x_n)}$.
L'élément $z_n = y - \alpha\frac{x_n}{T(x_n)}$ vérifie $T(z_n) = 0$ et donc $z_n \in$Ker(T) et $\mid\mid y - z_n \mid\mid = \mid\mid \alpha\frac{x_n}{T(x_n)} \mid\mid \leq \frac{|\alpha|}{\varepsilon_0} \mid\mid x_n \mid\mid$ qui tend vers 0.

Ex8

1. Si f est uniformément continue de (X,d) complet vers (Y,δ) alors $\forall\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $d(x,y) < \eta$ alors $\delta(f(x),f(y)) < \varepsilon$.
Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy alors pour $\eta > 0$, il existe un entier N_η tel que si $n,m \geq N_\eta$, on a $d(x_n,x_m) < \eta$. Montrons que la suite $(f(x_n)_n$ est de Cauchy, pour $\varepsilon > 0$, si $n,m \geq N_\eta$ on aura $d(x_n,x_m) < \eta$ et grâce à la continuité uniforme, on obtient $\delta(f(x_n),f(x_m)) < \varepsilon$.
Si $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy, la suite $(x_n)_n$ n'est pas nécessairement de Cauchy. Pour $f = arctan$, f est uniformément continue car elle est lipschitzienne ($\mid arctan(x) - arctan(y) \mid \leq \mid x-y \mid$), et si on prend une suite $(x_n)_n$ qui tend vers $+\infty$, elle n'est pas de Cauchy car elle n'est pas convergente, mais la suite image $(f(x_n))_n$ converge vers $\frac{\pi}{2}$ et elle est de Cauchy.
2. On se donne une suite de Cauchy $(x_n)_n$ dans X, f étant uniformément continue, la suite $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans Y. Y étant complet, la suite $(f(x_n))_n$ converge donc vers une limite l. f^{-1} étant continue, la suite $(f^{-1}(f(x_n)))_n$ qui est $(x_n)_n$ converge donc vers $f^{-1}(l)$. X est donc complet.

Ex9

1a. Pour tout n fixé quelconque, on a: $\mid u_n^l - u_n^k \mid < \varepsilon$ si $k,l \geq N_\varepsilon$. La suite de nombres

réels $(u_n^i)_i$ est de Cauchy, elle converge donc vers une limite qui dépend de n notée l_n.
1b. Puisque $\mid u_n^l - u_n^k \mid < \varepsilon$ si $k, l \geq N_\varepsilon$, si on fixe l et on fait tendre k vers $+\infty$, par passage à la limite, on obtient $\mid u_n^l - l_n \mid \leq \varepsilon$ si $l \geq N_\varepsilon$. Ainsi la suite $((u_n^i)_n)_i$ converge vers la limite $(l_n)_n$ qui appartient bien à l^∞. ($\mid l_n \mid \leq \mid u_n^l - l_n \mid + \mid u_n^l \mid \leq \varepsilon + M$ où M est un majorant de $\| (u_n^l)_n \|$.)
2. L'application T est contractante car elle vérifie $\| T((u_n)_n) - T((v_n)_n) \|_\infty \leq \frac{1}{2} \| (u_n)_n - (v_n)_n \|_\infty$.
L'espace E n'est pas fermé car sinon, comme il est dans l^∞ qui est complet, il sera aussi complet. D'après le théorème du point fixe, il existe une suite $(w_n)_n \in E$ pour laquelle on a: $T((w_n)_n) = (w_n)_n$. Or cela implique que $(u_n)_n$ est la suite définie par:
$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2}$, or cette suite est strictement croissante et convergente vers 1, elle n'est pas périodique et donc ne peut pas être un élément de E, d'où une contradiction. E n'est donc pas un fermé.

Série $\sharp$ 3

Exercice 1. Soit (X,d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application vérifiant

$$d(f(x),f(y)) < d(x,y) \ \ \forall (x,y) \in I\!R^2, \ x \neq y.$$

Le but de cet exercice est de montrer que f admet un point fixe unique $p \in X$.
1. Montrer que les ensembles $X_n = f^n(X)$, $n \in I\!N$, forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n\geq 0} X_n$ n'est pas vide.
2. Montrer que Y est un ensemble invariant, i.e. $f(Y) = Y$, et en déduire que le diamètre de cet ensemble est 0.
3. Conclure que f a un unique point fixe $p \in X$ et que $\forall x_0 \in X$, la suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = f^n(x_0)$ converge vers p lorsque n tend vers ∞.

Exercice 2. On dit qu' un espace métrique est **séparable** s'il existe un sous ensemble dénombrable dense. L'objectif de cet exercice est de montrer que tout espace métrique compact est séparable.
1. Soit (E,d) un espace métrique compact. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe une suite finie d'éléments de E, $y_1^n, ..., y_{p_n}^n$ telle que

$$E = \bigcup_{i=1}^{p_n} B(y_i^n, \frac{1}{n}).$$

2. Justifier que l'ensemble $A = \{y_i^n;\ 1 \leq i \leq p_n,\ n \geq 1\}$ est dénombrable, puis déduire que quel que soit $\alpha \in E$ et quel que soit le réel $r > 0$, $B(\alpha, r) \cap A$ est non vide.

Exercice 3. L'objectif de cet exercice est de montrer le **théorème de Baire**: Si (E,d) est un espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.
Soit (E,d) un espace métrique complet et $(O_n)_n$ une suite d'ouverts denses dans E. On veut montrer que quel que soit $\alpha \in E$ et quel que soit $r > 0$, on a $B(\alpha,r) \cap (\cap_n O_n) \neq \emptyset$.
1. Soit $x_0 \in O_0 \cap B(\alpha,r)$ et $r_0 > 0 \in I\!R$ tel que $B_F(x_0,r_0) \subset O_0 \cap B(\alpha,r)$. Montrer qu' il existe $x_1 \in O_1$ et un réel $r_1 > 0$ tel que $0 < r_1 < r_0/2$ et $B_F(x_1,r_1) \subset O_1 \cap B_F(x_0,r_0)$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe $x_n \in O_n$ et un réel r_n tel que $0 < r_n < \frac{r_{n-1}}{2}$ vérifiant $B_F(x_n,r_n) \subset O_n \cap B_F(x_{n-1},r_{n-1})$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy.
4. En justifiant votre réponse, trouver un élément de $(\cap_n 0_n)$ qui appartient à $B(\alpha,r)$ puis conclure. (On peut remarquer que $\forall k \geq n$, $x_k \in B_F(x_n,r_n)$.)

Exercice 4.

Sur la droite réelle achevée $\bar{I\!R} = I\!R \cup \{+\infty, -\infty\}$ ordonnée par $\forall a \in I\!R$, $a \leq +\infty$ et $-\infty \leq a$, on définit un ouvert quelconque (non trivial) O de $\bar{I\!R}$ comme étant de l'un des types suivants:

- Ou bien c'est un ouvert de $\mathbb{R}$ (lorsqu'il ne contient ni $+\infty$, ni $-\infty$) ,

- Ou bien il est de la forme $]a, +\infty] \cup O_1$, où O_1 est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$ et a est un réel quelconque (lorsqu'il contient $+\infty$),

- Ou bien de la forme $[-\infty, b[\cup O_1$, où O_1 est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$ et b est un réel quelconque (lorsqu'il contient $-\infty$),

- Ou bien de la forme $[-\infty, b[\cup O_1 \cup]a, +\infty]$, où O_1 est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$, a et b étant des réels quelconques (lorsqu'il contient à la fois $+\infty$ et $-\infty$).

On peut remarquer que $[-\infty, b[$, $]a, +\infty]$, $]-\infty, +\infty]$ et $[-\infty, +\infty[$ sont des ouverts de $\bar{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que ceci définit bien une topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$.

2. On se propose de montrer que $\bar{\mathbb{R}}$ muni de cette topologie est compact.

2a. On suppose donné un recouvrement de $\bar{\mathbb{R}}$ par des ouverts $(O_i)_i$ de $\bar{\mathbb{R}}$.
Montrer que si l'un des ouverts est $[-\infty, +\infty[$ ou bien $]-\infty, +\infty]$ ou bien $[-\infty, +\infty]$, alors il est aisé d'extraire un sous recouvrement fini.

2b. On suppose qu'aucun des ouverts n'est du type précédent, c'est à dire que, pour tout indice i, O_i est ou bien de la forme $[-\infty, a_i[\cup U_i$ avec U_i ouvert de $\mathbb{R}$, ou bien de la forme $U'_j \cup]b_j, +\infty]$ avec U'_j ouvert de $\mathbb{R}$ ou bien de la forme $U"_k$ avec $U"_k$ ouvert de $\mathbb{R}$.

(i) Justifier que si sup $a_i = +\infty$ ou bien inf $b_j = -\infty$ alors il existe un sous recouvrement fini de $\bar{\mathbb{R}}$.

(ii) On suppose que sup $a_i < +\infty$ et inf $b_j > -\infty$ et on distingue deux cas:
Montrer que si sup $a_i >$inf b_j, il existe un sous recouvrement contenant exactement deux ouverts.
Dans le cas où sup $a_i \leq$ inf b_j, montrer que l'intervalle [sup a_i, inf b_j] peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts du recouvrement initial puis déduire que $\bar{\mathbb{R}}$ admet un sous recouvrement fini dans ce cas.

Exercice 5.

Soit E un espace topologique séparé et A, B deux parties compactes non vides et disjointes. Montrer qu'il existe un voisinage U de A et un voisinage V de B disjoints. On commencera par traiter les cas où B est réduit à un point.

Exercice 6.

Soit A une partie compacte et B une partie fermée de $\mathbb{R}$. On pose $C = A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$.

1. Montrer que C est un fermé.
2. Montrer que si B est compact alors C est compact.

Exercice 7.

Soit E un espace topologique et F un espace topologique séparé. Soit $p_E : E\text{x}F \to E$, la projection sur le facteur E.

1a. On rappelle que $E\text{x}F$ est muni de la topologie produit, pour laquelle les ouverts sont les réunions de pavés ouverts, c'est à dire réunions des parties de la forme $U_i\text{x}V_i$, où

U_i est un ouvert de E est V_i est un ouvert de F. Montrer que la projection p_E est ouverte.

1b. Donner un exemple montrant qu'en général, p_E n'est pas fermée.

1c. Montrer que si F est compact, l'application p_E est fermée.

2a. Soit $f : E \to F$ une application. On sait que si f est continue, son graphe G est fermé dans ExF. Montrer que si F est compact et si le graphe G est fermé dans ExF, alors f est continue.

<u>Exercice 8.</u> (**Facultatif**.) Exemple de topologie non métrisable.
On considère le produit infini non dénombrable $E = I\!R^{I\!R}$ qui est l'ensemble des applications de $I\!R$ vers $I\!R$ muni de la topologie produit. On rappelle que les ouverts sont les réunions de pavés ouverts c.a.d. réunions de parties de la forme

$$\mathcal{O} = \pi_{x \in I\!R} O_x$$

où les O_x sont tous égaux à $I\!R$ sauf pour un nombre fini $x_1, ..., x_n$ pour lesquels $O_{x_1}, ..., O_{x_n}$ sont des ouverts de $I\!R$ et qu'une application f appartient à ce pavé si et seulement si $f(x_1) \in O_{x_1}, ..., f(x_n) \in O_{x_n}$.
1. Montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers f au sens de la topologie produit si et seulement si pour tout $x \in I\!R$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. (La suite $(f_n)_n$ converge vers f si pour tout pavé ouvert $\mathcal{O}$ contenant f, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, $f_n \in \mathcal{O}$.) La topologie produit et celle de la convergence simple coincident.
2. Soit H la partie de E formée par les fonctions $\varphi : I\!R \to I\!R$ nulles sauf en un nombre fini de points et soit g la fonction constante égale à 1.
Justifier que g appartient à $\overline{H}$. Pour cela, on montrera que tout pavé ouvert contenant g intersecte H.
3. Montrer qu'il n'est pas possible de trouver une suite de fonctions $(\varphi_n)_n$ dans H qui converge vers g. Pour cela, on utilisera la première question et on remarquera que l'ensemble $\{x \in I\!R, \varphi_n(x) = 0, \ \forall n\}$ est non vide. (On rappelle que $I\!R$ est un espace de Baire, voir exercice 3.). Conclure.

Corrigé série 3

Ex1.
1. La suite donnée est décroissante car on a

$$X_{n+1} = f^{n+1}(X) = f^n(f(X)) \subset f^n(X) = X_n.$$

Vérifions que X_n est compact pour tout entier $n \geq 0$.
C'est vrai pour $n = 0$ car X est compact par hypothèse. On suppose que X_n est compact, puisque f est continue et que l'espace d'arrivée est séparé, l'image $f(X_n)$ du compact X_n est aussi un compact.
Montrons à présent que $Y = \cap_n X_n$ est non vide. $(X_n)_n$ est une famille de compacts dont

l'intersection de toute sous-famille finie est non vide (en effet: $\cap_{i\in\{i_1,...,i_k\}}X_i = X_{max\{i_1,...,i_k\}}$ qui est non vide), puisque cette famille est dans l'espace X qui est compact, alors l'intersection de tous les éléments de la famille, c'est à dire Y, est non vide.
2. Montrons l'égalité $Y = f(Y)$. On a $f(\cap_n X_n) \subset \cap_n f(X_n)$, d'où l'inclusion $f(Y) \subset Y$. Inversement, soit $\alpha \in Y$, alors α s'écrit sous la forme

$$\alpha = f(\alpha_1) = f^2(\alpha_2) = ... = f^p(\alpha_p) = ...$$

où $\alpha_1, ..., \alpha_p, ...$ est une suite convenable dans X. Si on considère la suite $(\gamma_p)_p = (f^{p-1}(\alpha_p))_p$, elle admet une valeur d'adhérence λ car X est compact. De plus, comme cette suite se trouve dans X_n, pour tout n, à partir d'un certain rang, par conséquent, une suite extraite convergente vers λ dans X est aussi convergente vers λ dans X_n pour tout n, car X_n est fermé. Ainsi, on a obtenu $\lambda \in Y$. D'autre part, f étant continue, la suite $(\gamma_n)_n$ admettant une suite extraite convergente $(\gamma_{\varphi(n)})_n$ vers λ, la suite $(f(\gamma_{\varphi(n)}))_n$ tend vers $f(\lambda)$ qui est aussi α. Nous avons donc établi que pour tout $\alpha \in Y$, il existe $\lambda \in Y$ tel que $f(\lambda) = \alpha$, d'où l'autre inclusion $Y \subset f(Y)$.
Supposons que $\delta(Y) = \delta f(Y) > 0$. Tout d'abord, rappelons que si K est une partie non vide, compacte d'un espace métrique, alors il existe deux éléments k, k' de K tels que $\delta(K) = d(k, k')$. (Ceci est dû a fait que l'application distance est continue, à valeurs dans $I\!R$, donc elle est bornée sur un compact et atteint ses bornes sur ce compact.)
Ainsi, il existe y_1, y_2 deux éléments de Y tels que $\delta(f(Y)) = d(f(y_1), f(y_2))$. Puisqu'on a $d(f(y_1), f(y_2)) < d(y_1, y_2)$, alors $\delta(Y) \geq d(y_1, y_2) > \delta(f(Y))$, ce qui est une contradiction. Par conséquent, on a $\delta(Y) = 0$ et Y est réduit à un seul élément noté λ.
3. On a obtenu $Y = \{\lambda\}$ avec $f(\lambda) = \lambda$, c'est donc un point fixe qu'on note aussi p. Il est unique car si on raisonne par l'absurde, on suppose l'existence de deux points fixes $y_0 \neq y_1$, on aboutit à $d(f(y_0), f(y_1)) = d(y_0, y_1) < d(y_0, y_1)$ ce qui est une contradiction.
Soit $x_0 \in X$ quelconque, la suite $(f^n(x_0))_n$ est dans le compact X, elle admet donc une valeur d'adhérence qu'on note β. Comme précédemment, cette valeur d'adhérence appartient à Y, c'est donc forcément λ qui est le point fixe unique.
Ex2.
1. Pour tout $n \in I\!N$ et tout $y \in E$, on considère la boule $B(y, 1/n)$ et on recouvre E par ces boules pour tout n fixé: $E = \cup_{y\in E} B(y, 1/n)$. L'espace E étant compact, il existe un nombre fini de ces boules $B(y_1^n, 1/n), ..., B(y_{p_n}^n, 1/n)$ telles que: $E = \cup_{i=1}^{p_n} B(y_i^n, 1/n)$.
2. L'ensemble $L = \{y_i^j,\ j \in I\!N,\ 1 \leq i \leq p_j\}$ est dénombrable. On peut, par exemple, proposer la bijection $\psi : L \to I\!N^*$ définie par $\psi(y_{p_l}^1) = p_l$ pour $1 \leq p_l \leq p_1$ et $\psi(y_{p_l}^k) = \sum_{1\leq i\leq k-1} p_i + p_l$ pour $k \geq 2$ et $1 \leq p_l \leq p_k$. On peut aussi simplement remarquer que l'ensemble L peut s'écrire sous la forme d'une suite $y_1^1, ..., y_{p_1}^1, y_1^2, ..., y_{p_2}^2, ..., y_1^n, ..., y_{p_n}^n, ...$, ce qui justifie aussi qu'il est dénombrable.
Cet ensemble est dense dans E. En effet, soit $\alpha \in E$ quelconque et $B(\alpha, r)$ avec $r > 0$, une boule ouverte quelconque centrée en α. On fixe n assez grand vérifiant $1/n < r$, nous savons qu'il existe $i,\ 1 \leq i \leq p_n$ avec $\alpha \in B(y_i^n, 1/n)$ l'élément y_i^n appartient à la boule

$B(\alpha, r)$ et par suite $B(\alpha, r) \cap L \neq \emptyset$. L est donc dénombrable et dense dans E et tout espace métrique compact est séparable.

Ex3.

1. O_1 étant un ouvert dense dans E, on a $B(x_0, r_0) \cap O_1 \neq \emptyset$, et donc on a aussi $B_F(x_0, r_0) \cap O_1 \neq \emptyset$. Il existe donc $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$ qui est ouvert. Par suite, il existe $r_1 > 0$ tel que $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap O_1 \subset B_F(x_0, r_0) \cap O_1$. Quitte à restreindre r_1, on peut supposer $r_1 < r_0/2$ et $B_F(x_1, r_1) \subset B_F(x_0, r_0) \cap O_1$.

2. On fait de même pour O_n qui est aussi dense. Il existe $x_n \in B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n$ et $r_n > 0$ tels que $B(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n \subset B_F(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n$ et quitte à restreindre r_n, on peut supposer $r_n < r_{n-1}/2$ et $B_F(x_n, r_n) \subset B_F(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n$.

3. Montrons que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy. D'après ce qui précède, on a: $d(x_n, x_{n+1}) < r_n < r_0/2^n$. On déduit que si $m \geq n$ sont deux entiers, alors $d(x_m, x_n) < r_0(1/2^n + ... + 1/2^m) < \varepsilon$ si $n \geq N_\varepsilon$.

4. L'espace étant supposé complet, la suite $(x_n)_n$ est convergente vers une limite l. Puisque pour tout n, $B_F(x_n, r_n) \subset B_F(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n$, alors si $p \geq n$, $x_p \in B_F(x_n, r_n) \subset B_F(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n$. La limite l appartient à $B_F(x_n, r_n)$ (fermée) et donc appartient à O_n, ceci pour tout $n \geq 1$. Ainsi la limite appartient à $\cap_{n \geq 1} 0_n$ et puisqu'elle appartient aussi à $O_0 \cap B(\alpha, r)$, elle appartient à $B(\alpha, r) \cap (\cap O_n)$ qui est par conséquent non vide.

Ex4.

1. On doit vérifier que toute intersection finie d'ouverts est un ouvert et que toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

Comme on a essentiellement 4 types d'ouverts, on les appelle dans l'ordre, ouverts de type I, de type II, de type III ou de type IV.

L'intersection d'un ouvert de type I avec un ouvert d'un autre type donne un ouvert de l'autre type. Le type II avec le III donne le type I, le type II avec le type IV donne le type III et enfin le type III avec le type IV donne le type III. D'autre part, la réunion de deux ouverts de même type est un ouvert du même type. La réunion d'un ouvert de type I avec un ouvert de type II est un ouvert de type II, de type I avec le type III est de type III, de type I avec le type IV est de type IV. Le type II avec III donne le type IV, le type II avec IV donne IV, et enfin le type III avec IV donne le type IV. La famille est donc stable par intersection finie et par union quelconque. Comme cette famille contient $\emptyset$ et $\mathbb{R}$, c'est bien une topologie.

