

Exercice 1. (5pts)

$E = C([0, 1], \mathbf{R})$ désigne l'espace vectoriel des applications définies et continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ donnée, pour tout $f \in E$, par $\| f \|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} | f(x) |$.

On définit l'application $\varphi : E \rightarrow E$ par

$$\varphi(f) = g, \text{ avec } g(x) = \int_0^x \sin \frac{f(t)}{2} dt.$$

1. Montrer que l'application φ est lipschitzienne.
2. Justifier que l'équation $\varphi(f) = f$ admet une unique solution $f \in E$. On précisera toutes les hypothèses utiles.

Exercice 2. (6 pts)

$(\mathbf{R} \times \mathbf{R}, d)$ est l'espace métrique produit muni de l'une des distances habituelles. On considère la projection $p_1 : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ donnée, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, par $p_1(x, y) = x$.

On rappelle qu'une application est dite fermée si l'image de tout fermé est un fermé et on souhaite montrer que l'application p_1 n'est pas fermée.

On considère la partie $A \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ définie par

$$A = \bigcup_{k \in \mathbf{N}, k \geq 1} \left(\left[-1 + \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k} \right] \times \{k\} \right).$$

1. Soit $(x_n, y_n)_n$ une suite de points de A convergente vers $(l_1, l_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. En remarquant que la suite $(y_n)_n$ est une suite d'entiers naturels, justifier que cette suite est constante à partir d'un certain rang (c'est à dire $y_n = k_0 \in \mathbf{N}$ pour $n \geq n_0$).
2. En étudiant la suite $(x_n)_n$, montrer que (l_1, l_2) appartient à A puis conclure que A est un fermé.
3. Déterminer $p_1(A)$ puis conclure.
4. L'application p_1 est elle ouverte? Justifier.

Exercice 3. (9 pts)

On considère une nouvelle fois l'espace métrique (E, d_∞) de l'exercice 1, d_∞ étant la distance associée à la norme $\| \cdot \|_\infty$ et l'espace vectoriel normé $(F, \| \cdot \|_1)$ des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, où la norme est donnée par $\| f \|_1 = \| f' \|_\infty + | f(0) |$, pour tout $f \in F$.

On définit, pour tout entier $k \geq 1$, l'application ψ_k sur $[0, 1]$ par $\psi_k(x) = \frac{x}{k}$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\psi_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{x}{k}$ si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$.

1. Justifier qu'on a $\psi_k \in E$, $\psi_k \notin F$ puis calculer $\| \psi_k \|_\infty$, pour tout $k \geq 1$.
- 2a. Soit $f \in F$ et soit $r > 0$ un réel quelconque. En utilisant ψ_k (pour k assez grand) et f , donner une fonction $g \in E$ avec $g \notin F$ vérifiant $d_\infty(f, g) < r$.
- 2b. Peut on affirmer que F est un ouvert de E ? Justifier.
- 2c. F est il un fermé de E ?
- 3a. Soit $K \subset F$ un compact. Montrer qu'il existe un réel $R > 0$ tel que $\forall f \in K$, on a

$$\| f \|_1 \leq R.$$

- 3b. En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer deux réels α et β tels que $| f(x) | \leq \alpha x + \beta$, pour tout $f \in K$ et tout $x \in [0, 1]$.
- 3c. Dédurre que K est borné dans E .

Corrigé.

Ex1. 1. Pour f_1, f_2 appartenant à E , on a

$$|(\varphi(f_1) - \varphi(f_2))(x)| \leq \int_0^x \left| \sin \frac{f_1(t)}{2} - \sin \frac{f_2(t)}{2} \right| dt \leq \int_0^1 \left| \sin \frac{f_1(t)}{2} - \sin \frac{f_2(t)}{2} \right| dt$$

ceci pour tout $x \in [0, 1]$. D'autre part, on a $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbf{R}$. On déduit

$$|(\varphi(f_1) - \varphi(f_2))(x)| \leq \int_0^1 \left| \frac{f_1(t)}{2} - \frac{f_2(t)}{2} \right| dt.$$

Enfin, en passant au "sup", on a

$$\|\varphi(f_1) - \varphi(f_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f_1 - f_2\|_\infty.$$

Ceci prouve que l'application φ est lipschitzienne.

