Université Mohammed V-Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2016-17
SMA-S5- Topologie
Examen de rattrapage 1h30

Exercice 1.

1. Donner la définition d'un espace métrique compact.
2. Donner une propriété équivalente.

Exercice 2.

Soit (K, d) un espace métrique compact. On munit l'espace $K\text{x}K$ de la distance D définie par

$$D((x, y), (x', y')) = max(d(x, x'), d(y, y')).$$

1. Montrer, en utilisant les suites, que l'espace $K\text{x}K$ est compact.
2. On rappelle que le diamètre $\delta(A)$ d'une partie non vide A d'un espace métrique (E, d_1) est donné par $\delta(A) = sup_{x,y\in A} d_1(x, y)$.

2a. Montrer que si un espace métrique est compact alors son diamètre est fini.
2b. Montrer qu'il existe deux éléments a et b dans K tel que $\delta(K) = d(a, b)$. (On pourra considérer une application convenable définie sur $K\text{x}K$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.)

Exercice 3.

$E = C([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. On définit sur E la norme N_1, pour tout $f \in E$, par $N_1(f) = \int_0^1 \mid f(t) \mid dt$ et on considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = x^n$ pour tout $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$.

1. Calculer $N_1(f_n)$. La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle dans E pour la norme N_1? Justifier votre réponse.
2. La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle, dans E, pour la norme N_∞? On rappelle que $N_\infty(f) = sup_{x\in[0,1]} \mid f(x) \mid$.
3. Les deux normes N_1 et N_∞ sont elles équivalentes?
4. **Question bonus:** Montrer que l'espace (E, N_1) n'est pas complet en choisissant une suite de Cauchy qui ne soit pas convergente.

Exercice 4.

On reprend l'espace métrique $(E, N_\infty) = (C([0, 1], \mathbb{R}), N_\infty)$ de l'exercice précédent et on souhaite montrer que le sous espace $F \subset E$ des fonctions définies continues et affines par morceaux sur $[0, 1]$ est dense dans E. On se donne donc un élément quelconque $f \in E$, un réel $\varepsilon > 0$ et on cherche un élément $g \in F$ tel que $N_\infty(f - g) < \varepsilon$.

1. Montrer, en précisant la propriété utilisée, qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que si x et y sont deux éléments de $[0, 1]$ avec $\mid x - y \mid\leq \delta$, alors $\mid f(x) - f(y) \mid< \varepsilon$. On suppose dans la suite $\delta < 1$.
2. On note $k_0, k_1, ..., k_n$ la suite finie définie par $k_0 = 0$ et $k_{i+1} = k_i + \frac{i+1}{n}$ pour $i = 0, ..., n - 1$ et où n est un entier supposé vérifier la condition $1/n < \delta$.

On définit la fonction g sur $[k_i, k_{i+1}[\cap[0, 1]$, pour $i = 0, ..., n - 1$ par $g(x) = \frac{f(k_{i+1})-f(k_i)}{k_{i+1}-k_i}(x - k_i) + f(k_i)$ et on pose $g(1) = f(1)$.

2a. Montrer que g est continue aux points k_i $\forall i = 1, ..., n$.
2b. Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $\mid f(x) - g(x) \mid< 2\varepsilon$. (On se placera sur l'intervalle $[k_i, k_{i+1}[$, on utilisera la première question et on remarquera que $\mid g(x) - f(k_i) \mid\leq\mid f(k_{i+1}) - f(k_i) \mid$ pour tout $x \in [k_i, k_{i+1}[$.)

Corrigé.

Ex 2. 1. Soit $(x_n, y_n)_n$ une suite dans KxK. K étant un compact, la suite $(x_n)_n$ admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente vers une limite l_1. La suite extraite $(y_{\varphi(n)})_n$ admet une suite extraite $(y_{\varphi(\psi(n))})_n$ convergente vers une limite l_2. La suite extraite $(x_{\varphi(\psi(n))})_n$, étant une suite extraite de $(x_{\varphi(n)})_n$, converge aussi vers l_1. Finalement, la suite $(x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))})_n$, extraite de la suite $(x_n, y_n)_n$, converge vers (l_1, l_2).

2a. On raisonne par l'absurde. Soit $\alpha \in K$. K n'étant pas borné, il existe un élément $x_0 \in K$ tel que $d(x_0, \alpha) \geq 1$. De même il existe un élément $x_1 \in K$ vérifiant $d(x_1, \alpha) \geq 2$. On construit par récurrence une suite déléments $(x_n)_n$ dans K vérifiant $d(x_n, \alpha) \geq n + 1$. La suite $(x_n)_n$ n'admet pas de sous suite convergente. En effet, si $(x_n)_n$ avait une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente vers une limite l alors, par continuité de la distance, $d(x_{\varphi(n)}, \alpha)$ devrait converger vers $d(l, \alpha)$. On a obtenu une contradiction.

2b. L'application distance $d : K\text{x}K \to \mathbb{R}$ étant continue, l'image de KxK est un compact de $\mathbb{R}$, par conséquent un fermé, borné de $\mathbb{R}$. Si on pose

$$F = \{d(x, y),\ (x, y) \in K\text{x}K\}$$

alors F est majoré et sa borne supérieure qui est $\delta(K)$ appartient à F. Il existe donc $(a, b) \in K\text{x}K$ tel que $d(a, b) = \delta(K)$.

Ex 3. 1. On a $N_1(f_n) = N_1(f_n - 0) = \frac{1}{n+1}$. Ceci prouve que la suite $(f_n)_n$ converge vers la fonction identiquement nulle (qui est bien élément de E).

2. Comme la convergence pour la norme N_∞ est la convergence uniforme et que la convergence uniforme implique la convergence simple, si la suite $(f_n)_n$ convergeait vers une fonction φ pour la norme N_∞ alors forcément, on a $\varphi(1) = \lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$ et $\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ si $x \in [0, 1[$. Or, cette fonction n'étant pas continue en 1, n'est pas élément de E.

3. Les deux normes n'ayant pas les mêmes suites convergentes, elles ne sont pas équivalentes.

Ex 4. 1. La fonction f étant continue sur un compact, elle y est uniformément continue. Ceci répond à cette question.

2a. On montre facilement que la limite à droite qui est $f(k_i)$ est aussi la limite à gauche.

2b. Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire et de remarquer que

$$\mid f(k_i) - g(x) \mid \leq \mid f(k_{i+1}) - f(k_i) \mid,\ \text{pour } x \in [k_i, k_{i+1}]$$