2a. Si l'un des ouverts est $[-\infty, +\infty]$, on garde seulement cet ouvert et c'est un sous recouvrement fini. Si l'un des ouverts est $[-\infty, +\infty[$, on le garde et on choisit parmi les ouverts du recouvrement initial un ouvert qui contient $+\infty$ ce qui donne un sous recouvrement fini avec deux ouverts. On procède de même pour le dernier cas.

2b. **(i)** On suppose que sup $a_i = +\infty$, on prend d'abord un ouvert du recouvrement donné qui contient $+\infty$. Cet ouvert contient un intervalle de la forme $]b, +\infty]$ et on choisit un certain a_i qui appartient à $]b, +\infty]$. On ajoute au premier ouvert l'ouvert du

recouvrement qui contient l'intervalle $[-\infty, a_i[$ et on aura alors un sous recouvrement fini à deux ouverts. On procède de même pour le cas inf $b_j = -\infty$.
(ii) Si sup $a_i >$inf b_j, il existe deux indices convenables i_0 et i_0 pour lesquels $a_{i_0} > b_{j_0}$, on prend alors un ouvert du recouvrement initial qui contient $[-\infty, a_{i_0}[$ et un ouvert du recouvrement qui contient $]b_{j_0}, +\infty]$, c'est donc un sous recouvrement fini à deux éléments. Pour le dernier cas, on choisit $a_k < b_l$, l'intervalle $[a_k, b_l]$ est recouvert par le recouvrement initial. On considère un recouvrement de cet intervalle par des ouverts de $I\!R$ en enlevant à chaque ouvert du recouvrement précédent $-\infty$ si ce dernier appartient à l'ouvert ou $+\infty$ si ce dernier lui appartient. L'intervalle considéré étant fermé et borné, il est compact et on peut extraire un sous recouvrement fini auquel est associée une famille finie des ouverts initiaux (on rajoute $+\infty$ ou $-\infty$ là où ils ont été otés). A cett famille d'ouverts, on rajoute enfin un ouvert qui contient $[-\infty, a_k[$ et un ouvert qui contient $]b_l, +\infty]$, d'où un sous-recouvrement fini.

Ex5.

On suppose d'abord que $B = \{b\}$ est réduit à un seul élément.
L'espace étant séparé, pour tout $a \in A$, il exite un ouvert $V_b(a)$ contenant a et un ouvert $V_a(b)$ disjoints. On obtient ainsi un recouvrement de A par des ouverts: $A \subset \cup_{a \in A} V_b(a)$ dont on peut extraire un sous recouvrement fini: $A \subset O_b = V_b(a_1) \cup ... \cup V_b(a_k)$. l'ouvert $O'_b = V_{a_1}(b) \cap ... \cap V_{a_k}(b)$ contient b et on a: $O \cap O' = \emptyset$.
Si B n'est plus réduit à un seul élément alors on a un recouvrement de B par des ouverts O'_b du type précédent: $B \subset \cup_{b \in B} O'_b$ et pour chaque $b \in B$, il existe un ouvert O_b contenant A vérifiant $O_b \cap O'_b = \emptyset$. B étant supposé compact, il existe un sous recouvrement fini par des ouverts $O'_{b_1}, ..., O'_{b_l}$. Comme ouverts cherchés, on pose $U(B) = O'_{b_1} \cup ... \cup O'_{b_l}$ et $U(A) = O_{b_1} \cap ... \cap O_{b_l}$ puis on vérifie qu'ils conviennent.

Ex6.

1. On se donne une suite $(c_n)_n$ de points de C convergente dans $I\!R$, montrons que cette suite est convergente dans C.
On suppose $c_n = a_n + b_n$ tend vers une limite $\alpha \in I\!R$. A étant compact, il existe une suite extraite $(a_{\varphi(n)})_n$ convergente vers $l \in A$. On déduit que la suite extraite $(b_{\varphi(n)})_n$ converge vers $l' = \alpha - l$ qui appartient à B car B est fermé. Ceci montre que la limite α s'écrit sous la forme $l + l'$, elle appartient donc à C qui est bien fermé.
2. On suppose que B est un compact (donc fermée et bornée), montrons que C est un compact. Comme C est fermé, il suffit de montrer que C est borné. Or A est un compact de $I\!R$, A est donc borné et la somme de deux bornés est un borné et C est donc compact.

Ex7.

1a. Soit O un ouvert de ExF, O est de la forme $\cup_i U_i$xV_i. On a alors $p_E(O) = \cup_i U_i$ qui est un ouvert de E, p_E est donc ouverte.
1b. Dans $I\!R$x$I\!R$, on considère la partie $A = \cup_{n \geq 1}[1/n, 1 - 1/n]x\{n\}$. A est un fermé (on montre sans difficultés que son complémentaire est ouvert), mais sa projection sur le

premier facteur est l'intervalle $]0,1[$ qui n'est pas un fermé de $I\!R$.

1c. On suppose que F est compact, montrons que p_E est fermée. Soit C une partie fermée de E et soit x dans le complémentaire de l'image $p_E(C)$, alors pour tout $y \in F$, $(x,y) \notin C$. C étant fermé, il existe un ouvert de ExF, qu'on peut supposé de la forme $U(x)$x$V(y)$, tel que $(U(x)\text{x}V(y))\cap C = \emptyset$. Fétant compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de tels ouverts $V(y_1),...,V(y_n)$. Si on pose $U'(x) = \cap_{i=1}^{n} U(x_i)$ ($U(x_i)$ étant les ouverts correspondants aux $V(y_i)$), alors l'ouvert $U'(x)$xF est contenu dans le complémentaire de C et son image est l'ouvert $U'(x)$ qui est contenu dans le complémentaire de $p_E(C)$. p_E est donc bien fermée dans ce cas.

2. On suppose que le graphe $G \subset E$xF de f est fermé et que F est compact, montrons que f est continue. On montre que l'image réciproque d'un fermé est fermé. Soit K un fermé de F, on peut remarquer qu'on a: $f^{-1}(K) = p_E((E\text{x}K) \cap G)$. ExK est un fermé et G est aussi fermé, et puisque F est compact, l'application p_E est fermée, ainsi $f^{-1}(K) = p_E((E\text{x}K) \cap G)$ est fermé et f est continue.

Ex8.

1. Supposons que la suite $(f_n)_n$ converge vers f. Pour tout ouvert O de la topologie produit contenant f, il existe N tel que si $n \geq N$, alors $f_n \in O$. On a donc: Pour tout pavé ouvert contenant f, $f_n \in \pi_x O_x$ si $n \geq N$. Soit $x_0 \in I\!R$ quelconque, on veut montrer que $f_n(x_0)$ tend vers $f(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on choisit le pavé, $\pi_x O_x$, avec $O_{x_0} =]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ et $O_x = I\!R$ si $x \neq x_0$. il existe donc un entier N' tel que si $n \geq N'$, on a $f_n \in \pi_x O_x$. En particulier, on aura $f_n(x_0) \in O_{x_0} =]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ si $n \geq N'$ avec ε quelconque.

Inversement, on suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f, montrons qu'elle converge vers f au sens de la topologie produit. Soit O un ouvert quelconque contenant f, O contient un pavé ouvert $\pi_x O_x$ contenant f. On sait que tous les O_x sont égaux à $I\!R$ sauf un nombre fini $0_{x_1},...,0_{x_k}$ (qui sont des ouverts de $I\!R$) avec $f(x_i) \in 0_{x_i}$ pour $1 \leq i \leq k$. Il existe donc pour chaque i un réel $\varepsilon_i > 0$ tel que $]f(x_i) - \varepsilon_i, f(x_i) + \varepsilon_i[\subset O(x_i)$. Puisque la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f, pour tout i, $1 \leq i \leq k$, il existe un entier N_i tel que si $n \geq N_i$, $f_n(x_i) \in]f(x_i) - \varepsilon_i, f(x_i) + \varepsilon_i[\subset O(x_i)$. Par conséquent, si $n \geq \max_i N_i$, on aura bien $f_n \in \pi_x O_x$.

2. Montrons que $g \in \overline{H}$. On se donne un pavé ouvert quelconque $\pi_x O_x$ contenant g, on va montrer que $\pi_x O_x \cap H \neq \emptyset$. On sait que tous les O_x sont égaux à $I\!R$ sauf un nombre fini $0_{x_1},...,0_{x_k}$ qui sont des ouverts de $I\!R$ contenant 1, si on considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = 0$ si $x \notin \{x_1,...,x_k\}$ et $\varphi(x_i) = g(x_i) = 1$ pour $i = 1,...,k$ alors $\varphi \in \pi_x O_x \cap H$. g appartient donc à l'adhérence de H.

3. Remarquons que si la topologie était métrisable, puisque $g \in \overline{H}$, il existerait une suite $(\varphi_n)_n$ dans H convergente vers g. Si on considère les ensembles $\mathcal{O}_n = \{x \in I\!R,\ \varphi_n(x) = 0\}$, alors les $\mathcal{O}_n$ sont des ouverts car les φ_n sont nulles sauf pour un nombre fini de réels (le complémentaire de chaque $\mathcal{O}_n$ est un ensemble de points isolés) et pour la même raison les $\mathcal{O}_n$ sont denses. Comme $\mathbb{R}$, muni de la valeur absolue est un espace métrique complet, c'est un espace de Baire et d'après l'exercice 3, $\cap_n \mathcal{O}_n$ est une partie dense. En particulier, elle est non vide. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi_n(\alpha) = 0$ pour tout entier n. La suite $(\varphi_n(\alpha))_n$ n'est donc pas convergente vers $g(\alpha) = 1$. Ainsi, il n'y a pas convergence simple de la suite $(\varphi)_n$ vers g et ceci est en contradiction avec la question 1.

Série $\sharp$ 4

Exercice 1

Le but de cet exercice est de montrer que, dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, la boule unité fermée n'est jamais compacte.

Soit $(E, || \,.\, ||)$ un e.v.n. de dimension infinie. Nous allons montrer qu'on peut toujours construire une suite qui n'admet pas de suites extraites convergentes. On rappelle que tout sous espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à $I\!R^n$, n étant la dimension de l'e.v. en question. Par conséquent, il est aussi complet donc fermé car il est contenu dans un espace métrique (qui est séparé!).

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $|| \, x_0 \, ||= 1$ et soit F_0 le s.e.v. engendré par x_0. Soit $y_0 \in E \setminus F_0$, on pose $\delta_0 = d(y_0, F_0)$. Justifier qu'on a $\delta_0 > 0$ et qu'il existe $z_0 \in F_0$ tel que $d(y_0, z_0) < 2\delta_0$.

2. On pose $x_1 = \frac{z_0 - y_0}{||z_0 - y_0||}$. Montrer qu'on a: $|| \, x_0 - x_1 \, ||\geq 1/2$.

3. Montrer, par récurrence, que si on a une suite $x_0, x_1, ..., x_k$ d'éléments linéairement indépendants de E telle que $|| \, x_l \, ||= 1$, pour $l = 0, ..., k$ et $|| \, x_i - x_j \, ||\geq 1/2$, pour $i \neq j$, $i, j \in \{0, ..., k\}$, alors il existe x_{k+1} tel que, si F_k désigne le s.e.v. engendré par $x_0, ..., x_k$, on a $x_{k+1} \in E \setminus F_k$, avec $|| \, x_{k+1} \, ||= 1$ et $|| \, x_{k+1} - x_j \, ||\geq 1/2$ pour $j = 0, ..., k$.

4. Justifier que la suite $(x_n)_n$ ainsi obtenue n'admet pas de suite extraite convergente puis conclure.

Exercice 2

La compactification d'Alexandrov assure que, pour tout espace localement compact X, il existe un espace compact noté $\hat{X}$ et une application continue $f : X \to \hat{X}$ tels que le complémentaire de $f(X)$ soit réduit à un seul élément de $\hat{X}$, qu'on note ω et que $f : X \to \hat{X} \setminus \{\omega\}$ soit un homéomorphisme. Notre objectif est de construire UN compactifié d'Alexandrov de $I\!R$.

"La projection stéréographique." Dans $I\!R^2$, on note S^1 le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Une copie de $I\!R$ étant $I\!R$x$\{0\}$, on munit S^1 et $I\!R$x$\{0\}$ de la topologie induite par celle de $I\!R^2$. On considère l'application $f : I\!R \to S^1$ définie comme suit:

Si $N(0, 1)$ est le pôle nord de S^1, et P un point quelconque de $I\!R$, la droite $\mathcal{D}$ passant par N et P coupe le cercle S^1 en un unique point M. On pose alors $f(P) = M$.

1. Vérifier rapidement que cette application est bijective puis vérifier géométriquement que si une suite de points $(P_n)_n$ tend vers un point P de $I\!R$, alors la suite $(f(P_n))_n$ tend vers $f(P)$ et que, inversement, si $(M_n)_n$ est une suite de points qui tend vers M alors $f^{-1}(M_n)$ tend vers $f^{-1}(M)$.

S^1 étant compact, on dit que c'est un compactifié de $I\!R$. On dit aussi que N est le point à l'infini qui joue le rôle de ω.

2. Peut on généraliser ce processus pour compactifier $I\!R^2$ et plus généralement $I\!R^n$ pour $n \geq 3$?

Exercice 3 Connexité et connexité par arcs.
On dit qu'une partie A d'un espace topologique E est connexe s'il n'existe pas deux ouverts O_1 et O_2 de E tels que $A \cap O_1$ et $A \cap O_2$ forment une partition non triviale de A. Autrement écrit, dès que $A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2)$ on a forcément $A \cap O_1 = \emptyset$ ou $A \cap O_2 = \emptyset$. Ceci équivaut à affirmer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées de A (pour la topologie induite) sont A ou $\emptyset$.
1. On veut montrer que les intervalles de $I\!R$ sont connexes.
On note $I = [a, b]$, avec $a < b$, et on suppose qu'il existe deux ouverts O_1 et O_2 de $I\!R$ tels que $I = (O_1 \cap I) \cup (O_2 \cap I)$, partition non triviale.
1. On suppose $b \in O_1$, il existe donc $c \in I \cap O_1$ tel que $]c, b] \subset I \cap O_1$. On considère l'ensemble $K = \{c \in I,\ ]c, b] \subset I \cap O_1\}$. Justifier que K admet une borme inférieure α, puis montrer que α ne peut être ni un élément de O_1 ni un élément de O_2. Conclure.
2. On dit qu'un espace topologique E est connexe par arcs si $\forall (x, y) \in E^2$, il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. γ est appelé chemin joignant x et y.
2a. Montrer que tout espace connexe par arcs est connexe. (On peut raisonner par l'absurde, supposer $X = O_1 \cup O_2$ avec O_1 et O_2 deux ouverts non vides et disjoints, choisir $x \in O_1$, $y \in O_2$ puis aboutir à une contradiction en utilisant la première question.)
2b. Montrer à l'aide du contre-exemple suivant que la réciproque est fausse. Dans $I\!R^2$, on considère la partie A formée par la réunion du graphe de la fonction "$x \mapsto sin(1/x)$", $x \neq 0$ avec le segment $\{0\}$x$[-1, 1]$. Montrer que cette partie est connexe sans être connexe par arcs.
2c. Montrer que tout espace vectoriel normé est connexe par arcs. (On cherchera un chemin sous forme de segment.)
3a. Montrer le résultat général suivant: Si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme entre deux espaces topologiques, alors si $x \in X$ est un élément quelconque de X, l'application restriction notée encore $f : X \setminus \{x\} \to Y \setminus \{f(x)\}$ est un homéomorphisme.
3b. Montrer que si X est connexe et $f : X \to Z$, où Z est un espace topologique, est continue alors $f(X)$ est connexe.
3c. En utilisant les deux questions précédentes, montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre un intervalle ouvert de $I\!R$ et une boule ouverte de $I\!R^2$.

Corrigé série 4

Ex1.

1. Supposons $\delta_0 = 0$, il existe alors une suite $(\alpha_n)_n$ dans F_0 telle que $||\alpha_n - y_0||$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par suite, la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente dans E vers y_0. Puisque F_0 est fermé, cette suite est convergente dans F_0 et forcément $y \in F_0$, ce qui est

absurde.
Par définition, on a: $d(y_0, F_0)$ $=\inf_{x\in F_0} d(x, y_0)$ et par la propriété caractéristique de la borne inférieure, il existe $z_0 \in F_0$ tel que $\delta_0 \leq d(y_0, z_0) < 2\delta_0$.
2. Après calculs, on obtient:

$$||x_0 - x_1|| = \frac{1}{||z_0 - y_0||}.||||z_0 - y_0||x_0 - z_0 + y_0|| \geq \frac{1}{||z_0 - y_0||}\delta_0.$$

Ceci est dû au fait que l'élément $\beta_0 = -||z_0 - y_0||x_0 + z_0$ appartient à F_0 et donc $d(\beta_0, y_0) \geq \delta_0$. On déduit alors que $||x_0 - x_1|| \geq \frac{\delta_0}{2\delta_0} = \frac{1}{2}$.
3. Si F_k est le sous espace vectoriel engendré par $x_0, ..., x_k$, on choisit $y_k \in E \setminus F_k$ et on pose $\delta_k = d(y_k, F_k)$. Comme précédemment, on a $\delta_k > 0$ et il existe $z_k \in F_k$ tel que $\delta_k \leq d(y_k, z_k) < 2\delta_k$. On pose alors $x_{k+1} = \frac{z_k - y_k}{||z_k - y_k||}$ et on vérifie de façon analogue qu'on a: $\forall j$ entier, avec $0 \leq j \leq k$

$$||x_j - x_{k+1}|| = \frac{1}{||z_k - y_k||}.||||z_k - y_k||x_j - z_k + y_k|| \geq \frac{1}{||z_k - y_k||}\delta_k \geq \frac{\delta_k}{2\delta_k} = \frac{1}{2}.$$

4. On peut affirmer que pour toute injection croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et tous entiers n et p distincts, on a: $||x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(p)}|| \geq \frac{1}{2}$. La suite $(x_n)_n$ (qui appartient à la boule unité) ne peut pas admettre de suites extraites convergentes et la boule unité fermée n'est donc pas compacte.
Ex2.
1. Tout d'abord, on précise que S^1 est muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, un ouvert $O \subset S^1$ peut être caractérisé de la façon suivante: Pour tout $M \in O$, il existe un arc de cercle ouvert contenant M et contenu dans O. Ainsi, pour vérifier que l'application est bicontinue, il suffit de remarquer que l'image réciproque d'un arc de cercle ouvert est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et qu'inversement, l'image directe d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un arc de cercle ouvert. De plus, l'application est clairement bijective (on peut considérer l'équation de la droite passant par N et M et vérifier que cette droite coupe le plan $\mathbb{R}$x$\{0\}$ en un point et un seul).
2. Ce procédé peut être généralisé aux dimensions supérieures. Pour S^n, on considére le point N de coordonnées $(0, ..., 0, 1)$ et on se donne un point M de S^n quelconque, différent de N, dont les coordonnées sont de la forme $(a_1, ..., a_n, a_{n+1})$ avec $\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 = 1$ et $a_{n+1} \neq 1$. La droite (MN) coupe l'hyperplan $\mathbb{R}^n$x$\{0\}$ en un unique point P dont les coordonnées $(b_1, ..., b_n, 0)$ peuvent être calculées en fonction de celles de M. Plus précisément, on trouve $b_i = \frac{a_i}{1-a_{n+1}}$ pour $i = 1, ..., n$. Inversement, on a aussi les formules: $a_1 = \lambda b_1$,...,$a_n = \lambda b_n$ et $a_{n+1} = 1 - \lambda$ avec $\lambda = \frac{2}{1+b_1^2+...+b_n^2}$. Ces formules prouvent que l'application ainsi que sa réciproque sont continues.
Ex3.
1. K est non vide car si $b \in O_1 \cap I$, O_1 étant ouvert il existe un réel $\delta > 0$ tel que $]b - \delta, b] \subset O_1 \cap I$. Cet ensemble est aussi minoré par a, il admet donc une borne inférieure α. L'hypothèse $\alpha \in O_1$ implique l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que $]\alpha - \varepsilon, \alpha] \subset O_1 \cap I$ (car

$\alpha \in O_1 \cap]a,b[$ qui est un ouvert) mais α ne serait plus un minorant. De la même façon, si $\alpha \in O_2$, alors $\alpha \in 0_2 \cap]a,b[$ et donc il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $[\alpha, \alpha+\varepsilon[\subset O_2 \cap]a,b[$ et α n'est plus une borne inférieure. Il est donc impossible de trouver deux tels ouverts O_1 et O_2. Tout intervalle de $I\!R$ est donc connexe.

