Université Mohammed V-Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2018-19
SMA-S5- Topologie
Examen 1h30

Exercice 1. (4 pts)

E est un espace topologique. U et V sont deux ouverts denses de E.

1a. Montrer que U∩V est dense dans E. Pour cela, on se donne pour tout $x \in E$ un voisinage ouvert O_x et on montrera que $O_x \cap$ (U∩V) est non vide.

1b. Déduire que toute intersection finie d'ouverts denses est dense.

2. Donner, sans démonstration, une condition suffisante sur E pour que toute intersection dénombrable d'ouverts denses soit dense.

Exercice 2. (6 pts)

$E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions définies et continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. On le munit de la distance d_∞ donnée, pour tout $(f,g) \in E^2$, par $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]}|f(x) - g(x)|$.

1. On considère le sous ensemble $F \subset E$ défini par: $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Montrer que F est un fermé.

2. $O = F^c$ désigne le complémentaire de F. On veut montrer que O est dense dans E. Pour cela, on se donne $\varphi \in E \setminus O = F$ et $B(\varphi, \varepsilon)$ une boule quelconque centrée en φ et de rayon $\varepsilon > 0$, on va construire une application $\psi \in O$ qui appartient à cette boule.

2a. Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ, $0 < \delta < 1$, tel que si $|x| < \delta$, on a $|\varphi(x)| < \varepsilon/2$.

2b. Soit ψ la fonction définie sur $[0,1]$ par:

$$\psi(x) = \frac{\varphi(\delta) - \varepsilon/2}{\delta}x + \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } x \in [0,\delta] \text{ et } \psi(x) = \varphi(x) \text{ si } x \in]\delta, 1].$$

Justifier que ψ appartient à O puis montrer qu'on a

$$-\varepsilon \leq \varphi(x) - \psi(x) \leq \varepsilon, \text{ pour } x \in [0,\delta].$$

2c. Conclure que O est dense dans E.

Exercice 3. (10 pts)

Soit (E,d) un espace métrique compact et soit $f : E \to E$ une application vérifiant $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ pour tout $(x,y) \in E^2$, $x \neq y$. On rappelle que ExE est muni de la métrique $\hat{d}$ définie par:

$$\hat{d}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(d(x_1,x_2), d(y_1,y_2)).$$

Le but de cet exercice est de montrer que f admet un unique point fixe.

1. Montrer que l'application $\phi : E \to E\text{x}E$ définie par $\phi(x) = (x, f(x))$ est lipschitzienne.
2. Justifier que l'application $d : E\text{x}E \to \mathbb{R}_+$ est continue.
3. Montrer que l'application $\psi : E \to \mathbb{R}_+$ définie par $\psi(x) = d(x, f(x))$ est bornée et atteint ses bornes.
4. On pose $a = \inf_x d(x, f(x)) = d(\alpha, f(\alpha)) \geq 0$.

Montrer que le cas $a > 0$ est impossible puis justifier que α est l'unique point fixe de f.

5. Soit $x_0 \in E$ quelconque. On pose pour tout $n \geq 1$, $x_n = f^n(x_0)$ et on considère la suite $(x_n)_n$.

5a. Justifier qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente. On note x sa limite.

5b. En considérant la suite de nombres réels $(d(x_n, \alpha))_n$, montrer que les deux suites $(d(x_{\varphi(n)}, \alpha))_n$ et $(d(x_{\varphi(n)+1}, \alpha))_n$ ont la même limite notée l.

5c. Calculer l de deux manières différentes, en fonction de x et de α, puis déduire qu'on a $x = \alpha$.

Corrigé.

Ex1: 1a. Soit $x \in E$ et O_x un ouvert quelconque contenant x. Puisque U est dense on a $O_x \cap U \neq \emptyset$. Ainsi, il existe $y \in O_x \cap U \subset E$. $O_x \cap U$ étant un ouvert contenant y et V étant dense dans E, on a donc $(O_x \cap U) \cap V \neq \emptyset$.
1b. Si on se donne une suite finie $U_1, .., U_n$ d'ouverts denses de E, alors, d'après la question précédente, on a $U_1 \cap U_2$ est un ouvert de E dense dans E. On considère les deux ouverts $U_1 \cap U_2$ et U_3, toujours d'après 1a. on aura $(U_1 \cap U_2) \cap U_3$ est un ouvert dense dans E. Au bout d'un nombre fini d'étapes, on aura que $U_1 \cap ... \cap U_n$ est dense dans E.
2. D'après un exercice vu en T.D., une condition suffisante portant sur E pour qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses soit dense est que E soit un espace métrique complet.