2. L'espace E étant complet et l'application φ contractante ($\frac{1}{2} < 1$), on peut appliquer le théorème du point fixe.

Ex2. 1. Si $(y_n)_n$ est une suite d'entiers qui converge vers une limite l_2 , forcément $l_2 \in \mathbf{N}$ (sinon $l_2 \in]p, p+1[$, p entier convenable, et pour un bon choix de $\varepsilon > 0$, la suite ne serait pas une suite d'entiers). Ensuite, la suite est forcément constante et égale à l_2 à partir d'un certain rang sinon, ici aussi, pour un bon choix de $\varepsilon > 0$, la suite ne serait pas convergente vers l_2 .

2. D'après ce qui précède, puisque $y_n = l_2 = k_0$ à partir d'un certain rang, les x_n appartiennent à l'intervalle $[-1 + \frac{1}{k_0}, 1 - \frac{1}{k_0}]$ à partir d'un certain rang. Cette suite étant convergente et l'intervalle étant fermé, sa limite l_1 appartient à cet intervalle. Ainsi, $(l_1, l_2) \in A$ et A est un fermé.

3. On a $p_1(A) =]-1, 1[$ qui est un ouvert et A est un fermé, l'application p_1 n'est donc pas fermée.

4. L'application p_1 est ouverte. En effet, si O est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $\alpha \in p_1(O)$, il existe $\beta \in \mathbf{R}$ tel que $p_1((\alpha, \beta)) = \alpha$, avec $(\alpha, \beta) \in O$. Puisque O est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ muni de la distance euclidienne (par exemple), et si $(\alpha, \beta) \in O$, alors il existe un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte, $B((\alpha, \beta), r) \subset \mathbf{R}^2$ soit contenue dans O . On affirme que la boule de $\mathbf{R}$, $B(\alpha, r)$ est contenu dans $p_1(O)$. En effet, tout point $x \in B(\alpha, r)$ est l'image de $(x, \beta) \in B((\alpha, \beta), r) \subset O$. Ce qui prouve bien que $p_1(O)$ est un ouvert.

Ex 3. 1. ψ_k est continue en $\frac{1}{2}$ et partout sur $[0, 1]$, ainsi $\psi_k \in E$. Mais, $\psi_k \notin F$ car elle n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$. De plus, on a $\|\psi_k\|_\infty = \frac{1}{2k}$.

2a. Il suffit de poser $g = f + \psi_k$. Cette fonction convient.

2b. F n'est certainement pas un ouvert car si $f \in F$ est un élément quelconque, tout boule centrée en f ne peut être contenue dans F car elle contiendra toujours un élément de E qui n'est pas dans F d'après la question qui précède.

2c. **Cette question est hors barème.** F n'est pas fermé dans E car on peut construire une suite d'éléments de F convergente dans E sans être convergente dans F . En effet, la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies, pour tout $n \geq 1$, sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ converge vers la fonction " $x \mapsto \sqrt{x}$ " qui est bien dans E sans être dans F . (On peut aussi considérer la suite $\sqrt{(x - 1/2)^2 + \frac{1}{n}}$.)

3a. Tout compact dans un espace métrique étant borné, on a le résultat.

3b. Par application du TAF, on a, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $f \in K$, $|f(x) - f(0)| = f'(c)x$, avec $c \in]0, x[$ convenable. D'où, $|f(x) - f(0)| \leq \|f'\|_\infty x \leq \|f\|_1 x \leq Rx$.

On déduit alors $|f(x)| \leq Rx + |f(0)| \leq Rx + \|f\|_1 \leq Rx + R$.

4. On a $|f(x)| \leq 2R$ pour tout $x \in [0, 1]$ et donc $\|f\|_\infty \leq 2R$, ceci étant vrai pour tout $f \in K$. Par suite K est borné dans E .