2a. On suppose l'espace topologique E connexe par arcs et soit $E = U \cup V$ une partition de E par deux ouverts disjoints. Soient $x \neq y$ deux éléments de E. L'espace étant connexe par arcs, il existe un chemin, c'est à dire une application continue, $\gamma : [0,1] \to E$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. γ étant continue, $\gamma^{-1}(U)$ et $\gamma^{-1}(V)$ sont deux ouverts de $[0,1]$ (muni de la topologie induite par celle de $I\!R$) disjoints et tels que $[0,1] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$. D'après 1., l'intervalle $[0,1]$ est connexe et donc cette partition est triviale, autrement dit, $U = V = \emptyset$ et par suite, E est bien connexe.

2b. Il suffit de montrer le résultat pour la réunion du segment ave le graphe de "$x \mapsto sin(1/x)$" lorsque $x > 0$. Notons L le segment $\{0\}$x$[-1,1]$ et supposons que la réunion de L avec le graphe de "$x \to sin(1/x)$" pour $x \neq 0$, noté L', ne soit pas connexe. Il existe alors deux ouverts V et V' de $I\!R^2$ tels que $L \cup l' = [(L \cup l') \cap V] \cup [(L \cup l') \cap V']$ avec $[(L \cup l') \cap V] \neq \emptyset$ et $[(L \cup l') \cap V'] \neq \emptyset$. Le segment L est connexe car il est connexe par arcs: En effet, le chemin $\gamma : [0,1] \to I\!R^2$ défini par $\gamma(t) = (0, tx + (1-t)y)$ relie deux éléments quelconques $(0,x)$ et $(0,y)$ de L. Le graphe L' est aussi connexe par arcs car le chemin γ' défini par $\gamma'(t) = (tx + (1-t)y, tsin(1/x) + (1-t)sin(1/y))$ relie les deux éléments $(x, sin(1/x))$ et $(y, sin(1/y))$. Remarquons que puisque le segment L est connexe alors, nécessairement, on a $L \subset V$ ou $L \subset V'$. Supposons, par exemple, qu'on a $L \subset V$, on a alors $L' \subset V'$ et $L' \cap V = \emptyset$. L'ouvert V de $I\!R^2$ qui contient le segment L contient des points du graphe de la fonction "$x \mapsto sin(1/x)$". En effet, soit par exemple le point $(0,1)$ il appartient à $L \cap V$ et donc à V. Il existe une boule $B((0,1), r)$ convenable contenue dans V. Si on choisit $x_k = \frac{1}{2k\pi + \pi/2}$ et on fait tendre k vers $+\infty$, alors $(x_k, sin(1/x_k))$ tend vers $(0,1)$ et donc $L' \cap V \neq \emptyset$. On a obtenu une contradiction d'où la connexité de $L \cup L'$. Montrons que $L \cup L'$ n'est pas connexe par arcs. On doit choisir un point A dans L et un point B dans L' et montrer qu'ils ne peuvet pas être reliés par un chemin continu. On choisit $A = (0,1)$ (ou n'importe quel autre point de L) et $B = (2/\pi, 1)$ (ou n'importe quel autre point du graphe). On suppose qu'il existe un chemin γ continu tel que $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = B$. On considère l'ensemble $S = \{t \in [0,1], \text{tel que } \forall s \in [0,t], \gamma(s) \in L\}$. Cet ensemble est non vide et majoré, il admet donc une borne supérieure notée β. On a $\beta \in S$ car γ est continu et L est un fermé. Or si $t \in [0,1]$ tend vers β^+, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ est tel que $\gamma(t)$ tend vers un point de L et par suite $\gamma_1(t)$ tend vers 0. Les points $\gamma(t)$ lorsque t tend vers β^+ sont des points de L' et $\gamma_2(t)$ n'admet pas de limite lorsque t tend vers β^+. Le chemin γ n'est donc pas continu en β.

2c. Si E est un e.v.n. et $x \neq y$ deux éléments de E, alors l'application $\gamma : [0,1] \to E$ définie par $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ est continue cat $||\gamma(t) - \gamma(t_0)|| \leq |t - t_0|.||x - y||$ tend vers 0 lorsque t tend vers t_0.

3a. La nouvelle application est clairement bijective. Elle reste continue pour les nouveaux espaces car ils sont munis de la toplogie induite ainsi que sa bijection réciproque.
3b. On raisonne par l'absurde; L'existence d'une partition non triviale en deux ouverts de Z implique (en utilisant f^{-1}) l'existence d'une partition non triviale pour X ce qui est impossible.
3c. Supposons l'existence d'un homéomorphisme φ entre un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une boule ouverte B de $\mathbb{R}^2$. la retriction de φ à $I \setminus \{a\}$, où a est un point quelconque de I, est un homéomorphisme de $I \setminus \{a\}$ sur $B \setminus \{\varphi(a)\}$. Or toute boule est connexe par arcs et donc connexe. De plus, si on ote un point à la boule, elle reste connexe par arcs et donc connexe. Par l'image de $B \setminus \{\varphi(a)\}$ (par l'homéomorphisme) serait connexe. Mais si on enlève un point à un intervalle ouvert, il ne reste plus connexe, d'où notre contradiction.

Quelques sujets d'examens avec corrigés.

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2014-15
SMA-S5- Topologie
Contrôle final (1h30)

Exercice 1.

$\mathbb{R}^n$ est muni de la distance euclidienne. On considère une partie non vide $A \subset \mathbb{R}^n$. On note pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $d(x, A)=\inf_{a\in A} d(x, a)$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = d(x, A)$.

1. Soit $x \in \bar{A}$, montrer que $d(x, A) = 0$. Inversement, montrer que si $d(x, A) = 0$ alors $x \in \bar{A}$.
2. Montrer que si x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, alors
$-d(x, y) \leq d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$, puis déduire que f est lipschitzienne.
3. On suppose dans ce qui suit que A est fermée et soit B une partie fermée non vide vérifiant $A \cap B = \emptyset$. On définit $d(B, A)=\inf_{b\in B} d(b, A)$. On admet que $d(B, A) = \alpha > 0$.

En considérant l'application f et les intervalles $] - \alpha/2, \alpha/2[$ et $]\alpha/2, +\infty[$, montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que $A \subset U_1$ et $B \subset U_2$.

Exercice 2. Les trois questions qui suivent sont indépendantes.

1. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application donnée. On dit que f est ouverte (fermée) si pour tout ouvert O de X (tout fermé F de X), $f(O)$ est un ouvert de Y ($f(F)$ est un fermé de Y).

Montrer que si f est bijective, alors f est ouverte si et seulement si f est fermée.

2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x^2$.

2a. On veut montrer que φ est fermée. Pour cela, on se donne un fermé $F \subset \mathbb{R}$, une suite $(y_n)_n = (\varphi(x_n))_n$ dans $\varphi(F)$ convergente vers une limite l et on veut montrer que $l \in \varphi(F)$.

Montrer que la suite $(x_n)_n$ est bornée et justifier qu'une valeur d'adhérence λ de $(x_n)_n$ vérifie $\varphi(\lambda) = l$.

2b. Déterminer $\varphi(\mathbb{R})$ puis décider si l'affirmation suivante est exacte: "Si une application est fermée alors elle est ouverte".

3. Soit $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la projection sur le premier facteur définie par $\pi(x, y) = x$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance du sup c'est à dire $d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ =max$(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$.

3a. Soit $B((x_0, y_0), r)$ la boule de $\mathbb{R}^2$ centrée en (x_0, y_0) et de rayon r. Déterminer $\pi(B((x_0, y_0), r))$ en fonction de x_0 et de r. Peut-on affirmer que π est une application ouverte?

3b. Soit F la partie définie par $F = \{(x, 1/x),\ \ x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. En considérant l'application f définie par $f(x,y) = xy$ et $\mathrm{f}^{-1}(\{1\})$, montrer que F est un fermé.

Déterminer $\pi(F)$. L'application π est-elle fermée?

Exercice 3.

Soit $C = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue $\}$. On définit sur C les deux distances $d_1(f,g) = \int_0^1 |(f-g)(x)|dx$ et $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]}|f(x) - g(x)|$.

1. Montrer que si a et b sont deux réels, on a $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
2. Montrer que l'application $f \longmapsto \int_0^1 |f(x)|dx$ est lipschitzienne dans les deux cas (lorsqu'on munit C de d_1 et lorsqu'on munit C de d_∞).
3. Soit S l'espace des suites réelles convergentes muni de la métrique $d(x,y) = \sup_n|x_n - y_n|$ où $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$. On définit $\psi : S \to \mathbb{R}$ par $\psi(x) = l_x$ où l_x est la limite de la suite x.

Montrer que ψ est continue. (On peut montrer que $|l_x - l_y| \leq |l_x - x_n| + d(x,y) + |y_n - l_y|$ pour tout n puis choisir n assez grand et x assez proche de y pour garantir $|l_x - l_y| < \varepsilon$.)

Déduire que S_0, l'ensemble des suites convergentes vers 0, est un fermé de S.

Corrigé

Exercice 1.

Pour les questions 1 et 2, voir TD ou fichier du livre.

3. Si on admet que $d(B,A) = \alpha > 0$, alors $\forall x \in B$, on a $d(A,x) \geq \alpha$. D'autre part, on a $\forall x \in A$, $d(A,x) = 0$. Par suite, on déduit les inclusions suivantes

$$A \subset U_1 = f^{-1}(]-\alpha/2, \alpha/2[),\ B \subset U_2 = f^{-1}(]\alpha/2, +\infty[)$$

f étant continue, U_1 et U_2 sont deux ouverts. Ils sont bien entendu disjoints.

Exercice 2.

1. Soit $f : X \to Y$ une application bijective. Si f est ouverte et si $F \subset X$ est un fermé, puisque $O = F^c$ est un ouvert, $f(O)$ est un ouvert. f étant bijective, on a $f(F^c) = (f(F))^c$. Ainsi, $(f(F))^c$ est un ouvert et donc $f(F)$ est un fermé. Ceci montre que f est fermée.

L'implication inverse se démontre de la même manière.

2. On considère$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\varphi(x) = x^2$.

a. Montrons que φ est fermée. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, montrons que $\varphi(F)$ est fermé. Pour cela, on va montrer que si $(y_n)_n$ est une suite de $\varphi(F)$ convergente vers l, alors $l \in \varphi(F)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ tel que $y_n = \varphi(x_n) = x_n^2$. La suite $(x_n^2)_n$

est convergente, elle est donc bornée. Il existe un réel M tel que $|x_n^2| \leq M$ et donc $|x_n| \leq \sqrt{M}$. La suite $(x_n)_n$ est donc bornée, elle admet une valeur d'adhérence λ. Il y a une sous-suite $(x_{\psi(n)})_n$ qui converge vers λ. La suite $(\varphi(x_{\psi(n)}))_n$ converge aussi vers l et puisque φ est continue en λ, nécessairement on a $\varphi(\lambda) = l$. Ainsi, $\varphi(F)$ est fermé.

b. $\varphi(I\!R) = [0, +\infty[$ est un fermé et $I\!R$ est un ouvert, on ne peut donc affirmer que si une application est fermée alors elle est ouverte, φ est un contre exemple.

3a. On a $\pi(B((x_0, y_0), r)) =]x_0 - r, x_0 + r[$. (Si la boule est ouverte l'intervalle est ouvert, si la boule est fermée, l'intervalle est fermé.) π est ouverte car tout ouvert est réunion de boules et donc puisque l'image de chaque boule ouverte est une boule ouverte (qui est un intervalle dans ce cas), l'image de l'ouvert sera une réunion de boules. (Réunion d'intervalles ouverts dans ce cas.)

3b. $F = \{(x, 1/x),\ x \neq 0\} \subset I\!R^2$ et f l'application définie par $f(x, y) = xy$. f étant continue et $\{1\}$ étant un fermé de $I\!R$, $f^{-1}(\{1\})$ est un fermé. Or, $F = f^{-1}(\{1\})$, et donc F est un fermé.

$\pi(I\!R^2) =]0, +\infty[$ est un ouvert. $I\!R^2$ étant fermé et son image étant ouverte non fermée, l'application π n'est pas fermée.

Exercice 3.

Soit $C = \{f : [0, 1] \to I\!R, \text{ continue }\}$. On définit sur C les deux distances $d_1(f, g) = \int_0^1 |(f - g)(x)|dx$ et $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[0,1]}|f(x) - g(x)|$.

1. On écrit $a = a - b + b$, ce qui donne $|a| - |b| \leq |a - b|$. En permutant les rôles de a et de b, on obtient $|b| - |a| \leq |a - b|$ c'est à dire $-|a - b| \leq |a| - |b|$. On déduit alors $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

2. Vérifions que l'application $f \longmapsto \int_0^1 |f(x)|dx$ est lipschitzienne lorsque C est muni de la distance d_1.

$| \int_0^1 |f(x)|dx - \int_0^1 |g(x)|dx| \leq \int_0^1 ||f(x)| - |g(x)||dx \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx = d_1(f, g)$.

Lorsque C est muni de la distance d_∞, la démonstration ne pose pas de problème.

3. $\psi(x) = l_x$ si l_x est la limite de la suite $x = (x_n)_n$. On a

$|l_x - l_y| \leq |l_x - x_n| + |x_n - y_n| + |y_n - l_y|,\ \forall n$

$|l_x - l_y| \leq |l_x - x_n| + d(x, y) + |y_n - l_y|,\ \forall n$

$|l_x - l_y| \leq \varepsilon/3 + |x_n - y_n| + \varepsilon/3$, si n est choisi assez grand, d'où.

$|l_x - l_y| \leq \varepsilon$, si $d(x, y) < \varepsilon/3$. Ce qui montre que l'application ψ est continue.

Pour montrer que l'ensemble S_0 est fermé, il suffit de remarquer que S_0 est l'image réciproque d'un fermé par une application continue. En effet, on a $S_0 = \psi^{-1}(\{0\})$.

Université Mohammed V | Année universitaire: 2014-15
Faculté des Sciences | SMA-S5- Topologie
Département de Mathématiques | Rattrapage (1h30)

Exercice 1.

Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application telle que $f^2 = f \circ f$ soit contractante, c'est à dire qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\forall x, y \in E$, $\mathrm{d}(\mathrm{f}^2(x), f^2(y)) \leq k\ d(x, y)$.

1. Justifier que f^2 admet un point fixe. Ce point fixe est-il unique?

2. Montrer que f admet aussi un point fixe.

Exercice 2.

Soit (E, d) un espace métrique.

1. On pose $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$. Montrer que d' est une distance sur E.

2. Soit $f : I\!R_+ \to I\!R_+$ une application strictement croissante, qui vérifie $f(0) = 0$ et $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$, $\forall a, b \in I\!R_+$.

a. On pose $\Delta(x, y) = f(d(x, y))$. Montrer que Δ est une distance sur E.

b. En utilisant la question 2a., montrer que si on pose $d"(x, y) = d(x, y)/(1 + d(x, y))$, $\forall x, y \in E$, alors $d"$ est une distance sur E.

c. Si $E = I\!R$ et $d(x, y) = |x - y|$, déterminer la boule $B_{d"}(0, a)$ lorsque $a \geq 1$ puis lorsque $a < 1$. (Ces boules sont des intervalles.)

Exercice 3.

$E = C([0, 1], I\!R)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles, et soit ϕ un polynôme non identiquement nul.

On pose, pour $f, g \in E$, $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ et $d_\phi(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)||\phi(x)|dx$.

1. Justifier qu'il existe une constante réelle positive M telle que $|\phi(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1]$.

2. Montrer que l'application identité, $Id : (E, d_1) \to (E, d_\phi)$, est continue.

3. On suppose que ϕ ne s'annule pas sur $[0, 1]$.

a. Montrer que $J = \phi([0, 1])$ est un intervalle fermé $[\alpha, \beta]$.

b. Déduire que les deux distances sont équivalentes.

Exercice 4.

$u = \sum_n u_n$ désigne une série numérique réelle. On considère l'ensemble des séries numériques réelles absolument convergentes, $S = \{u = \sum_n u_n$, telles que $\sum_n |u_n| < \infty\}$.

On munit S de la distance d donnée par

$$d(u,v) = \sum_n |u_n - v_n|,$$

et on définit l'application $\psi : S \to I\!R$ par

$$\psi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

1. Montrer que l'application ψ est lipschitzienne.
2. Soit $B \subset S$ la partie définie par $B = \{u \in S$, telles que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 0\}$.
   B est-il un ouvert ou un fermé de S? Justifier.

Corrigé

Exercice 1.

1. On applique le théorème du point fixe à la fonction f^2. Ce point est unique d'après le théorème du point fixe.

2. Si x_0 est ce point fixe, on a $f(f(x_0)) = x_0$ et donc $f^2(f(x_0)) = f(x_0)$. Ainsi $f(x_0)$ est aussi un point fixe, et forcément, $f(x_0) = x_0$ d'après l'unicité. f admet aussi x_0 comme point fixe.

Exercice 2.

1. d' est une distance. Les deux premières propriétés sont faciles à vérifer et la troisième résulte de l'inégalité $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour tout réels positifs a et b.

2a. On remarque que si $f(0) = 0$ et si f est croissante alors l'équation $f(x) = 0$ admet comme unique solution $x = 0$. Ceci prouve la première propriété des distances. La symétrie ne pose pas de problème particulier. L'inégalité triangulaire se déduit facilement de l'inégalité $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$.

2b. Il suffit de considérer la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{1+x}$ et de s'assurer qu'elle vérifie toutes les propriétés de la question 2a.

2c. On suppose d'abord $a \geq 1$, on a $x \in B_{d''}(0,a)$ si et seulement si $\frac{|x|}{1+|x|} \leq 1$. Or, cette dernière égalité est toujours vérifiée. Par conséquent, on a $B_{d''}(0,a) = I\!R$ dans ce cas.
Si $a < 1$, alors l'inégalité $\frac{|x|}{1+|x|} \leq a$ est équivalente à $]-\frac{a}{1-a}, \frac{a}{1-a}[$ qui est donc la boule $B_{d''}(0,a)$ dans ce cas.

Exercice 3.

1. ϕ étant un polynôme, c'est donc une fonction continue. Elle est donc bornée sur l'intervalle $[0,1]$.

2. On a $d_\phi(f,g) \leq M d_1(f,g)$. L'application considérée est donc lipschitzienne et par suite, elle est continue.

3a. L'image d'un intervalle fermé borné par une application continue est un intervalle

fermé borné. Il en est de même pour l'application $\mid \phi \mid$. Il existe donc deux constantes réelles positives α et β telles que $\alpha \leq \mid \phi(x) \mid \leq \beta$, pour tout $x \in [0,1]$.
3b. De ce qui précède, on déduit que pour tous f, g dans E, on a: $\alpha d(f,g) \leq d_\phi(f,g) \leq \beta d(f,g)$. Les distances sont comparables et donc équivalentes.

Exercice 4.

1. On peut vérifier sans trop de difficultés que: $\mid \psi(u) - \psi(v) \mid \leq d(u,v)$.

2. On a $B = \psi^{-1}(\{0\})$ et puisque ψ est lipscitzienne, elle est continue et $\{0\}$ étant un fermé de $I\!R$, B est un fermé de S.

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2015-16
SMA-S5- Topologie
Examen final 1h30

Exercice 1. $E = C(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des applications définies, continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On considère l'ensemble X défini par

$$X = \{f \in C(\mathbb{R}) \text{ telle que} (1+x^2)|f(x)| \text{ soit une fonction bornée}\}.$$

Pour tout $f \in X$, on pose $\mathbf{N}(f) = sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)|$ et $\mathbf{L}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. (On peut montrer mais on suppose que cette intégrale est convergente.)
1. Montrer que N définit une norme.
2a. Calculer $L(g)$ où g désigne la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
2b. En écrivant $f(x) = \frac{1}{1+x^2}.(1+x^2)f(x)$, montrer que $|L(f)| \leq \pi N(f)$.
2c. Que peut on déduire pour l'application linéaire L? Peut on calculer exactement $||L||$?

Exercice 2 Soit X un espace métrique, Y un espace topologique séparé et $f,\ g : X \to Y$ deux applications continues.
On considère $A = \{x \in X,\ f(x) = g(x)\}$.
1. On veut montrer que A est un fermé. Pour cela, soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers une limite l, montrer que $f(l) = g(l)$ puis conclure.
2. Montrer que si f et g coïncident sur un ensemble Z dense de X, alors f et g coïncident sur X.