Ex2. 1. Pour montrer que F est un fermé, on va montrer que toute suite $(f_n)_n$ dans F convergente vers f alors $f \in F$. Soit $(f_n)_n$une telle suite, elle vérifie donc $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Puisque $d_\infty(f_n, f)$ tend vers 0, alors la suite de nombres réels $(f_n(0))_n$ converge vers $f(0)$. La suite étant constante égale à 0, sa limite $f(0)$ est aussi nulle et donc on a bien $f \in F$.
2a. Cela découle simplement de la continuité de φ en 0 avec $\varphi(0) = 0$.
2b. Pour montrer que ψ appartient à O, on doit vérifier deux points: La continuité de ψ sur $[0, 1]$ et $\psi(0) \neq 0$. Il suffit de vérifier la continuité en δ qui ne pose pas de problème et de calculer $\psi(0) = \varepsilon/2$. Pour le dernier point, on a les encadrements: $-\varepsilon \leq \varphi(\delta) - \varepsilon/2 \leq 0$ et $0 \leq x/\delta \leq 1$ pour $x \in [0, \delta]$. Cela conduit à l'encadrement $-\varepsilon/2 \leq \psi(x) \leq \varepsilon/2$ pour $x \in [0, \delta]$ et par suite à $-\varepsilon \leq \varphi(x) - \psi(x) \leq \varepsilon$ sur $[0, \delta]$. D'autre part, sur l'intervalle $]\delta, 1]$, on a clairement $\varphi(x) - \psi(x) = 0$. La double inégalité est donc établie sur $[0, 1]$.
2c. Si on se donne $\varphi \in E \setminus O$ et $\varepsilon > 0$ un réel quelconque, alors d'après la question précédente, la boule de centre φ et de rayon ε contient l'élément $\psi \in O$. Ainsi, O est dense dans E.

Ex3. 1. Pour montrer que l'application ϕ est lipschitzienne, on doit montrer qu'il existe un réel positif k tel que $\hat{d}((x, f(x)), (y, f(y)) \leq kd(x, y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$. On écrit: $\hat{d}((x, f(x)), (y, f(y)) = max(d(x, y), d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Ainsi ϕ est lipschitzienne de rapport 1.
2. Cette question a été vue en cours. En utilisant deux fois l'inégalité triangulaire, on aboutit à: $|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) \leq 2max(d(x_1, x_2), d(y_1, y_2)) = 2\hat{d}((x_1, y_1), (x_2, y_2))$. Ce qui prouve que d est continue en tant qu'application.
3. On remarque qu'on a $\psi = d \circ \phi$ et par suite, ψ est aussi continue sur le compact E. L'image $\psi(E)$ est un compact de $\mathbb{R}_+$, c'est donc un fermé borné de $\mathbb{R}$. $\text{Inf}_{x \in E} d(x, f(x))$ est donc atteint par un certain α, c'est à dire $d(\alpha, f(\alpha)) = \text{inf}_{x \in E} d(x, f(x))$.
4. L'hypothèse $a > 0$ est impossible car cela signifierait $\alpha \neq f(\alpha)$ et on aurait $d(f(\alpha), f \circ f(\alpha)) < d(\alpha, f(\alpha))$ et alors $d(f(\alpha), f \circ f(\alpha)) < \text{inf}_{x \in E} d(x, f(x))$ d'où une contradiction.
α est l'unique point fixe car si $\beta \in E$ en est un autre alors $d(f(\alpha), f(\beta)) = d(\alpha, \beta) < d(\alpha, \beta)$ ce qui est absurde.
5a. E étant compact, d'après B-W-, toute suite $(x_n)_n$ dans E admet une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente vers une limite x.
5b. La suite de nombres réels $d(x_n, \alpha)$ étant décroissante et minorée, elle est convergente vers une limite l. Puisque $(d(x_{\varphi(n)}, \alpha))_n$ et $(d(x_{\varphi(n)+1}, \alpha))_n$ sont deux suites extraites, elles convergent aussi vers l.
5c. D'abord, il est important de noter que la suite $(x_{\varphi(n)+1})_n$ N'EST PAS UNE SUITE EXTRAITE DE $(x_{\varphi(n)})_n$. Par continuité de l'application d, nous pouvons affirmer que, puisque $(x_{\varphi(n)}, \alpha)$ tend vers (x, α), $d(x_{\varphi(n)}, \alpha)$ tend vers $d(x, \alpha)$. De même, $d(x_{\varphi(n)+1}, \alpha)$ tend vers $d(f(x), \alpha)$. On a donc $d(f(x), \alpha) = d(x, \alpha)$. Forcément, on a $f(x) = x$ car sinon $d(f(x), \alpha) < d(x, \alpha)$