Exercice 3 $E = C([0,1], \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions définies et continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme $||f|| = sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$.
On rappelle que c'est un espace métrique complet.
1. Rappeler l'énoncé du théorème du point fixe.
2. On considère l'application $\phi : E \to E$ définie pour tout $f \in E$ par

$$\phi(f)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 sin(x^2+t^2)f(t)dt.$$

Montrer que $||\phi(f) - \phi(g)|| \leq \frac{1}{2}||f-g||$.
3. Déduire que l'équation fonctionnelle $\phi(f) = f$ admet une solution unique dans E.

Exercice 4 $\mathbf{l}^\infty$ désigne l'ensemble des suites réelles bornées et $\mathbf{c_0}$ le sous-ensemble des suites réelles convergentes vers 0. On munit $\mathbf{l}^\infty$ de la distance d donnée par $d(x,y) = \sup_n|x_n - y_n|$.
1. On veut montrer que $\mathbf{c_0}$ est un fermé de $\mathbf{l}^\infty$. Pour cela, nous allons montrer que son complémentaire $\overline{\mathbf{c_0}}$ est un ouvert. Soit donc $z = (z_n)_n \in \overline{\mathbf{c_0}}$.

1a. On suppose que z converge vers une limite $l \neq 0$ et on suppose $l > 0$. Si $x \in \mathbf{c_0}$ est quelconque, en considérant la limite de la suite $(u_n)_n = (z_n - x_n)_n$, déduire (en fonction de l) un minorant strictement positif de $d(x, z)$ et ceci pour tout $x \in \mathbf{c_0}$. Trouver alors un réel strictement positif R tel que la boule $B(z, R)$ soit contenue dans $\overline{\mathbf{c_0}}$.
1b. On suppose que la suite z est divergente. On suppose, par exemple, qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $z_n \geq \varepsilon$ pour une infinité d'indices n. Proposer, ici aussi, un réel strictement positif R tel que la boule $B(z, R)$ soit contenue dans $\overline{\mathbf{c_0}}$.
2. On désigne par $\mathbf{V}$ le sous espaces des suites nulles à partir d'un certain rang.
Montrer, en utilisant la première question, que $\mathbf{V}$ n'est pas dense dans $\mathbf{l}^\infty$.
$\mathbf{V}$ est il fermé dans $\mathbf{c_0}$?

Corrigé

Ex1. 1. N est une norme (facile à montrer).
2a. $L(g) = [arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$.
2b. $|L(f)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}(1 + x^2)f(x)dx| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}.N(f)dx \leq \pi N(f)$.
2c. On remarque que L est linéaire et l'inégalité précédente prouve que L est continue.
On peut calculer $||L||$ car, dans la question 2a, on a trouvé $L(g) = \pi$ et g fait partie de la boule unité car $N(g) = 1$. Le majorant π est donc atteint sur la boule unité, on a donc $||L|| = \pi$.

Ex2. 1. Soit $(x_n)_n$ une suite dans A convergente vers l, montrons que $l \in A$. Les applications f et g étant continues, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $f(l)$ et la suite $(g(x_n))_n$ tend vers $g(l)$. Les suites étant les mêmes et l'espace Y étant séparé, elles ont la même limite. Ainsi, $f(l) = g(l)$ et $l \in A$.
2. Si f et g coïncident sur Z tel que $\bar{Z} = X$, alors on a $Z \subset A$. Comme $Z \subset \bar{A} = A$ et $\bar{Z} = X$, on a $A = X$. f et g coïncident donc partout sur X.

Ex3. 1. Rappel de l'énoncé du théorème du point fixe, voir cours.
2.

$$||\phi(f)-\phi(g)|| = sup_{x\in[0,1]}\frac{1}{2}|\int_0^1 sin(x^2+t^2)(f(t)-g(t))dt| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |f(t)-g(t)|dt \leq \frac{1}{2}||f-g||.$$

3. Par application du théorème du point fixe, ϕ admet un unique point fixe dans l'espace métrique complet E.

Ex4. 1. Pour montrer que c_0 est fermé, nous allons montrer que son somplémentaire $\bar{c_0}$ est ouvert. Soit $z = (z_n)_n \in \bar{c_0}$ et on suppose, dans un premier temps, que z est convergente vers une limite $l > 0$. Dans ce cas, la suite $(z_n - x_n)_n$ tend vers l quel que soit la suite $x = (x_n)_n \in c_0$. On en déduit

$$d(x, z) = sup_{|}z_n - x_n| \geq l.$$

En effet, si on avait $d(x,z) < l$, la suite z ne peut converger vers l. Ainsi, $d(x,z) \geq l$ ceci $\forall x \in c_0$ et donc $B(z,l) \subset \bar{c_0}$. $\bar{c_0}$ est donc bien un ouvert dans ce cas.
Maintenant, si z n'est pas convergente, on suppose, par exemple, qu'il existe $\varepsilon > 0$, et une infinité d'indices n tels que $z_n \geq \varepsilon$. On a alors

$$d(x,z) = sup_n |z_n - x_n| \geq \varepsilon, \ \forall x \in c_0.$$

Sinon, si $d(x,z) < \varepsilon$, comme x_n tend vers 0, les z_n seront $< \varepsilon$ à partir d'un certain rang, ce qui n'est pas. On peut donc affirmer dans ce cas que $B(z,\varepsilon) \subset \bar{c_0} et \bar{c_0}$ est donc aussi ouvert dans ce cas.
2. V n'est pas dense dans l^∞ car on a

$$V \subset c_0 \subset l^\infty$$

$$\bar{V} \subset \bar{c_0} = c_0$$

c_0 étant strictement inclus dans l^∞, V n'est donc pas dense dans l^∞.
V n'est pas fermé dans c_0, car on peut construire une suite dans V qui converge dans c_0 mais pas dans V, par exemple, la suite $(x^p)_p$, définie pour tout $p \in I\!N^*$ par $x^p = (x_n^p)_{n \geq 1}$, elle même définie par $x_n^p = 1/n$ si $n \leq p$ et $x_n^p = 0$ si $n > p$, est dans V. Elle converge vers la suite $1, 1/2, 1/3, 1/4, ..., 1/n, ...$ dans c_0 mais cette limite n'est pas dans V.

Université Mohammed V | Année universitaire: 2015-16
Faculté des Sciences | SMA-S5- Topologie
Département de Mathématiques | Examen de rattrapage 1h30

Exercice 1.
1. Rappeler la définition d'une topologie sur un ensemble X.
2. Rappeler la définition d'un ouvert dans un espace métrique (E, d).

Exercice 2. (K, d) désigne un espace métrique **compact** et $f : K \to K$ une application vérifiant $d(f(x), f(y)) < d(x, y),\ \forall x, y \in K,\ x \neq y$.
1. Montrer que f est continue et qu'elle admet au plus un point fixe.
2. On veut montrer qu'il existe un élément $a \in K$ tel que $d(a, f(a)) \leq d(x, f(x))$ quel que soit $x \in K$.
2a. On considère l'application ψ définie pour tout $x \in K$ par $\psi(x) = d(x, f(x))$. Montrer que $\forall x_0, x_1 \in K$, on a $|\psi(x_0) - \psi(x_1)| \leq d(x_0, x_1) + d(f(x_0), f(x_1))$.
2b. Prouver que l'application ψ est continue et conclure.
3. Montrer que a vérifie $a = f(a)$. (On peut raisonner par l'absurde et obtenir une contradiction).

Exercice 3. $E = C([0, 1], I\!R)$ désigne l'espace vectoriel des applications définies, continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. On définit sur E les deux normes

$$||f||_\infty = sup_{x\in[0,1]}|f(x)|, \text{ et } ||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx.$$

On considère le sous ensemble $A \subset E$ défini par $A = \{f \in E;\ f(x) > 0,\ \forall x \in [0, 1]\}$.
1. On veut montrer que A est un ouvert pour la norme $||.||_\infty$.
1a. Soit $f_0 \in A$, montrer que le réel $\alpha = inf_{x\in[0,1]} f_0(x)$ est **stictement** positif.
1b. Soit $L = B_\infty(f_0, \alpha/2)$ la boule, pour la norme $||.||_\infty$, centrée en f_0 et de rayon $\alpha/2$. Montrer que si $g \in L$ alors $g(x) \geq \alpha/2$, $\forall x \in [0, 1]$ puis conclure.
2. On veut montrer que A n'est pas un ouvert pour la norme $||.||_1$. Soit $f_0 \in A$, on va montrer que $\forall n \in I\!N^*$, la boule $B_1(f_0, 1/n)$ (pour la norme $||.||_1$) contient un élément φ qui n'appartient pas à A.
2a. On pose $\gamma = sup_{x\in[0,1]} f_0(x)$ qu'on suppose supérieur à 1 ($\gamma > 1$, pour simplifier) et on définit la fonction φ par

$\varphi(x) = f_0(\frac{1}{\gamma n}).\gamma n.x$, si $x \in [0, \frac{1}{\gamma n}]$, (elle est linéaire sur cet intervalle, de la forme "ax")

$$\varphi(x) = f_0(x), \text{si } x \in]\frac{1}{\gamma n}, 1].$$

Montrer qu'on a $|f_0(x) - \varphi(x)| \leq \gamma$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{\gamma n}]$ et qu'on a aussi

$$\int_0^1 |f_0(t) - \varphi(t)|dt = \int_0^{\frac{1}{\gamma n}} |f_0(t) - \varphi(t)|dt + \int_{\frac{1}{\gamma n}}^1 |f_0(t) - \varphi(t)|dt \leq \frac{1}{n}.$$

2b. Justifier que φ est élément de E mais n'est pas élément de A puis conclure.
3. D'après ce qui précède, on peut déduire qu'une seule des affirmations suivantes est vraie, laquelle? Justifier.
(I) La topologie associée la norme $||.||_\infty$ est plus fine que celle associée à la norme $||.||_1$.
(II) La topologie associée la norme $||.||_\infty$ est moins fine que celle associée à la norme $||.||_1$.
(III) La topologie associée la norme $||.||_\infty$ n'est pas plus fine que celle associée à la norme $||.||_1$.
(IV) La topologie associée la norme $||.||_1$ n'est pas plus fine que celle associée à la norme $||.||_\infty$.

Corrigé. Exercice 2.
1. f est continue car lipschitzienne.
2a. On applique deux fois l'inégalité triangulaire.
2b. f étant continue, il est facile de montrer la continuité de ψ en utilisant la question précédente.
D'autre part, ψ étant continue définie sur un compact et l'image d'un compact étant compact, il existe $a \in K$ tel que $inf_{x\in K}\psi(x) = \psi(a) = d(a, f(a))$.
a vérifie donc $d(a, f(a)) \leq d(x, f(x))$, $\forall x \in K$.
3. On a forcément $a = f(a)$ car sinon $d(a, f(a)) \neq 0$ et on aurait $d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a))$. Le minimum de ψ ne serait pas atteint en a.
Exercice 3.
1a. $f([0, 1])$ est un compact donc la borne inférieure est atteinte en un certain x_0. Il existe donc $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = inf_{x\in[0,1]}f(x)$. On a aussi $f(x_0) > 0$.
1b. Si $g \in L$, on a $d_\infty(f, g) < \alpha/2$. Cela implique

$$-\alpha/2 < f(x) - g(x) < \alpha/2$$

on déduit alors $g(x) > f(x) - \alpha/2 \geq \alpha/2 > 0$, ainsi $g \in A$ et par suite A est un ouvert.
2a. Puisque f et φ sont deux fonctions positives, comprises entre 0 et γ, on a donc $|f(x) - \varphi(x)| \leq \gamma$.
Cette question ne pose aucun problème si on remarque que f et φ sont égales sur l'intervalle $[\frac{1}{\gamma n}, 1]$.
2b. φ est continue sur $[0, 1]$ (vérifier la continuité au point $\frac{1}{\gamma n}$). De plus, φ n'est pas élément de A car φ s'annule en 0. A n'est donc pas un ouvert pour la norme $||.||_1$.
3. Seule la proposition IV est vraie.

Université Mohammed V-Rabat | Année universitaire: 2016-17
Faculté des Sciences | SMA-S5- Topologie
Département de Mathématiques | Examen 1h30

Exercice 1.
1. Dans un espace topologique E, rappeler la définition d'un point x adhérent à une partie non vide $A \subset E$.
2. Soit $E = \Pi_{i \in I} E_i$ un produit d'espaces topologiques. Décrire un ouvert pour la topologie produit définie sur E.

Exercice 2. Soit $E_1 = C^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On pose, pour tout $f \in E_1$, $||f||_\infty = sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et $||f|| = |f(0)| + ||f'||_\infty$.
1. Montrer que $||.||$ est une norme sur E_1.
2. Montrer que pour tout $f \in E_1$, on a $||f||_\infty \leq ||f||$.
3. On rappelle que $E_0 = C([0,1], \mathbb{R})$, espace des fonctions continues, muni de la norme $||.||_\infty$ est complet. On veut montrer que $(E_1, ||.||)$ est un espace métrique complet. Pour cela, soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(E_1, ||.||)$.
3a. Montrer que la suite des dérivées $(f'_n)_n$ est convergente vers une fonction g continue.
3b. On pose $\psi(x) = \alpha + \int_0^x g(t)dt$ où $\alpha = lim_{n \to \infty} f_n(0)$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge vers la fonction ψ pour la norme $||.||$.
4. Vérifier que la suite $(\varphi_n)_n$ donnée par $\varphi_n(x) = xe^{-\frac{nx^2}{2}}$ converge dans $(E_1, ||.||_\infty)$ mais ne converge pas dans $(E_1, ||.||)$.

Exercice 3. (E, d) désigne un espace métrique, on suppose que E est compact. Soit $f : E \to E$ une application continue.

I. On suppose dans cette partie que f vérifie: $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, $\forall (x, y) \in E^2$ et on se propose de montrer que f est bijective.
Soit $x_0 \in E$, on suppose que $x_0 \notin f(E)$ et soit α le réel défini par $\alpha = inf_{z \in f(E)} d(x_0, z)$.
1. Justifier qu'on a $\alpha > 0$.
2. On définit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$, par $x_n = f^n(x_0)$. Montrer que $d(x_0, x_n) \geq \alpha$ pour tout $n \geq 1$ puis que $d(x_n, x_m) \geq \alpha$ si $m \neq n$.
3. Trouver une contradiction et conclure que f est surjective puis que f est bijective.

II. On suppose à présent que f vérifie $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. On veut montrer qu'on a forcément l'égalité.
On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe deux éléments de E, x et x' distincts tels que $d(f(x), f(x')) > d(x, x')$.

1. On considère les deux suites $(x_n)_n = (f^n(x))_n$ et $(x'_n)_n = (f^n(x'))_n$. Montrer rigoureusement qu'il existe deux sous suites $(x_{\psi(n)})_n$ et $(x'_{\psi(x)})_n$ convergentes (avec les mêmes indices).
2. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que si $n_0 \geq N$, on a $d(f^{\psi(n_0+1)}(x), f^{\psi(n_0)}(x)) < \varepsilon$. Trouver alors un majorant de $d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x), x)$.
3. Déduire de ce qui prédède une majoration de $d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x), f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x'))$ en fonction de $d(x, x')$ et de ε.
4. Déduire alors une contradiction et conclure.

Corrigé
Exercice 1. Voir cours.

Exercice 2.
1. On va vérifier seulement une propriété.
On suppose $||f|| = 0$, ceci implique $||f'||_\infty = 0$ et $|f(0)| = 0$. Ainsi, on a $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et par suite f est une constante qui est forcément nulle.
2. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [0, 1]$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(x) - f(0) = xf'(c)$. On obtient alors $|f(x)| \leq |f(0)| + x|f'(c)|$ et donc $|f(x)| \leq |f(0)| + ||f'||_\infty$ ceci $\forall x \in [0, 1]$, d'où $||f||_\infty \leq ||f||$, pour tout $f \in E_1$.
3a. La suite $(f'_n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace métrique $(E_0, ||.||_\infty)$, ce dernier étant complet, elle converge donc vers une fonction continue g.
3b. Puisque la dérivée de la fonction ψ est la fonction g, que la suite $(f'_n)_n$ converge vers g (pour la norme $||.||_\infty$) et que la suite $(f_n(0))_n$ converge vers $\alpha = \psi(0)$, on peut affirmer que la suite $(f_n)_n$ converge vers ψ pour la norme $||.||$.
4. On peut vérifier que la suite $(\sup_{x\in[0,1]} |\varphi_n(x)|)_n$ tend vers 0 ce qui prouve que la suite $(\varphi_n)_n$ converge pour la norme $||.||_\infty$. Par contre, elle ne converge pas pour la norme $||.||$ car, si elle convergeait pour cette norme, la suite des fonctions dérivées convergerait pour la norme $||.||_\infty$. En particulier, la limite de la suite des dérivées serait continue ce qui n'est pas car on a une discontinuité en 0.

Exercice 3.
I.1. On a $\alpha > 0$ car sinon on peut construire une suite de points $(z_n)_n$ dans $f(E)$ convergente vers x_0. E étant compact et f continue, $f(E)$ est aussi compact. La limite x_0 doit appartenir à $f(E)$ ce qui contredit l'hypothèse.
2. Il suffit de remarquer que pour tout entier $n \geq 1$, x_n appartient à $f(E)$ et par suite $d(x_0, x_n) \geq d(x_0, f(E)) = \alpha$.
On suppose pour simplifier qu'on a $m \geq n$. D'après l'hypothèse, on a $d(x_n, x_m) = d(f^n(x_0), f^m(x_0)) = d(x_0, f^{m-n}(x_0)) \geq \alpha$.
3. La suite $(x_n)_n$ est dans $f(E)$ qui est compact, elle admet donc une valeur d'adhérence.

Or, l'inégalité $d(x_n, x_m) \geq \alpha$ montre que toute sous suite n'est pas de Cauchy, d'où la contradiction. Ainsi, f est surjective et comme f vérifie $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, elle est aussi injective. f est donc bijective.

II.1. Tout d'abord, il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente. Si on considère la sous suite $(y_{\varphi(n)})_n$, elle admet elle même une sous suite notée $(y_{\psi(n)})_n$ elle même convergente. $(x_{\psi(n)})_n$ étant une sous suite de la sous suite convergente $(x_{\varphi(n)})_n$, elle est aussi convergente.
2. On a $f^{\psi(n)}(x_0) = x_{\psi(n)}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que si p et q sont deux entiers supérieurs ou égaux à N, on a $d(f^n(x), f^m(x)) < \varepsilon$. Si $n_0 \geq N$, on a alors, $\psi(n_0)$ et $\psi(n_0 + 1)$ supérieurs à N, on obtient alors $d(f^{\psi(n_0+1)}(x), f^{\psi(n_0)}(x)) < \varepsilon$.
Un majorant évident de $d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x), x)$ est d'après ce qui précède ε.
3. On a $d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x), f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x')) \leq d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x), x) + d(x, x')$
$+d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x'), x')$. On déduit alors
$d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x), f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x')) \leq 2\varepsilon + d(x, x')$, ceci $\forall \varepsilon > 0$.
4. On a abouti à $d(f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x), f^{\psi(n_0+1)-\psi(n_0)}(x')) \leq d(x, x')$ ce qui contredit $d(f(x), f(x')) > d(x, x')$.
f vérifie donc $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, $\forall (x, y) \in E^2$.

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2016-17
SMA-S5- Topologie
Examen de rattrapage 1h30

Exercice 1.
1. Donner la définition d'un espace métrique compact.
2. Donner une propriété équivalente.

Exercice 2.

Soit (K, d) un espace métrique compact. On munit l'espace KxK de la distance D définie par

$$D((x, y), (x', y')) = max(d(x, x'), d(y, y')).$$

1. Montrer, en utilisant les suites, que l'espace KxK est compact.
2. On rappelle que le diamètre $\delta(A)$ d'une partie non vide A d'un espace métrique (E, d_1) est donné par $\delta(A) = sup_{x,y\in A} d_1(x, y)$.

2a. Montrer que si un espace métrique est compact alors son diamètre est fini.
2b. Montrer qu'il existe deux éléments a et b dans K tel que $\delta(K) = d(a, b)$. (On pourra considérer une application convenable définie sur KxK et à valeurs dans $\mathbb{R}$.)

Exercice 3.

$E = C([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. On définit sur E la norme N_1, pour tout $f \in E$, par $N_1(f) = \int_0^1 \mid f(t) \mid dt$ et on considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = x^n$ pour tout $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$.

1. Calculer $N_1(f_n)$. La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle dans E pour la norme N_1? Justifier votre réponse.
2. La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle, dans E, pour la norme N_∞? On rappelle que $N_\infty(f) = sup_{x\in[0,1]} \mid f(x) \mid$.
3. Les deux normes N_1 et N_∞ sont elles équivalentes?
4. **Question bonus:** Montrer que l'espace (E, N_1) n'est pas complet en choisissant une suite de Cauchy qui ne soit pas convergente.

Exercice 4.

On reprend l'espace métrique $(E, N_\infty) = (C([0, 1], \mathbb{R}), N_\infty)$ de l'exercice précédent et on souhaite montrer que le sous espace $F \subset E$ des fonctions définies continues et affines par morceaux sur $[0, 1]$ est dense dans E. On se donne donc un élément quelconque $f \in E$, un réel $\varepsilon > 0$ et on cherche un élément $g \in F$ tel que $N_\infty(f - g) < \varepsilon$.

1. Montrer, en précisant la propriété utilisée, qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que si x et y sont deux éléments de $[0,1]$ avec $\mid x - y \mid \leq \delta$, alors $\mid f(x) - f(y) \mid < \varepsilon$. On suppose dans la suite $\delta < 1$.
2. On note $k_0, k_1, ..., k_n$ la suite finie définie par $k_0 = 0$ et $k_{i+1} = k_i + \frac{i+1}{n}$ pour $i = 0, ..., n-1$ et où n est un entier supposé vérifier la condition $1/n < \delta$.
On définit la fonction g sur $[k_i, k_{i+1}[\cap[0,1]$, pour $i = 0, ..., n-1$ par $g(x) = \frac{f(k_{i+1})-f(k_i)}{k_{i+1}-k_i}(x - k_i) + f(k_i)$ et on pose $g(1) = f(1)$.
2a. Montrer que g est continue aux points k_i $\forall i = 1, ..., n$.
2b. Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $\mid f(x) - g(x) \mid < 2\varepsilon$. (On se placera sur l'intervalle $[k_i, k_{i+1}[$, on utilisera la première question et on remarquera que $\mid g(x) - f(k_i) \mid \leq \mid f(k_{i+1}) - f(k_i) \mid$ pour tout $x \in [k_i, k_{i+1}[$.)

Corrigé.

Ex 2. 1. Soit $(x_n, y_n)_n$ une suite dans KxK. K étant un compact, la suite $(x_n)_n$ admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente vers une limite l_1. La suite extraite $(y_{\varphi(n)})_n$ admet une suite extraite $(y_{\varphi(\psi(n))})_n$ convergente vers une limite l_2. La suite extraite $(x_{\varphi(\psi(n))})_n$, étant une suite extraite de $(x_{\varphi(n)})_n$, converge aussi vers l_1. Finalement, la suite $(x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))})_n$, extraite de la suite $(x_n, y_n)_n$, converge vers (l_1, l_2).

2a. On raisonne par l'absurde. Soit $\alpha \in K$. K n'étant pas borné, il existe un élément $x_0 \in K$ tel que $d(x_0, \alpha) \geq 1$. De même il existe un élément $x_1 \in K$ vérifiant $d(x_1, \alpha) \geq 2$. On construit par récurrence une suite déléments $(x_n)_n$ dans K vérifiant $d(x_n, \alpha) \geq n+1$. La suite $(x_n)_n$ n'admet pas de sous suite convergente. En effet, si $(x_n)_n$ avait une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente vers une limite l alors, par continuité de la distance, $d(x_{\varphi(n)}, \alpha)$ devrait converger vers $d(l, \alpha)$. On a obtenu une contradiction.

2b. L'application distance $d : K\text{x}K \to I\!R$ étant continue, l'image de KxK est un compact de $I\!R$, par conséquent un fermé, borné de $I\!R$. Si on pose

$$F = \{d(x,y),\ (x,y) \in K\text{x}K\}$$

alors F est majoré et sa borne supérieure qui est $\delta(K)$ appartient à F. Il existe donc $(a,b) \in K$xK tel que $d(a,b) = \delta(K)$.

Ex 3. 1. On a $N_1(f_n) = N_1(f_n - 0) = \frac{1}{n+1}$. Ceci prouve que la suite $(f_n)_n$ converge vers la fonction identiquement nulle (qui est bien élément de E).

2. Comme la convergence pour la norme N_∞ est la convergence uniforme et que la convergence uniforme implique la convergence simple, si la suite $(f_n)_n$ convergeait vers une fonction φ pour la norme N_∞ alors forcément, on a $\varphi(1) = \lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$ et $\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ si $x \in [0,1[$. Or, cette fonction n'étant pas continue en 1, n'est pas élément de E.

3. Les deux normes n'ayant pas les mêmes suites convergentes, elles ne sont pas équivalentes.

Ex 4. 1. La fonction f étant continue sur un compact, elle y est uniformément continue. Ceci répond à cette question.

2a. On montre facilement que la limite à droite qui est $f(k_i)$ est aussi la limite à gauche.

2b. Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire et de remarquer que

$$| f(k_i) - g(x) | \leq | f(k_{i+1}) - f(k_i) |, \text{ pour } x \in [k_i, k_{i+1}].$$

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2017-18
SMA-S5- Topologie
Examen 1h30

Exercice 1. (5pts)

$E = C([0,1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des applications définies et continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\| \, . \, \|_\infty$ donnée, pour tout $f \in E$, par $\| f \|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} | f(x) |$.

On définit l'application $\varphi : E \to E$ par

$$\varphi(f) = g, \quad \text{avec } g(x) = \int_0^x sin\frac{f(t)}{2}\, dt.$$

1. Montrer que l'application φ est lipschitzienne.

2. Justifier que l'équation $\varphi(f) = f$ admet une unique solution $f \in E$. On précisera toutes les hypothèses utiles.

Exercice 2. (6 pts)

$(\mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}, d)$ est l'espace métrique produit muni de l'une des distances habituelles. On considère la projection $p_1 : \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}$, par $p_1(x, y) = x$.

On rappelle qu'une application est dite fermée si l'image de tout fermé est un fermé et on souhaite montrer que l'application p_1 n'est pas fermée.

On considère la partie $A \subset \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}$ définie par

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N},\, k\geq 1} ([-1+\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}]\text{x}\{k\}).$$

1. Soit $(x_n, y_n)_n$ une suite de points de A convergente vers $(l_1, l_2) \in \mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}$. En remarquant que la suite $(y_n)_n$ est une suite d'entiers naturels, justifier que cette suite est constante à partir d'un certain rang (c'est à dire $y_n = k_0 \in \mathbb{N}$ pour $n \geq n_0$).

2. En étudiant la suite $(x_n)_n$, montrer que (l_1, l_2) appartient à A puis conclure que A est un fermé.

3. Déterminer $p_1(A)$ puis conclure.

4. L'application p_1 est elle ouverte? Justifier.

Exercice 3. (9 pts)

On considère une nouvelle fois l'espace métrique (E, d_∞) de l'exercice 1, d_∞ étant la distance associée à la norme $\| \, . \, \|_\infty$ et l'espace vectoriel normé $(F, \| \, . \, \|_1)$ des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, où la norme est donnée par $\| f \|_1 = \| f' \|_\infty + | f(0) |$, pour tout $f \in F$.

On définit, pour tout entier $k \geq 1$, l'application ψ_k sur $[0,1]$ par $\psi_k(x) = \frac{x}{k}$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\psi_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{x}{k}$ si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$.

1. Justifier qu'on a $\psi_k \in E$, $\psi_k \notin F$ puis calculer $\| \psi_k \|_\infty$, pour tout $k \geq 1$.

2a. Soit $f \in F$ et soit $r > 0$ un réel quelconque. En utilisant ψ_k (pour k assez grand) et f, donner une fonction $g \in E$ avec $g \notin F$ vérifiant $d_\infty(f, g) < r$.

2b. Peut on affirmer que F est un ouvert de E? Justifier.

2c. F est il un fermé de E?

3a. Soit $K \subset F$ un compact. Montrer qu'il existe un réel $R > 0$ tel que $\forall f \in K$, on a

$$\| f \|_1 \leq R.$$

3b. En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer deux réels α et β tels que

$| f(x) | \leq \alpha x + \beta$, pour tout $f \in K$ et tout $x \in [0, 1]$.

3c. Déduire que K est borné dans E.

Corrigé.

Ex1. 1. Pour f_1, f_2 appartenant à E, on a

$$| (\varphi(f_1) - \varphi(f_2))(x) | \leq \int_0^x | sin\frac{f_1(t)}{2} - sin\frac{f_2(t)}{2} | \, dt \leq \int_0^1 | sin\frac{f_1(t)}{2} - sin\frac{f_2(t)}{2} | \, dt$$

ceci pour tout $x \in [0, 1]$. D'autre part, on a $| sinx - siny | \leq | x - y |$ pour tout $x, y \in I\!R$. On déduit

$$| (\varphi(f_1) - \varphi(f_2))(x) | \leq \int_0^1 | \frac{f_1(t)}{2} - \frac{f_2(t)}{2} | \, dt.$$

Enfin, en passant au "sup", on a

$$\| \varphi(f_1) - \varphi(f_2) \|_\infty \leq \frac{1}{2} \| f_1 - f_2 \|_\infty .$$

Ceci prouve que l'application φ est lipschitzienne.

2. L'espace E étant complet et l'application φ contractante ($\frac{1}{2} < 1$), on peut appliquer le théorème du point fixe.

Ex2. 1. Si $(y_n)_n$ est une suite d'entiers qui converge vers une limite l_2, forcément $l_2 \in I\!N$ (sinon $l_2 \in]p, p+1[$, p entier convenable, et pour un bon choix de $\varepsilon > 0$, la suite ne serait pas une suite d'entiers). Ensuite, la suite est forcément constante et égale à l_2 à partir d'un certain rang sinon, ici aussi, pour un bon choix de $\varepsilon > 0$, la suite ne serait pas convergente vers l_2.

2. D'après ce qui précède, puisque $y_n = l_2 = k_0$ à partir d'un certain rang, les x_n appartiennent à l'intervalle $[-1 + \frac{1}{k_0}, 1 - \frac{1}{k_0}]$ à partir d'un certain rang. Cette suite étant convergente et l'intervalle étant fermé, sa limite l_1 appartient à cet intervalle. Ainsi, $(l_1, l_2) \in A$ et A est un fermé.

3. On a $p_1(A) =]-1, 1[$ qui est un ouvert et A est un fermé, l'application p_1 n'est donc pas fermée.

4. L'application p_1 est ouverte. En effet, si O est un ouvert de $I\!R^2$ et $\alpha \in p_1(O)$, il existe $\beta \in I\!R$ tel que $p_1((\alpha, \beta)) = \alpha$, avec $(\alpha, \beta) \in O$. Puisque O est un ouvert de $I\!R^2$

muni de la distance euclidienne (par exemple), et si $(\alpha,\beta)\in O$, alors il existe un réel $r>0$ tel que la boule ouverte, $B((\alpha,\beta),r)\subset I\!R^2$ soit contenue dans O. On affirme que la boule de $I\!R$, $B(\alpha,r)$ est contenu dans $p_1(O)$. En effet, tout point $x\in B(\alpha,r)$ est l'image de $(x,\beta)\in B((\alpha,\beta),r)\subset O$. Ce qui prouve bien que $p_1(O)$ est un ouvert.

Ex 3. 1. ψ_k est continue en $\frac{1}{2}$ et partout sur $[0,1]$, ainsi $\psi_k\in E$. Mais, $\psi_k\notin F$ car elle n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$. De plus, on a $\|\ \psi_k\ \|_\infty=\frac{1}{2k}$.

2a. Il suffit de poser $g=f+\psi_k$. Cette fonction convient.

2b. F n'est certainement pas un ouvert car si $f\in F$ est un élément quelconque, tout boule centrée en f ne peut être contenue dans F car elle contiendra toujours un élément de E qui n'est pas dans F d'après la question qui précède.

2c. **Cette question est hors barème.** F n'est pas fermé dans E car on peut construire une suite d'éléments de F convergente dans E sans être convergente dans F. En effet, la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies, pour tout $n\geq 1$, sur $[0,1]$ par $f_n(x)=\sqrt{x+\frac{1}{n}}$ converge vers la fonction "$x\longmapsto\sqrt{x}$" qui est bien dans E sans être dans F. (On peut aussi considérer la suite $\sqrt{(x-1/2)^2+\frac{1}{n}}$.)

3a. Tout compact dans un espace métrique étant borné, on a le résultat.

3b. Par application du TAF, on a, pour tout $x\in[0,1]$ et tout $f\in K$, $|\ f(x)-f(0)\ |=f'(c)x$, avec $c\in]0,x[$ convenable. D'où, $|\ f(x)-f(0)\ |\leq\|\ f'\ \|_\infty\ x\leq\|\ f\ \|_1\ x\leq Rx$.

On déduit alors $|\ f(x)\ |\leq Rx+|\ f(0)\ |\leq Rx+\|\ f\ \|_1\leq Rx+R$.

4. On a $|\ f(x)\ |\leq 2R$ pour tout $x\in[0,1]$ et donc $\|\ f\ \|_\infty\leq 2R$, ceci étant vrai pour tout $f\in K$. Par suite K est borné dans E.

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2017-18
SMA-S5- Topologie
Examen de rattrapage 1h30

Exercice 1. (4 pts)

(E,d) est un espace métrique quelconque. Si $x \in E$ et $r > 0$ est un réel quelconque, on note $B_F(x,r) = \{y \in E,\ d(x,y) \leq r\}$ la boule fermée de centre x, de rayon r et $B(x,r) = \{y \in E,\ d(x,y) < r\}$ la boule ouverte de même centre et de même rayon. $\overline{B(x,r)}$ désigne l'adhérence de la boule ouverte.

1. Démontrer que $B_F(x,r)$ est un fermé.
2. Justifier que $\overline{B(x,r)} \subset B_F(x,r)$.
3. **Sans justifier votre réponse**, donner une classe particulière d'espaces métriques où on a toujours l'égalité $\overline{B(x,r)} = B_F(x,r)$.
4. En considérant l'espace $E = \{0,1\}$ muni de la distance d définie par $d(0,0) = d(1,1) = 0$ et $d(0,1) = 1$, trouver une boule ouverte B telle que $\overline{B} \neq B_F$.

Exercice 2. (7 pts)

$E = C([0,1], I\!R)$ désigne l'espace vectoriel des applications définies et continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $I\!R$ muni de la norme $||\ .\ ||_\infty$ donnée, pour tout $f \in E$, par $||\ f\ ||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\ f(x)\ |$. On note d_∞ la distance associée.

On définit l'application $\varphi : E \to E$ par

$$\varphi(f) = g, \quad \text{avec } g(x) = 1 + \int_0^x f(t)\ dt.$$

1. Montrer que l'application φ est continue.
2. On veut étudier l'équation fonctionnelle $\varphi(f) = f$. Peut on appliquer le théorème du point fixe?
3. En remarquant que $\forall f \in E$, l'application $\varphi(f)$ est dérivable, déduire à partir de l'égalité
$1 + \int_0^x f(t)\ dt = f(x)$ une équation différentielle que doit vérifier f.
4. Trouver une condition initiale pour f puis intégrer cette équation différentielle.
5. La solution est elle unique? Justifier.

Exercice 3. (9 pts)

I. Dans cette partie, on souhaite montrer que si A est une partie compacte et B une partie fermée d'un même espace métrique quelconque (E,d) avec $A \cap B = \emptyset$ alors d(A,B)>0. On rappelle que $d(A,B) = \inf_{a\in A} d(a,B) = \inf_{(a,b)\in A \text{X} B} d(a,b)$.

Soit $\psi : E \to I\!R$ l'application définie, pour tout $x \in E$, par $\psi(x) = d(x,B) = \inf_{b\in B} d(x,b)$
.

1. Montrer que ψ est continue.
2. Prouver que si $x \in E$ et $x \notin B$, alors $d(x, B) > 0$.
3. Justifier que $\psi(A)$ est un fermé de $I\!R$ puis déduire qu'on a $d(A, B) > 0$.

II. On souhaite à présent montrer que ce résultat n'est plus vrai si A est fermée mais n'est pas compacte. Pour cela, on considère, dans l'espace $I\!R^2$ muni de l'une des métriques habituelles qu'on note d, les deux parties suivantes **qu'on suppose fermées**:

$$A = \bigcup_{k \in I\!N,\, k \geq 1} ([-1 + \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}] \text{x} \{k\}) \text{ et } B = \bigcup_{k \in I\!N,\, k \geq 1} ([1 + \frac{1}{k}, 3 - \frac{1}{k}] \text{x} \{k\}).$$

1. Montrer que $\forall k \in I\!N^*$, il existe $x_k \in A$ et $y_k \in B$ avec $d(x_k, y_k) = \frac{2}{k}$.
2. Déduire qu'on a $d(A, B) = 0$.
3. Justifier que la partie A n'est pas compacte.

Corrigé.

Ex1: 1. On peut montrer que le complémentaire de la boule $B_F(x, r)$ est un ouvert. Si $y \in B_F(x, r)^c$ alors $d(x, y) > r$ et donc $\alpha = d(x, y) - r > 0$. On vérifie que la boule $B(y, \alpha) \subset B_F(x, r)^c$ (utiliser correctement l'inégalité triangulaire).
2. Montrons qu'on a $\overline{B(x, r)} \subset B_F(x, r)$. On suppose le contraire, il existe donc $x_0 \in \overline{B(x, r)}$ tel que $x_0 \notin B_F(x, r)$ et donc $x_0 \in B_F(x, r)^c$ qui est un ouvert. Il existe donc un réel $r_0 > 0$ tel que $B(x_0, r_0) \subset B_F(x, r)^c \subset B(x, r)^c$. Par suite, on a $B(x_0, r_0) \cap B(x, r) = \emptyset$ et donc $x \notin \overline{B(x, r)}$, ce qui est une contradiction.
3. On a vu en cours que si E est un espace vectoriel muni d'une norme, alors dans ce cas, on a $\overline{B(x, r)} = B_F(x, r)$.
4. Il suffit de considérer la boule $B(0, 1)$. On a $B_F(0, 1) = \{0, 1\}$ mais $\overline{B(0, 1)} = \{0\}$. En effet, la boule ouverte $B(1, 1/2)$ (par exemple) n'intersecte pas la boule ouverte $B(0, 1)$ et par conséquent 1 n'appartient pas à l'adhérence $\overline{B(0, 1)}$.

Ex2: On a $(\phi(f_1) - \phi(f_2))(x) = \int_0^x (f_1 - f_2)(t)dt$. On a donc $\mid (\phi(f_1) - \phi(f_2))(x) \mid \leq \int_0^x \mid (f_1 - f_2)(t) \mid dt \leq \int_0^1 \mid (f_1 - f_2)(t) \mid dt \leq \| f_1 - f_2 \|_\infty$. On passe ensuite au sup pour obtenir

$$\| \phi(f_1) - \phi(f_2) \|_\infty \leq \| f_1 - f_2 \|_\infty .$$

L'application ϕ est donc lipschitzienne donc continue.
2. On ne peut pas appliquer directement le théorème du point fixe car on n'a pas montré que l'application ϕ est contractante.
3. Si l'équation $1 + \int_0^x f(t)\, dt = f(x)$ admet une solution, elle est forcément dérivable. On dérive donc les deux membres de cette égalité et on obtient l'équation $f(x) = f'(x)$ qui admet la solution générale $f(x) = Ke^x$, K étant une constante dépendante de la condition initiale.
4. La condition initiale étant $f(0) = 1$, on a donc la solution f définie, pour tout $x \in [0, 1]$,

par $f(x) = e^x$.
5. Cette solution est unique d'après l'unicité de la solution de l'équation différentielle.
Ex3:I.1. On a vu en cours que cette application est lipschitzienne: On a $\mid \psi(x) - \psi(y) \mid \leq d(x, y)$ pour tout x, y dans A. Elle est donc continue.
2. Supposons $d(x, B) = 0$, il existe alors une suite de points $(\alpha_n)_n$ dans B telle que $d(x, \alpha_n) < \frac{1}{n}$, pour tout $n \in I\!\!N^*$. La suite $(\alpha_n)_n$ est convergente vers x et puisque B est fermé, la limite x appartient à B.
3. ψ est une application continue définie sur un espace métrique et à valeurs dans $I\!\!R$ qui est un espace métrique séparé. L'image de tout compact par ψ est donc un compact de $I\!\!R$. Or, les compacts de $I\!\!R$ sont les fermés bornés, $\psi(A)$ est donc un fermé de $I\!\!R$ et de plus, ce fermé est contenu dans $]0, +\infty[$. Forcément, la borne inférieure de la partie $\psi(A)$ est un réel strictement positif (sinon $0 \in \psi(A)$ et ceci est impossible d'après la première question). On a donc bien obtenu $inf(\psi(A)) = d(A, B) > 0$.
II.1. On considère les deux suites $(x_k)_k$ dans A et $(y_k)_k$ dans B définies pour tout $k \in I\!\!N^*$ par: $x_k = (1 - \frac{1}{k}, k)$ et $y_k = (1 + \frac{1}{k}, k)$. On vérifie qu'on a $d(x_k, y_k) = \frac{2}{k}$ où d est n'importe laquelle des trois distances classiques de $I\!\!R^n$.
2. On a: $0 \leq d(A, B) = inf_{x \in A,\, y \in B} d(x, y) \leq inf_k d(x_k, y_k) = inf_k \frac{2}{k} = 0$.
3. La partie B est fermée car son complémentaire est ouvert. Si la partie A était compacte, on aurait d'après ce qui précède $d(A, B) > 0$ ce qui est exclu d'après la question précédente.

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2018-19
SMA-S5- Topologie
Examen 1h30

Exercice 1. (4 pts)

E est un espace topologique. U et V sont deux ouverts denses de E.

1a. Montrer que U∩V est dense dans E. Pour cela, on se donne pour tout $x \in E$ un voisinage ouvert O_x et on montrera que $O_x \cap$ (U∩V) est non vide.

1b. Déduire que toute intersection finie d'ouverts denses est dense.

2. Donner, sans démonstration, une condition suffisante sur E pour que toute intersection dénombrable d'ouverts denses soit dense.

Exercice 2. (6 pts)

$E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions définies et continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On le munit de la distance d_∞ donnée, pour tout $(f,g) \in E^2$, par $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$.

1. On considère le sous ensemble $F \subset E$ défini par: $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Montrer que F est un fermé.

2. $O = F^c$ désigne le complémentaire de F. On veut montrer que O est dense dans E. Pour cela, on se donne $\varphi \in E \setminus O = F$ et $B(\varphi, \varepsilon)$ une boule quelconque centrée en φ et de rayon $\varepsilon > 0$, on va construire une application $\psi \in O$ qui appartient à cette boule.

2a. Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ, $0 < \delta < 1$, tel que si $|x| < \delta$, on a $|\varphi(x)| < \varepsilon/2$.

2b. Soit ψ la fonction définie sur $[0,1]$ par:

$$\psi(x) = \frac{\varphi(\delta) - \varepsilon/2}{\delta}x + \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } x \in [0,\delta] \;\text{ et } \psi(x) = \varphi(x) \text{ si } x \in]\delta, 1].$$

Justifier que ψ appartient à O puis montrer qu'on a

$$-\varepsilon \leq \varphi(x) - \psi(x) \leq \varepsilon, \text{ pour } \; x \in [0,\delta].$$

2c. Conclure que O est dense dans E.

Exercice 3. (10 pts)

Soit (E,d) un espace métrique compact et soit $f : E \to E$ une application vérifiant $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ pour tout $(x,y) \in E^2$, $x \neq y$. On rappelle que ExE est muni de la métrique $\hat{d}$ définie par:

$$\hat{d}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(d(x_1,x_2), d(y_1,y_2)).$$

Le but de cet exercice est de montrer que f admet un unique point fixe.
1. Montrer que l'application $\phi : E \to E\text{x}E$ définie par $\phi(x) = (x, f(x))$ est lipschitzienne.
2. Justifier que l'application $d : E\text{x}E \to I\!R_+$ est continue.
3. Montrer que l'application $\psi : E \to I\!R_+$ définie par $\psi(x) = d(x, f(x))$ est bornée et atteint ses bornes.
4. On pose $a = \inf_x d(x, f(x)) = d(\alpha, f(\alpha)) \geq 0$.
Montrer que le cas $a > 0$ est impossible puis justifier que α est l'unique point fixe de f.
5. Soit $x_0 \in E$ quelconque. On pose pour tout $n \geq 1$, $x_n = f^n(x_0)$ et on considère la suite $(x_n)_n$.
5a. Justifier qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente. On note x sa limite.
5b. En considérant la suite de nombres réels $(d(x_n, \alpha))_n$, montrer que les deux suites $(d(x_{\varphi(n)}, \alpha))_n$ et $(d(x_{\varphi(n)+1}, \alpha))_n$ ont la même limite notée l.
5c. Calculer l de deux manières différentes, en fonction de x et de α, puis déduire qu'on a $x = \alpha$.

Corrigé.

Ex1: 1a. Soit $x \in E$ et O_x un ouvert quelconque contenant x. Puisque U est dense on a $O_x \cap U \neq \emptyset$. Ainsi, il existe $y \in O_x \cap U \subset E$. $O_x \cap U$ étant un ouvert contenant y et V étant dense dans E, on a donc $(O_x \cap U) \cap V \neq \emptyset$.
1b. Si on se donne une suite finie $U_1, .., U_n$ d'ouverts denses de E, alors, d'après la question précédente, on a $U_1 \cap U_2$ est un ouvert de E dense dans E. On considère les deux ouverts $U_1 \cap U_2$ et U_3, toujours d'après 1a. on aura $(U_1 \cap U_2) \cap U_3$ est un ouvert dense dans E. Au bout d'un nombre fini d'étapes, on aura que $U_1 \cap ... \cap U_n$ est dense dans E.
2. D'après un exercice vu en T.D., une condition suffisante portant sur E pour qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses soit dense est que E soit un espace métrique complet.

Ex2. 1. Pour montrer que F est un fermé, on va montrer que toute suite $(f_n)_n$ dans F convergente vers f alors $f \in F$. Soit $(f_n)_n$une telle suite, elle vérifie donc $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Puisque $d_\infty(f_n, f)$ tend vers 0, alors la suite de nombres réels $(f_n(0))_n$ converge vers $f(0)$. La suite étant constante égale à 0, sa limite $f(0)$ est aussi nulle et donc on a bien $f \in F$.
2a. Cela découle simplement de la continuité de φ en 0 avec $\varphi(0) = 0$.
2b. Pour montrer que ψ appartient à O, on doit vérifier deux points: La continuité de ψ sur $[0, 1]$ et $\psi(0) \neq 0$. Il suffit de vérifier la continuité en δ qui ne pose pas de problème et de calculer $\psi(0) = \varepsilon/2$.
Pour le dernier point, on a les encadrements: $-\varepsilon \leq \varphi(\delta) - \varepsilon/2 \leq 0$ et $0 \leq x/\delta \leq 1$ pour $x \in [0, \delta]$. Cela conduit à l'encadrement $-\varepsilon/2 \leq \psi(x) \leq \varepsilon/2$ pour $x \in [0, \delta]$ et par suite à $-\varepsilon \leq \varphi(x) - \psi(x) \leq \varepsilon$ sur $[0, \delta]$. D'autre part, sur l'intervalle $]\delta, 1]$, on a clairement

$\varphi(x) - \psi(x) = 0$. La double inégalité est donc établie sur $[0, 1]$.
2c. Si on se donne $\varphi \in E \setminus O$ et $\varepsilon > 0$ un réel quelconque, alors d'après la question précédente, la boule de centre φ et de rayon ε contient l'élément $\psi \in O$. Ainsi, O est dense dans E.

Ex3. 1. Pour montrer que l'application ϕ est lipschitzienne, on doit montrer qu'il existe un réel positif k tel que $\hat{d}((x, f(x)), (y, f(y)) \leq kd(x, y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$. On écrit: $\hat{d}((x, f(x)), (y, f(y)) = max(d(x, y), d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Ainsi ϕ est lipschitzienne de rapport 1.
2. Cette question a été vue en cours. En utilisant deux fois l'inégalité triangulaire, on aboutit à: $|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) \leq 2max(d(x_1, x_2), d(y_1, y_2)) = 2\hat{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$. Ce qui prouve que d est continue en tant qu'application.
3. On remarque qu'on a $\psi = d \circ \phi$ et par suite, ψ est aussi continue sur le compact E. L'image $\psi(E)$ est un compact de $\mathbb{R}_+$, c'est donc un fermé borné de $\mathbb{R}$. $\text{Inf}_{x\in E}d(x, f(x))$ est donc atteint par un certain α, c'est à dire $d(\alpha, f(\alpha)) = \text{inf}_{x\in E}d(x, f(x))$.
4. L'hypothèse $a > 0$ est impossible car cela signifierait $\alpha \neq f(\alpha)$ et on aurait $d(f(\alpha), f \circ f(\alpha)) < d(\alpha, f(\alpha))$ et alors $d(f(\alpha), f \circ f(\alpha)) < \text{inf}_{x\in E}d(x, f(x))$ d'où une contradiction.
α est l'unique point fixe car si $\beta \in E$ en est un autre alors $d(f(\alpha), f(\beta)) = d(\alpha, \beta) < d(\alpha, \beta)$ ce qui est absurde.
5a. E étant compact, d'après B-W-, toute suite $(x_n)_n$ dans E admet une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente vers une limite x.
5b. La suite de nombres réels $d(x_n, \alpha)$ étant décroissante et minorée, elle est convergente vers une limite l. Puisque $(d(x_{\varphi(n)}, \alpha))_n$ et $(d(x_{\varphi(n)+1}, \alpha))_n$ sont deux suites extraites, elles convergent aussi vers l.
5c. D'abord, il est important de noter que la suite $(x_{\varphi(n)+1})_n$ N'EST PAS UNE SUITE EXTRAITE DE $(x_{\varphi(n)})_n$. Par continuité de l'application d, nous pouvons affirmer que, puisque $(x_{\varphi(n)}, \alpha)$ tend vers (x, α), $d(x_{\varphi(n)}, \alpha)$ tend vers $d(x, \alpha)$. De même, $d(x_{\varphi(n)+1}, \alpha)$ tend vers $d(f(x), \alpha)$. On a donc $d(f(x), \alpha) = d(x, \alpha)$. Forcément, on a $f(x) = x$ car sinon $d(f(x), \alpha) < d(x, \alpha)$.

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2018-19
SMA-S5- Topologie
Examen de rattrapage 1h30

Exercice 1. (4pts)

$E = C([0,1], I\!R)$ désigne l'espace des fonctions définies et continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. On le munit de la distance d donnée pour tout $(f,g) \in E^2$ par $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$. On considère l'application ϕ définie sur E par: $\phi(f)(x) = \frac{1}{2}cos(f(x))$ pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0,1]$.

1. Montrer que l'application ϕ est contractante et déduire que l'équation $\phi(f) = f$ admet une unique solution notée f_0 dans E. (On rappelle la formule $cos(p) - cos(q) = -2sin(\frac{p+q}{2}).sin(\frac{p-q}{2})$).
2. Montrer que l'équation $2x - cos(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in I\!R$ puis déduire la solution f_0.

Exercice 2. (4pts)

Soit (E,d) un espace métrique compact et k un réel vérifiant $k > 1$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas d'application $f : E \to E$ telle que $d(f(x), f(y)) = k.d(x,y)$ pour tous $(x,y) \in E^2$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq x_0$.
2. En considérant la suite $(f^n(x_0))_n$, trouver une contradiction puis conclure.

Exercice 3. (4pts)

On se donne l'espace métrique $(I\!R, |.|)$ et l'ensemble des entiers relatifs $Z \subset I\!R$ muni de topologie induite par celle de $(I\!R, |.|)$. On rappelle que $O \subset Z$ est un ouvert de Z s'il existe $O' \subset I\!R$ ouvert de $I\!R$ tel que $O = O' \cap Z$.

1. Montrer que pour tout $m \in Z$, la partie $\{m\}$ est un ouvert de Z puis déduire que toute partie de Z est un ouvert de Z.
2. Peut-on affirmer que toute application $\varphi : Z \to Z$ est continue? Justifier.

Exercice 4. (8pts)

Dans cet exercice, E est l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_n$ absolument convergentes, c'est à dire vérifiant $\sum |u_n| < \infty$. On définit l'application $N : E \to I\!R_+$ par $N(u) = \sum |u_n|$.

1. Montrer que l'application N est une norme sur E.
2. La suite constante nulle est notée $\mathbf{0}$ et on note $B_F(\mathbf{0}, 1) = \{u \in E,\ N(u-\mathbf{0}) = N(u) \leq 1\}$ la boule unité fermée. On veut montrer que cette boule n'est pas compacte.

On choisit une suite $(\delta_k)_k$ dans $B_F(\mathbf{0}, 1)$. On précise que c'est en fait une suite de suites, c'est à dire que chaque δ_k est une suite qui appartient à $B_F(\mathbf{0}, 1)$. Le choix est le suivant: Si on note $\delta_k = (\delta_n^k)_n$ pour tout $k \geq 0$ alors $\delta_n^k = 0$ si $n \neq k$ et $\delta_k^k = 1$.

2a. Ecrire les éléments de δ_1 puis ceux de δ_n pour $n \geq 2$ et justifier qu'on a bien

$\delta_k \in B_F(\mathbf{0}, 1)$ pour tout $k \geq 0$.
2b. Soit $u = (u_n)_n \in E$, justifier que u_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in I\!N$ tel que $\forall k \geq N$ on a $|\delta_k^k - u_k| \geq 1 - \varepsilon$.
2c. On suppose l'existence d'une suite extraite $(\delta_{\varphi(k)})_k$ convergente dans $B_F(\mathbf{0}, 1)$ vers une limite
$u = (u_n)_n$. En utilisant la question précédente, trouver une contradiction puis conclure.

Corrigé.

Ex1: 1. Après des majorations convenables, on obtient:
$| \ \phi(f)(x) - \phi(g)(x) \ | \leq \frac{1}{2} \ | \ f(x) - g(x) \ | \leq \frac{1}{2} \ || \ f - g \ ||_\infty$ qui implique la majoration $|| \ \phi(f) - \phi(g) \ ||_\infty \leq \frac{1}{2} \ || \ f - g \ ||_\infty$.
L'application ϕ est donc contractante, elle admet donc un unique point fixe f_0.
2. Il est facile de justifier que l'équation $2x - cos(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in I\!R$. La fonction f_0 cherchée est forcément la fonction constante f_0 définie pour tout $x \in [0, 1]$ par $f_0(x) = \alpha$.
Ex2: 1. Sinon, l'égalité $f(x) = x$ pour tout $x \in E$ entraine $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ ce qui contredit l'hypoyhèse $d(f(x), f(y)) = k.d(x, y)$ avec $k > 1$.
2. La suite $(f^n(x_0))_n$ est dans E qui est compact, elle admet donc une suite extraite $(f^{\varphi(n)}(x_0))_n$ convergente vers un élément $\alpha \in E$. L'application f étant continue, la suite $(f(f^{\varphi(n)}(x_0)))_n$ converge vers $f(\alpha)$.
D'une part, par continuité de la distance, on a $d(f(f^{\varphi(n)}(x_0)), f^{\varphi(n)}(x_0))$ qui tend vers $d(f(\alpha), \alpha)$ et d'autre part, $d(f(f^{\varphi(n)}(x_0)), f^{\varphi(n)}(x_0)) = k^{\varphi(n)} d(f(x_0), x_0)$ qui tend vers $+\infty$, ce qui est une contradiction. Il n'existe donc pas une telle application f.
Ex3: 1. Si $m \in$, alors si $B(m, 1/2)$ désigne la boule (dans $I\!R$) de centre m et de rayon $1/2$, on a $B(m, 1/2) \cap Z = \{m\}$.
Le singleton $\{m\}$ est donc un ouvert de Z pour la topologie induite par celle de $I\!R$.
Toute partie de Z étant réunion d'éléments de Z, et toute réunion d'ouverts étant un ouvert, toute partie de Z est donc un ouvert de Z.
2. Oui car l'image réciproque de tout ouvert de Z est avant tout une partie de Z qui est ouverte d'après la question précédente.
Ex4: 1. Cette question ne présente pas de difficulté particulière.
2a. On a $\delta_1 = (0, 1, 0, ...)$, $\delta_2 = (0, 0, 1, 0, ...)$ ... On déduit: $N(\delta_1) = 1$, $N(\delta_2) = 1, ..., N(\delta_k) = 1$, pour tout entier $k \geq 1$.
2b. Si $(\sum u_n)_n$ est absolument convergente alors $(\sum u_n)_n$ est convergente et le terme général u_n tend vers 0. En particulier, on a: $| \ \delta_k^k - u_k \ | = | \ 1 - u_k \ |$ tend vers 1 lorsque k tend vers $+\infty$. Si k est assez grand, on aura:
$1 - \varepsilon \leq | \ 1 - u_k \ | \leq 1 + \varepsilon$.
2c. Par l'absurde, supposons que $N(\delta_{\varphi(k)} - u)$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, mais ceci contredit $| \ \delta_{\varphi(k)}^{\varphi(k)} - u_{\varphi(k)} \ | \geq 1 - \varepsilon$, si k est assez grand.

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2019-20
SMA-S5- Topologie
Examen de module 1h30

NB: 1 point est réservé à la clarté du raisonnement.

Exercice 1. (5 pts)

Sur l'ensemble des entiers naturels $I\!N$, on définit la topologie pour laquelle les ouverts sont $\emptyset$, $I\!N$, et les parties de la forme $[n, +\infty[\cap I\!N$ où $n \in I\!N$.

1. Montrer que c'est bien une topologie. Cette topologie est-elle séparée? Justifier.

2. Montrer que tout espace métrique est séparé, c'est à dire que si $x \neq y$ sont deux éléments de E, alors on peut trouver deux boules ouvertes disjointes l'une centrée en x et l'autre centrée en y.

3. Justifier que la topologie définie ci-dessus sur $I\!N$ n'est pas métrisable.

Exercice 2. (4 pts)

E est l'espace métrique $(\mathcal{C}([0,1], I\!R), ||\ .\ ||_\infty)$ définie par $||\ f\ ||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \mid f(x) \mid$. On définit l'application $\Phi : E \to E$ pour tout $f \in E$ par $\Phi(f)(x) = \frac{1}{4}[\int_0^x f(t)dt + sin\ f(x)]$, $\forall x \in [0,1]$.

On considère l'équation fonctionnelle $\Phi(f) = f$ d'inconnue f. (*)

1. Montrer que l'application Φ est contractante.
2. Déduire que la fonction identiquement nulle est la seule solution de l'équation (*).

Exercice 3. (5 pts)

(E, d) est un espace métrique compact. Soit $K > 1$ un réel, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application continue $f : E \to E$ vérifiant $d(f(x), f(y)) = Kd(x, y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \neq y$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq x_0$.

2. Soit $(u_n)_n$ la suite dans E définie par $u_n = f^n(x_0)$, pour tout $n \geq 0$.
Montrer que la suite de nombre réels $(\alpha_n)_n$ définie par $\alpha_n = d(f^{n+1}(x_0), f^n(x_0))$ tend vers $+\infty$.

3.a. Justifier qu'il existe une suite extraite $(u_{n_k})_k$ convergente vers une limite $l \in E$.

3.b. Montrer qu'alors la suite extraite $(\alpha_{n_k})_k$ admet deux limites distinctes que l'on donnera.

3.c. Conclure.

Exercice 4. (5 pts)

E est l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1], I\!R)$. On le munit de la norme $||\ .\ ||_1$ définie, pour tout $f \in E$, par $||\ f\ ||_1 = \int_0^1 \mid f(x) \mid dx$.

On considère le sous espace vectoriel $F \subset E$ défini par

$$F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}.$$

On souhaite montrer que F est dense dans $(E, || \,.\, ||_1)$. Soit $\varphi \in E$, un élément quelconque et $\varepsilon > 0$ un réel, on cherche à construire une fonction appartenant à F et appartenant à la boule $B(\varphi, \varepsilon)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction ψ_n définie sur $[0, 1]$ par:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} n\varphi(\frac{1}{n})x \text{ si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \varphi(x) \text{ si } x \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

1. Vérifier que, pour tout entier $n \geq 2$, ψ_n appartient à E.
2. Montrer que, pour n assez grand, on a $|| \varphi - \psi_n ||_1 < \varepsilon$ puis conclure.
3. **On munit cette fois E de la norme** $|| \,.\, ||_\infty$. Montrer que la partie F est alors fermée, non dense.

Corrigé.

Ex1: 1. Il est facile de vérifier que c'est bien une topologie. Montrons qu'elle n'est pas séparée. Soient n_1 et n_2 deux entiers distincts. Tout ouvert contenant n_1 est de la forme $[p_1, +\infty[\cap \mathbb{N}$,avec $p_1 \leq n_1$ et tout ouvert contenant n_2 est de la forme $[p_2, +\infty[\cap \mathbb{N}$,avec $p_2 \leq n_2$. Deux tels ouverts ne sont jamais disjoints.
2. Tout espace métrique est séparé (vu en cours). En effet, si x et y sont deux éléments quelconques, alors $\alpha = d(x, y) > 0$. Il suffit de considérer les deux boules ouvertes $B(x, \alpha/2)$ et $B(y, \alpha/2)$ qui sont disjointes (utiliser une bonne inégalité triangulaire).
3. Si la topologie était métrisable, elle serait séparée d'après la question 2., or elle ne l'est pas d'après la question 1.

Ex2: 1. On a: $| \phi(f)(x) - \phi(g)(x) | \leq \frac{1}{4}(|| f - g ||_\infty + | sin\, f(x) - sin\, g(x) |)$
$\leq \frac{1}{4}(|| f - g ||_\infty + | f(x) - g(x) |) \leq \frac{1}{4}(|| f - g ||_\infty + || f - g ||_\infty) \leq \frac{1}{2} || f - g ||_\infty$.
On a obtenu: $|| \phi(f) - \phi(g) ||_\infty \leq \frac{1}{2} || f - g ||_\infty$. L'application ϕ est donc contractante.
2. L'espace étant complet alors d'après le théorème du point fixe, ϕ admet un unique point fixe. Or, la fonction identiquement nulle est une solution évident de l'équation $(*)$, elle en est donc l'unique solution.

Ex3: 1. Par l'absurde, on obtient immédiatement une contradiction avec la propriété vérifiée par f.
2. On a: $\alpha_n = K^n d(f(x_0), x_0)$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3a. L'espace étant compact, d'après le théorème de Bolzano, il existe une suite extraite $(u_{n_k})_k$ qui converge vers une limite l.
3b. L'application f est continue (car lipschitzienne), la suite $f(f^{n_k}(x_0))$ tend vers $f(l)$ et, puisque la distance est continue, $\alpha_{n_k} = d(f(f^{n_k}(x_0)), f^{n_k}(x_0))$ tend vers $d(f(l), l)$. D'autre part, on a $\alpha_{n_k} = K^{n_k} d(f(x_0), x_0)$ tend vers $+\infty$.
3c. La limite étant unique, on a obtenu une contradiction. Il n'existe donc pas une telle

application f.

Ex4: 1. Pour tout $n \in I\!N^*$, ψ_n est continue, en particulier en $x_0 = 1/n$, donc $\psi_n \in E$.

2. $\| \varphi - \psi_n \|_1 = \int_0^1 | \varphi(x) - \psi_n(x) | \, dx = \int_0^{1/n} | \varphi(x) - n\varphi(1/n)x | \, dx$
$\leq \int_0^{1/n} | \varphi(x) | \, dx + \int_0^{1/n} | \varphi(1/n) | \, dx \leq \frac{1}{n}(| \varphi(0) | + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{1}{n}(| \varphi(0) | + \frac{\varepsilon}{2})$, si n est assez grand.

Finalement, si n est assez grand, $\| \varphi - \psi_n \|_1 \leq \varepsilon$ si n est assez grand.

F est donc dense dans l'espace métrique $(E, | \, . \, |_1)$.

3. On considère l'application $\Phi : E \to I\!R$ donnée pour tout $f \in E$ par $\Phi(f) = f(0)$. Elle est linéaire et continue car on a: $| \Phi(f) | \leq \| f \|_\infty$.

Puisque $\{0\}$ est un fermé de $I\!R$, $F = \Phi^{-1}(\{0\})$ est un fermé.

Si on considère, par exemple, l'application constante g, définie par $g(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$, alors pour toute application h dans F, on a $\| g - h \|_\infty \geq | g(0) - h(0) | = 1$. La boule centrée en g et de rayon $1/2$ n'intersecte donc pas F qui n'est donc pas dense dans $(E, \| \, . \, \|_\infty)$.

Université Mohammed V — Année universitaire: 2019-20
Faculté des Sciences — SMA-S5- Topologie
Département de Mathématiques — Examen de rattrapage 1h30

Exercice 1. (4 pts)

(X,d) est un espace métrique compact et $f : X \to X$ est une application continue et bijective. On veut montrer que f est un homéomorphisme. On veut donc montrer que f est une application ouverte.

1. On suppose que pour tout fermé F, $f(F)$ est un fermé. Montrer que pour tout ouvert O, $f(O)$ est un ouvert.

2. Soit donc F un fermé quelconque non vide et $\gamma \in \overline{f(F)}$. On note $(\gamma_n)_n$ une suite dans $f(F)$ qui converge vers γ et $\gamma_n = f(\alpha_n)$ pour $n \geq 0$.

2a. Justifier que la suite $(\alpha_n)_n$ admet une suite extraite $(\alpha_{\varphi(n)})_n$ convergente vers un élément noté α.

2b. Montrer que γ appartient à $f(F)$ puis conclure.

Exercice 2. (6 pts)

(E,d) est un espace métrique. On rappelle que la boule fermée de centre $x \in E$ et de rayon le réel $r > 0$ est la partie

$$B_F(x,r) = \{y \in E,\ d(x,y) \leq r\}.$$

1. Montrer que la boule fermée B_F est un fermé en montrant que son complémentaire est un ouvert.

2. On veut montrer que l'adhérence d'une boule ouverte n'est pas nécessairement la boule fermée associée.

On considère, dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne, la partie $Y = ([-1,2]\text{x}\{0\}) \cup \{A\}$ où A est le point de coordonnées $(0,1)$.

2a. Dessiner la partie Y puis déterminer la boule ouverte $B((0,0),1)$.

2b. Montrer que A appartient à la boule fermée $B_F((0,0),1)$.

2c. Trouver un réel $\alpha > 0$ tel que $B(A,\alpha) \cap B((0,0),1) = \emptyset$ puis conclure.

Exercice 3. (10 pts)

$(x_n)_n$ désigne une suite de nombres réels et l^1 désigne l'espace vectoriel défini par

$$l^1 = \{(x_n)_n,\ \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty\}.$$

Si $x = (x_n)_n \in l^1$, on considère la norme notée $||.||$ et définie pour tout $x \in l^1$ par $||x|| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$.

Soit $\varphi : (l^1, ||.||) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}.$$

1. Trouver un réel $M > 0$ tel que $|\varphi(x)| \leq M||x||$ pour tout $x \in l^1$. Que peut on en déduire pour l'application φ?

2. On considère à présent l'application (non linéaire) $f : l^1 \to I\!R$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$.
2a. Montrer que f est bien définie, c'est à dire que si $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ converge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2$ converge.
2b. On veut montrer que $\forall r > 0$, f est lipschitzienne sur la boule $B(0,r)$, 0 étant la suite identiquement nulle.
(i) Justifier que si $x = (x_n)_n \in B(0,r)$, alors pour tout entier n, on a $|x_n| \leq r$.
(ii) Montrer que si $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ sont deux éléments de $B(0,r)$, on a: $|f(x) - f(y)| \leq 2r||x - y||$.
(iii) Déduire que f est continue sur l^1. (On n'essaiera pas de montrer que f est lipschitzienne sur l^1.)
3. On note G la partie de l^1 donnée par $G = f^{-1}(\{1\}) \cap B_F(0,1)$.
3a. Justifier que G est fermée.
3b. On pose, pour tout entier $k \geq 0$, $x^k = (x_n^k)_n$ avec $x_n^k = \delta_{nk}$. (Par exemple, $x^1 = (0,1,0,..,0,...)$.)
Vérifier qu'on a $x^k \in G$ pour tout $k \geq 0$ puis calculer $||x^k - x^l||$ pour $k \neq l$.
3c. Déduire de ce qui précède que G n'est pas compact.

Corrigé.

Ex1: 1. Si on considère de complémentaire de $f(O)$, on a $f(O)^c = f(O^c)$, il est donc fermé car c'est l'image du fermé O^c.
2. L'espace étant compact, il existe une suite extraite $(\alpha_{\varphi(n)})_n$ convergente vers un élément noté α. Par continuité de l'application f, la suite extraite $(\gamma_{\varphi(n)})_n$ converge vers $f(\alpha)$. Comme c'est une sous suite de $(\gamma_n)_n$, elle converge vers γ. L'unicité de la limite implique $\gamma = f(\alpha)$, c'est à dire qu'on a bien $\gamma \in f(F)$, ce dernier est donc bien un fermé. On conclut d'après la première question que f est un homéomorphisme.
Ex2: 1. Montrons que le complémentaire de $B_F(x,r)$ est un ouvert. Si $y \in B_F(x,r)^c$ et si on pose $r' = d(x,y) > O$, on peut vérifier que la boule ouverte $B(y,r')$ est contenue dans $B_F(x,r)^c$ qui est donc un ouvert.
2a. Y est la réunion du segment d'extrémités les points $(-1,0)$ et $(2,0)$ avec le point A.
2b. On a $d((0,0),A) = 1$ et donc $A \in B_F((0,0),1)$.
2c. Tout d'abord, la boule ouverte $B((0,0),1)$ est exactement le segment mentionné ci-dessus. D'autre part, la boule $B(A,1/2)$ (par exemple) n'intersecte pas ce segment (si M est un point quelconque du segment, on a $d(A,M) \geq 1$).
On a donc vérifié qu'on a $A \in B_F((0,0),1)$ mais $A \notin \overline{B((0,0),1)}$.
Ex3: 1. On a $\mid \varphi(x) \mid \leq \sum \mid x_n \mid = \mid\mid x \mid\mid$. $M = 1$ convient.
L'application linéaire φ est donc continue.
2a. Si $\sum \mid x_n \mid$ converge, alors la suite $(x_n)_n$ est convergente vers 0 et donc elle est bornée. Par suite, ilexiste un réel $K > 0$ tel que $\mid x_n \mid \leq K$, $\forall n \in I\!N$.
Ainsi, on obtient $\mid \sum x_n^2 \mid = \sum x_n^2 \leq K \sum \mid x_n \mid$, la série $\sum x_n^2$ est donc convergente.

2b. (i) Si $\sum | x_n |\leq r$, alors $\forall n \in I\!N$, $| x_n |\leq r$.
(ii) On écrit: $f(x) - f(y) = \sum(x_n - y_n)(x_n + y_n)$ qui implique
$| f(x)-f(y) |\leq \sum | x_n - y_n | . | x_n + y_n |\leq \sum | x_n - y_n | (| x_n | + | y_n |) \leq 2r \sum | x_n - y_n |$.
On a donc obtenu: $| f(x) - f(y) |\leq 2r \| x - y \|$ et f est donc lipschitzienne sur la boule $B(0, r)$.
(iii) Puisque $\forall x \in l^1$, il existe $r > 0$ tel que $x \in B(0, r)$ et que f est lipschitzienne sur cette boule, f est donc continue en x.
3a. $f^{-1}(\{1\})$ est un fermé car f est continue, G est donc fermé étant l'intersection de deux fermés.
3b. $\forall k \in I\!N$, on a $\sum_n | x_n^k |^2 = \delta_k^{k2} = 1$ et $f(x^k) = 1$. D'autre part, $d(x^k, 0) = \sum_n | x_n^k | = \sum_n \delta_n^k = \delta_k^k = 1$ assure qu'on a $x^k \in B_F(0, 1)$.
On a donc bien vérifié que $x^k \in G$, $\forall k \in I\!N$. De plus, on a $\| x^k - x^l \| = \delta_k^k + \delta_l^l = 2$.
3c. La suite $(x^k)_k$ d'éléments de G n'admet aucune suite extraite convergente car pour toute injection croissante $\varphi : I\!N \to I\!N$, on a $\| x^{\varphi(k)} - x^{\varphi(l)} \| = 2$ et le critère de Cauchy ne peut être validé. La partie G n'est donc pas compacte.

Université Mohammed V | Année universitaire: 2020-21
Faculté des Sciences | SMA-S5- Topologie
Département de Mathématiques | Examen 1h30

Exercice 1. Questions de cours.(**1.**(1pt), **2.**(1pt), **3.**(1,5pt).)

1. Donner l'énoncé exact du théorème du point fixe.

2. Dans ce qui suit, **préciser les conditions suffisantes qui manquent**: "Soient E et F deux espaces métriques et soit $A \subset E$ une partie dense de E, alors toute application continue $f : A \subset E \to F$ est prolongeable en une application continue $g : E \to F$".

3. Soit X un espace topologique séparé, montrer que pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est un fermé.

Exercice 2 (**1.**(1,5pt+0,5pt), **2.**(1,5pt).)

$E = C([0,1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des applications définies et continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. On le munit de sa norme habituelle ($||f|| = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$). On considère l'application $\phi : E \to E$ définie pour tout $f \in E$ par

$$\phi(f)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (f(t) + t)dt.$$

1. Montrer que, pour tout $(f,g) \in E^2$, on a $||\phi(f) - \phi(g)|| \leq (1/2)||f - g||$. Déduire que ϕ admet un point fixe unique noté f_0.

2. En supposant la solution f_0 dérivable, écrire une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f_0 puis la résoudre.

Exercice 3 (**1.**(0,5pt+1pt), **2.**(2pts).)

l^∞ désigne l'espace vectoriel des suites réelles bornées. On le munit de la norme $||.||_\infty$ définie par: $||(u_n)_n||_\infty = sup_n|u_n|$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on considère la suite $(e^i_n)_n$ définie par: $e^i_n = 0$ si $n \neq i$ et $e^i_i = 1$.

1. Calculer $||(e^i_n)_n||_\infty$ et $||(e^i_n)_n - (e^j_n)_n||_\infty$ pour $i \neq j$.

2. Déduire que la boule unité de l^∞ n'est pas compacte.

Exercice 4 (Chaque question est notée sur 2 pts.)

I. Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application continue. Montrer que le graphe G de f, défini par: $G = \{(x, f(x)),\ x \in E\}$ est une partie fermée de ExF. (On pourra montrer que tout suite d'éléments de G convergente dans ExF est convergente dans G.)

II. On souhaite montrer que le résultat précédent reste vrai dans le cadre des espaces topologiques. On suppose donc que X et Y sont deux espaces topologiques et que Y est séparé.

1. Montrer le résultat général suivant: Si $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont deux espaces topologiques, si $\tilde{Y}$ est séparé et si $\varphi : \tilde{X} \to \tilde{Y}$, $\psi : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ sont deux applications continues, alors l'ensemble

$K = \{x \in \tilde{X},$ vérifiant $\varphi(x) = \psi(x)\}$ est un fermé de $\tilde{X}$. (On pourra montrer que le complémentaire est un ouvert en utilisant la continuité des applications et le fait que $\tilde{Y}$ est séparé.)

2. Soient X et Y deux espaces topologiques. On suppose que Y est séparé. Soit $f : X \to Y$ une application continue. On considère les deux applications h et p_Y définies par:

$$h : X\text{x}Y \to Y \qquad\qquad p_Y : X\text{x}Y \to Y$$
$$(x, y) \mapsto h(x, y) = f(x) \qquad\qquad (x, y) \mapsto p_Y(x, y) = y.$$

2a. Justifier que h et p_Y sont continues en tout élément $(x_0, y_0) \in X\text{x}Y$.(Pour cela, on peut considérer un ouvert quelconque $O_1(f(x_0))$ contenant $f(x_0)$ (respectivement un ouvert quelconque $O_2(y_0)$ contenant y_0) et trouver un ouvert $V_1(x_0, y_0)$ (respectivement $V_2(x_0, y_0)$) tel que $h(V_1(x_0, y_0)) \subset O_1(f(x_0))$ (respectivement $p_Y(V_2(x_0, y_0)) \subset O_2(y_0)$).

2b. En utilisant la question 1, déduire que l'ensemble $G = \{(x, f(x)),\ x \in X\}$ est un fermé de $X\text{x}Y$.

3. Montrer que la réciproque est fausse en général en exhibant une fonction $g : I\!R \to I\!R$ dont le graphe est un fermé de $I\!R^2$ mais qui n'est pas continue.

Corrigé

Ex1 1. Voir cours.

2. Il manque les deux hypothèses F complet et f uniformément continue.

3. Montrons que le complémentaire $A = \{x\}^c$ de $\{x\}$ est un ouvert. Soit $y \in A$, comme l'espace est séparé, il existe un ouvert O_x contenant x et un ouvert O_y contenant y avec $O_x \cap O_y = \emptyset$. Par conséquent, on a $O_y \subset A$ qui est donc bien un ouvert.

Ex2 1. On a $||\phi(f) - \phi(g)|| = (1/2)\sup_{x\in[0,1]} |\int_0^x (f(t) - g(t))dt| \leq (1/2)\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |f(t) - g(t)|dt = (1/2) \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt \leq (1/2)\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| \int_0^1 1dt = (1/2)\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| = (1/2)||f - g||$.

L'application ϕ est contractante et définie sur un espace métrique complet. Par application du théorème du point fixe, elle admet donc un point fixe unique f_0.

2. Ce point fixe f_0 vérifie: $\frac{1}{2} \int_0^x (f_0(t) + t)dt = f_0(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. D'après les hypothèses, on peut dériver l'égalité précédente pour obtenir l'équation différentielle:

$$(1/2)(f_0(x) + x) = f_0'(x).$$

La résolution de l'équation homogène donne la fonction $Ke^{(1/2)x}$ à laquelle il faut ajouter une solution particulière (qu'on peut chercher sous la forme "ax+b") de l'équation complète pour obtenir finalement: $f_0(x) = Ke^{(1/2)x} - x - 2$. Comme la solution est unique, on doit déterminer la valeur de K et pour cela on remplace f_0 dans la première équation, pour obtenir enfin $K = 2$. On a donc obtenu la solution $f_0(x) = 2e^{(1/2)x} - x - 2$.

Ex3 1. Il faut bien comprendre ce qu'on entend par la notation $(e_n^i)_n$. Par exemple, si $i = 0$, on a la suite $(e_n^0)_n = (1, 0, 0, ...)$ et si $i = 2$, on a $(e_n^2)_n = (0, 0, 1, 0, 0, ...)$.

Il est alors clair qu'on a: $||(e_n^i)_n||_\infty = 1$ pour tout i et aussi $||(e_n^i)_n - (e_n^j)_n||_\infty = 1$ pour

$i \neq j$.
2. Les suites considérées appartiennent toutes à la boule unité fermée de l^∞. (Pour chaque i fixé, $(e_n^i)_n$ est une suite donnée et lorsque i varie dans $\mathbb{N}$, on obtient une suite d'éléments de l^∞.) Si la boule unité était compacte, alors la suite $((e_n^i)_n)_i$ admettrait une suite extraite convergente $((e_n^{\psi(i)})_n)_i$ et alors $||(e_n^{\psi(i)})_n - (e_n^{\psi(j)})_n||_\infty$ tendrait vers 0 si i et j sont assez grands. Or, on a vu dans la question 1 qu'alors $||(e_n^{\psi(i)})_n - (e_n^{\psi(j)})_n||_\infty$ vaut toujours 1 si $i \neq j$, d'où une contradiction. La boule unité fermée de l^∞ n'est donc pas compacte.
Ex4 I. Soit $(x_n, f(x_n))_n$ une suite d'éléments de G convergente vers $(l, l') \in E\text{x}F$. Cela signifie que $x_n \to l$ et $f(x_n) \to l'$ lorsque n tend vers $+\infty$. Or, la fonction f étant continue, nous savons que si x_n tend vers l, alors $f(x_n)$ tend vers $f(l)$. Par unicité de la limite, on a $f(l) = l'$ et donc $(l, l') \in G$ qui est fermé.
II.1. Soit $x_0 \in K^c$, on a: $\varphi(x_0) \neq \psi(x_0)$. L'espace $\tilde{Y}$ étant séparé, il existe un ouvert U contenant $\varphi(x_0)$ et un ouvert V contenant $\psi(x_0)$ avec $U \cap V = \emptyset$. Puisque φ est continue en x_0, il existe un ouvert $O(x_0) \subset \tilde{X}$ tel que $\varphi(O(x_0)) \subset U$ et de même pour ψ, il existe un ouvert $O'(x_0) \subset \tilde{X}$ tel que $\psi(O'(x_0)) \subset V$. Si on pose $W(x_0) = O(x_0) \cap O'(x_0)$, on peut vérifier que pour tout $x \in W(x_0)$, on a: $\varphi(x) \neq \psi(x)$ et par conséquent $W(x_0) \subset K^c$ qui est donc bien un ouvert (car $K^c = \cup_{x_0 \in K^c} W(x_0)$ s'écrit comme une union d'ouverts).
2a. Montrons que h est continue. Si $O_1(f(x_0))$ est un ouvert contenant $f(x_0)$, par continuité de f, il existe un ouvert $O(x_0)$ contenant x_0 tel que $f(O(x_0)) \subset O_1(f(x_0))$. L'expression de la fonction h ne dépendant pas du facteur y, on a certainement $h(O(x_0)\text{x}F) \subset O_1(f(x_0))$. On peut choisir $V_1(x_0, y_0) = O(x_0)\text{x}F$ qui est bien un ouvert pour la topologie produit.
Pour la fonction p_Y, il est plus facile de choisir l'ouvert $V_2(x_0, y_0)$, en effet, il suffit de poser $V_2(x_0, y_0) = E\text{x}O_2(y_0)$.
2b. D'après la question 1, puisque h et p_Y sont continues (ici $\tilde{X} = X\text{x}Y$ et $\tilde{Y} = Y$), alors l'ensemble $\{(x, y) \in X\text{x}Y,\ h(x, y) = p_Y(x, y)\}$ est un fermé. Cet ensemble est exactement le graphe de la fonction h (y est nécessairement $f(x)$).
3. On peut considérer la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Le graphe de f est formé des deux branches de l'hyperbole et de l'origine $(0, 0)$. Le graphe de f est donc un fermé de $\mathbb{R}^2$ alors que la fonction n'est pas continue en 0.
On peut aussi donner l'exemple suivant: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = ln(x)$ si $x > 0$ (ou $f(x) = 1/x$ si $x > 0$). On peut donner d'autres exemples.

Université Mohammed V | Année universitaire: 2020-21
Faculté des Sciences | SMA-S5- Topologie
Département de Mathématiques | Examen de rattrapage 1h30

Exercice 1. (6 pts)

(E, d) désigne un espace métrique et $A \subset E$ une partie non vide. Pour tout $x \in E$, on pose $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.

1. Montrer que l'application $f : E \to I\!R$ définie par $f(x) = d(x, A)$ est lipschitzienne.

2. Donner une condition suffisante sur E pour que f soit bornée.

3. On suppose que A est fermée et soit B une autre partie fermée de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$.

3a. Montrer que si $a \in A$ alors $d(a, B) \neq 0$.

3b. On considère l'application $g : E \to I\!R$ définie par $g(x) = d(x, A) - d(x, B)$, trouver deux ouverts U et V de E disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 2. (5 pts)

$E = C([0, 1], I\!R)$ désigne l'espace des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. On le munit de sa norme habituelle $||f|| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

Soit $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ une application continue donnée et α un réel quelconque, on considère l'application $\phi : E \to E$ définie pour tout $f \in E$ par: $\phi(f) = \tilde{f}$ avec $\tilde{f}(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(y))\, dy$ et on veut étudier l'équation fonctionnelle $\phi(f) = f$.

1. Montrer qu'on a $||\phi(f) - \phi(g)|| \leq ||f - g||$. Peut-on conclure que ϕ admet un point fixe?

2. On suppose que φ est à valeurs dans $[0, 1/2]$, c'est à dire $\varphi : [0, 1] \to [0, 1/2]$. On fixe un réel quelconque δ, avec $1/2 \leq \delta < 1$, et on se place sur l'espace métrique $E_\delta = C([0, \delta], I\!R)$ muni de la même norme habituelle avec cette fois-ci l'application notée ϕ_δ et définie par: $\phi_\delta(f) = \tilde{f}$ avec $\tilde{f}(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(y))\, dy$.

Montrer que ϕ_δ est contractante puis déduire que l'équation $\phi_\delta(f) = f$ admet une unique solution f_δ dans E_δ pour tout δ vérifiant $1/2 \leq \delta < 1$.

3. En supposant $\varphi([0, 1]) \subset [0, 1/2]$, peut-on conclure que l'équation $\phi(f) = f$ admet une unique solution dans E? Justifier.

Exercice 3. (9 pts)

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé.

1a. Montrer que $\forall (a, b) \in E^2$, on a: $|\ ||a|| - ||b||\ | \leq ||a - b||$.

1b. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans E. Montrez que la suite $(||u_n||)_n$ est une suite de Cauchy dans $I\!R$ et qu'elle converge vers $\beta \in I\!R$. La suite $(u_n)_n$ est elle bornée?

2. On suppose dans cette partie que l'espace E est complet. Soit $S = \{x \in E,\ ||x|| = 1\}$ la sphère unité de E. On veut montrer que S est complet.

Montrer que S est fermé, c'est à dire que si $(u_n)_n$ est une suite dans S convergente vers une limite l alors $l \in S$ (c'est à dire $||l|| = 1$). Déduire que S est complet.

3. Inversement, on suppose que S est complet, on veut prouver que E est aussi complet. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans E.

3a. En utilisant un résultat du cours, justifier que si la suite admet une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_n$ convergente vers $0 \in E$ alors la suite est elle même convergente vers 0.

3b. On suppose que $(u_n)_n$ n'admet aucune suite extraite convergente vers 0. Il existe donc une constante $c > 0$ telle que $||u_n|| \geq c$ à partir d'un certain rang N.

En décomposant, $\dfrac{u_n}{||u_n||} - \dfrac{u_m}{||u_m||} = \dfrac{||u_m||.u_n - ||u_n||.u_m}{||u_n||.||u_m||} = \dfrac{(||u_m|| - \beta).u_n - (||u_n|| - \beta).u_m + \beta(u_n - u}{||u_n||.|u_m||}$

puis en utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que la suite $(\frac{u_n}{||u_n||})_{n\geq N}$ est de Cauchy dans S donc convergente vers une limite l.

Déduire que la suite (u_n) converge dans E et donner sa limite.

Corrigé

Ex1 1. Cette question est traitée en cours.

2. Il suffit que E soit compact car, f étant continue, l'image $f(E)$ est un compact de $I\!R$ qui est un borné.

3a. Par l'absurde, il existe une suite $(b_n)_n$ de points de B qui converge vers a. Puisque B est fermé, a doit appartenir à B ce qui est exclu par hypothèse.

3b. On remarque que $g(A) \subset I\!R_-$ et que $g(B) \subset I\!R_+$. Or g est continue donc si on pose $U = g^{-1}(]-\infty, O[)$ et $V = g^{-1}(]0, +\infty[)$ alors U et V sont bien deux ouverts. De plus, ils sont clairement disjoints et on a bien $A \subset U$ et $B \subset V$.

Ex2 1. On a $|\phi(f)(x) - \phi(g)(x)| =| \int_0^x (f(\varphi(y)) - g(\varphi(y))dy \mid\leq \int_0^1 \mid f(\varphi(y)) - g(\varphi(y) \mid dy$ $\leq \int_0^1 || f - g ||_\infty \, dy \leq|| f - g ||_\infty$.

Ainsi, on déduit que $|| \phi(f) - \phi(g) ||_\infty \leq|| f - g ||_\infty$.

On n'a pas établi que f est contractante, par conséquent on ne peut pas appliquer le théorème du point fixe.

2. Comme dans la question précédente, on aboutit à $|| \phi_\delta(f) - \phi_\delta(g) ||_\infty \leq \delta \, || f - g ||_\infty$. Puisque $0 < \delta < 1$, ϕ_δ est contractante et on peut appliquer le théorème du point fixe dans l'espace métrique $(E_\delta, || \, . \, ||_\infty)$.

3. On remarque que si $\delta < \delta'$, d'après l'unicité, la solution $f_{\delta'}$ prolonge la solution f_δ. On a donc une solution f définie à priori sur $[0, 1[$. l'égalité $f(x) = \tilde{f}(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(y)) \, dy$ prouve que f est prolongeable par continuité en 1 car $\alpha + \int_0^x f(\varphi(y)) \, dy$ a bien une limite finie quand x tend vers 1.

Ex3 1a. Cette question ne pose pas de problème si on utilise correctement l'inégalité triangulaire.

1b. L'inégalité précédente prouve que si $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E alors la suite $(|| \, u_n \, ||)_n$ est de Cauchy dans $I\!R$. $I\!R$ étant complet, elle converge donc vers une limite $\beta \in I\!R$. Comme elle converge, elle est bornée et donc la suite $(u_n)_n$ est elle-même bornée.

2. Si $(u_n)_n$ est une suite convergente vers l, alors toujours d'après la question 1, la suite des normes est convergente vers $|| \, l \, ||$. Or, la suite des normes est constante (égale à 1) donc sa limite vaut 1, c'est à dire qu'on a $l \in S$.
S est fermé dans E qui est supposé complet, donc S est complet (cours).
3a. Ceci provient du résultat suivant: Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, elle est convergente vers cette valeur d'adhérence.
3b. En remarquant que toute suite de Cauchy est bornée, il existe une constante $K > 0$ telle que $|| \, u_n \, || \leq K$. D'autre part, puisque la suite de réels $(|| \, u_n \, ||)_n$ converge vers β, on arrive à

$$|| \, \frac{u_n}{||u_n||} - \frac{u_m}{||u_m||} \, || \leq \frac{3K\varepsilon}{c^2},$$

à partir d'un certain rang.
Ceci prouve qu'on a bien une suite de Cauchy dans S, elle converge donc vers une limite l.
On peut alors vérifier que la suite $(u_n)_n$ converge vers $l\beta$.

Université Mohammed V-Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2021-22
SMA-S5- Topologie
Examen 1h30

Exercice 1. Questions de cours.(**1.**(1pt), **2.**(1pt), **3.**(2pts).)

1. Donner la définition d'une partie compacte dans un espace métrique .

2. Quelle hypothèse faut il ajouter à l'affirmation suivante?.

Un espace topologique est compact si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous recouvrement fini.

3. Montrer que si A_1 et A_2 sont deux parties compactes d'un même espace métrique, alors $A_1 \cup A_2$ est compacte. Pour cela, on peut se donner un recouvrement de $A_1 \cup A_2$ par des ouverts $(O_i)_{i\in I}$ et trouver un nombre fini d'ouverts $O_{i_1}, ..., O_{i_n}$ dont la réunion recouvre $A_1 \cup A_2$.

Exercice 2 (**1.**(1,5pt), **2a.**(1,5pt),**2b.**(2pts),**2c.**(1,5pt)+(0,5pt).)

On se place dans l'espace métrique complet $(E, d) = (\mathcal{C}([0, \delta], I\!R), ||\ .\ ||_\infty)$ où δ est un réel qui vérifie $0 < \delta < 1$. On considère la partie $F \subset E$ définie comme étant la boule fermée de centre la fonction identiquement nulle et de rayon $1/2$, plus précisément:

$$F = \{f \in E,\ ||\ f\ ||_\infty \leq \frac{1}{2}\}, \text{avec } ||\ f\ ||_\infty = \sup_{x\in[0,\delta]} |\ f(x)\ | \ .$$

1. Justifier que F est un complet.

2. On considère dans F l'équation fonctionnelle $\Phi(f) = f$ où $\Phi : F \to F$ est l'application définie pour tout $x \in [0, \delta]$ par $\Phi(f)(x) = x.(f(x))^2$.

2a. Montrer que Φ est bien définie, c'est à dire qu'on a $||\ \Phi(f)\ ||_\infty \leq 1/2$.

2b. Montrer que l'application Φ est contractante.

2c. Déduire que l'équation $\Phi(f) = f$ admet une unique solution dans F. Quelle est cette solution?

Exercice 3 (**1.**(1pt), **2.**(1pt)+(1pt),**3a.**(1pt),**3b.**(1pt),**3c.**(2pts),**3d.**(1pt)+(1pt).)

(E, d) est un espace métrique compact. Soit $f : E \to E$ une isométrie, c'est à dire une application vérifiant $d(f(x), f(y)) = d(x, y),\ \forall\ (x, y) \in E^2$.

Le but de cet exercice est de montrer que f est un homéomorphisme.

1. Montrer que f est continue.

2. Justifier que si f est surjective alors f est bijective puis que f^{-1} est continue.

3. On veut montrer que f est surjective. Soit $x \in E$ quelconque, on cherche $\alpha \in E$ tel que $f(\alpha) = x$.

3a. On considère la suite $(x_n)_n$ définie par $x_0 = x$ et $x_n = f^n(x) = (f \circ ... \circ f)(x)$, pour tout entier $n \geq 1$.
Montrer que si $m > n$ sont deux entiers alors on a $d(x_m, x_n) = d(x_{m-n}, x_0) = d(x_{m-n}, x)$.
3b. Montrer qu'il existe une suite extraite convergente $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que

$$d(x_{\varphi(m)}, x_{\varphi(n)}) = d(x_{\varphi(m)-\varphi(n)}, x_0), \text{ si } m \geq n.$$

3c. En remarquant que $x_{\varphi(m)-\varphi(n)}$ appartient à $f(E)$ si $m > n$, justifier que $x = x_0 \in \overline{f(E)}$.
3d. Prouver que $f(E)$ est compact et justifier que $f(E)$ est un fermé puis conclure.

Corrigé

Ex2 1. F est un fermé dans un espace complet, alors F est complet.
2a.On a la majoration $\| \Phi(f) \|_\infty \leq \delta(\frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2}$.
2b. On peut établir que $\| \Phi(f) - \Phi(g) \|_\infty \leq \delta \| f - g \|_\infty$, avec $0 < \delta < 1$.
2c. On applique le théorème du point fixe.
Ex3 1. f est lipschitzienne de rapport 1, donc f est continue.
2. f^{-1} est aussi lipschitzienne de rapport 1.
3a. Facile.
3b. La suite $(x_n)_n$ est dans l'espace compact E, elle admet donc une suite extraite convergente $(x_{\varphi(n)})_n$ d'après le théorème de B-W.
L'égalité demandée est immédiate d'après 3a.
3c. la suite $(x_{\varphi(n)})_n$ converge donc est de Cauchy. $\forall \varepsilon > 0$, si m et n sont assez grands alors $d(x_{\varphi(m)}, x_{\varphi(n)}) < \varepsilon$.
D'après 3b., on a aussi $d(x_{\varphi(m)-\varphi(n)}, x_0) < \varepsilon$ si m et n sont assez grands. Puisque $x_{\varphi(m)-\varphi(n)}$ appartient à $f(E)$, alors on a bien vérifié que quel que soit la boule $B(x_0, \varepsilon)$, elle contient un élément de $f(E)$. On peut donc affirmer qu'on a $x_0 \in \overline{f(E)}$.
3d. $f(E)$ est compact car c'est l'image d'un compact par une application f qui est à valeurs dans un espace séparé (tout espace métrique est séparé).
Puisque tout compact dans un espace métrique est fermé, $f(E)$ est fermé. Par suite, on a $f(E) = \overline{f(E)}$ et donc $x_0 \in f(E)$. f est donc surjective.

Université Mohammed V-Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2021-22
SMA-S5- Topologie
Examen de rattrapage 1h30

Exercice 1. Questions de cours.(**1.**(1pt), **2.**(1pt), **3.**(1pt).)

1. Donner les hypothèses qui manquent dans les résultats suivants:

a. Si $f : A \subset E \to F$ est une application continue d'une partie dense A d'un espace métrique E à valeurs dans un espace métrique F alors f admet un prolongement continu g défini sur E.

b. Dans un espace métrique E, si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, alors elle est convergente vers cette valeur d'adhérence.

2. Rappeler la définition d'une topologie.

Exercice 2. (**1.**(0.5pt), **2.**(0.5pt), **3.**(1pt)+(1pt), **4.**(2pts).)

Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble donné et $\mathcal{T}$ la topologie sur E définie par

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, E\}.$$

1. La partie $\{c\}$ est-elle un fermé pour cette topologie?

2. Donner tous les fermés.

3. Quel est l'intérieur de la partie $\{c\}$? Quelle est son adhérence?

4. On considère la suite $(u_n)_n$ donnée par:

$u_{2n} = a$ et $u_{2n+1} = c$ pour tout entier $n \geq 0$.

Cette suite est elle convergente? Justifier votre réponse.

Exercice 3. (I. **1.**(1pt), **2a.**(1pt), **2b.**(1pt), **2c.**(1,5pt), **2d.**(1pt).) (II. **1.**(1pt), **2.**(1,5pt), **3.**(1pt), **4.**(1pt), **5.**(1pt)+(1pt).)

I. Dans cet exercice, on considère $E = \mathcal{C}([0, 1], I\!R)$ muni de la distance d_∞ donnée pour tout couple $(f, g) \in E^2$ par

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} \mid f(x) - g(x) \mid .$$

1. Soit $(f_n)_n$ une suite dans (E, d_∞) convergente vers une fonction $f \in E$. Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, la suite de nombres réels $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.

2. On donne, dans E, la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie pour $n \geq 1$ par:

$f_n(x) = 0$ si $x \in [1/(n + 1), 1]$ et $f_n(x) = -(n + 1)x + 1$ sinon.

a. Montrer que $\forall x \in]0, 1]$, $f_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de la suite $(f_n(0))_n$?

b. Calculer $d_\infty(f_n, \Theta)$, Θ étant la fonction identiquement nulle. Déduire un réel $r > 0$ tel que f_n appartient à la boule fermée $B_F(\Theta, r)$ pour tout $n \geq 1$.

c. Montrer que la suite $(f_n)_n$ n'admet aucune suite extraite convergente. On pourra

raisonner par l'absurde et utiliser 2a.
d. Ce résultat est-il étonnant? Justifier.
II. On munit cette fois-ci l'espace vectoriel E de la distance d_1 définie pour tout couple $(f, g) \in E^2$ par: $d_1(f, g) = \int_0^1 \mid (f-g)(x) \mid dx$.
1. Peut on dire que l'espace métrique (E, d_1) est complet?
2. On reprend la suite $(f_n)_n$ étudiée dans I. Montrer que si $n \geq m \geq 1$, on a $d_1(f_n, f_m) \leq \frac{1}{m}$. (Vous pouver utiliser la courbe dessinée sur le verso de la feuille et remarquer qu'on a: $f_m \geq f_m - f_n \geq 0$.)
3. La suite $(f_n)_n$ est-elle de Cauchy pour cette distance?
4. Peut-on déduire directement qu'elle converge?
5. Calculer $\int_0^1 \mid f_n(x) \mid dx$ et déduire la convergence et la limite de la suite $(f_n)_n$.

Corrigé

Ex2 1. Elle n'est pas fermée car son complémentaire qui est $\{a, b, d\}$ n'est pas un ouvert (élément de la topologie considérée).
2. Les fermés sont (par passage au compémentaire) $\emptyset, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{c, d\}$ et E.
3. l'intérieur est $\emptyset$ et l'adhérence est E.
4. Attention, nous ne sommes plus dans $I\!R$ avec sa topologie classique liée à la valeur absolue. Cette suite est convergente vers c car le seul ouvert contenant c est E tout entier.
Ex3 I.1. la convergence uniforme implique la convergence simple.
2a. Si $x \in]0, 1]$ est fixé, alors si n est assez grand, on a $f_n(x) = 0$. La suite est donc stationnaire, elle converge donc vers 0. Si $x = 0$, la suite $(f_n(0))_n$ est constante et vaut 1, elle converge donc vers 1.
2b. On obtient facilement $d_\infty(f_n, \Theta) = 1$, quel que soit l'entier $n \geq 1$. On peut donc proposer $r = 1$ (ou tout réel supérieur à 1).
2c. Si la suite admettait une suite extraite convergente dans E, sa limite doit être continue sur $[0, 1]$ et en particulier en 0. Or ceci ext exclu d'après 2a.
2d. Ceci n'est pas surprenant car la boule unité fermée n'est pas compacte et on ne peut appliquer le théorème de B-W.
II.1. Non car la norme a changé.
2. Facile.
3. La suite est de Cauchy car $\forall \varepsilon > 0$ si $n \geq m \geq \frac{1}{\varepsilon}$, on aura

$$d_1(f_n, f_m) \leq \varepsilon$$

.
4. Non car l'espace n'est pas complet.
5. on obtient facilement l'égalité $\int_0^1 \mid f_n(x) \mid dx = \frac{1}{2(n+1)}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On a donc $d_1(f_n, \Theta)$ qui tend vers 0, la suite $(f_n)_n$ converge donc dans E pour la distance d_1 vers la fonction identiquement nulle Θ.