Université Mohammed V-Rabat
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Filière SMA

Module de topologie

Semestre 5

Hamza BOUJEMAA

Introduction

Le contenu du module de topologie enseigné en semestre 5 ne peut constituer un exposé complet étant donné le nombre d'heures de cours alloué. Cependant, il constitue une introduction à la topologie générale. Avant de définir les espaces topologiques, on se place dans un cadre particulier important qui est celui des espaces métriques où les ouverts et les voisinages peuvent être mieux intégrés grâce à la notion de distances et de boules. Vu le temps imparti, les semi normes ainsi que les topologies associées n'apparaissent pas dans cet exposé. Par contre, avant de parler des espaces métriques, on introduit un cas particulier important qui est celui des espaces vectoriels normés. Cela permettra aussi de définir les espaces de Banach qui seront utiles notamment pour le module de calcul différentiel.
La continuité des applications, les espaces compacts ainsi que le théorème de Bolzano Weierstrass constituent l'essentiel de l'exposé. Il se termine par deux théorèmes importants et très utiles en analyse fonctionnelle: Le théorème d'Ascoli et le théorème de Stone-Weierstrass.
Mis à part le premier chapitre, tous les autres s'inspirent du livre "Topologie" de G. Chirstol, A. Cot et C-M. Marle qui contient aussi un bon nombre d'exercices dont une partie sera traitée en travaux dirigés.

Chapitre 1 Rappels et compléments.

I. Espaces vectoriels normés. Espaces de Banach.

Dans tout ce qui suit E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme c'est à dire d'une application notée

$$\|.\| \ : \ E \to \mathbb{R}_+,$$

et vérifiant:

a. $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
b. $\|kx\| = |k|\|x\|$;pour tout $k \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et tout $x \in E$.
c. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous x et $y \in E$.

Exercices: 1. Vérifier que, dans $\mathbb{R}^n$, l'expression $\|(x_1, ..., x_n)\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$ définit bien une norme. Faire de même pour les deux autres normes de $\mathbb{R}^n$, $\|(x_1, ..., x_n)\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et $\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = sup_{i=1,...,n}|x_i|$.
2. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des applications définies, continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\| = sup_{x\in E}|f(x)|$. Vérifier qu'il s'agit bien d'une norme.

Nous pouvons alors associer une application appelée distance notée d et définie par

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ pour tous } x \text{ et } y \in E.$$

Nous considérerons qu'une application f de E vers F (F étant un autre espace vectoriel normé) est continue quand $d(f(x), f(y))$ tend vers 0 lorsque $d(x, y)$ tend vers 0.

La définition d'une suite de Cauchy dans E est la même que dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$ c.a.d. qu'une suite d'éléments $(x_n)_n$ de E est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \ , \exists N \in \mathbb{N} \text{tel que } \forall n \geq N \text{ et } p \geq 0, \ d(x_n, x_{n+p}) < \epsilon.$$

On dira que E est un espace de Banach (ou un espace vectoriel normé complet) si toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E.

Exemples

-$\mathbb{R}$ muni de la norme valeur absolue est un espace de Banach.(On rappelle qu'on démontre que toute suite de Cauchy est bornée puis qu'elle possède forcément une seule valeur d'adhérence et qu'enfin la suite est convergente vers cette valeur qui est par conséquent sa limite.)

-$I\!R^n$ muni de la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$ est un espace de Banach. (On vérifie que si $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $I\!R^n$, alors pour tout $0 \leq i \leq n$, la suite formée par la i^{eme} composante notée $({x^i}_n)_n$ est de Cauchy dans $I\!R$ et par conséquent convergente dans $I\!R$. On déduit alors aisément que $(x_n)_n$ est convergente dans $I\!R^n$.

- On note $E = \mathcal{C}([a,b], I\!R)$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur l'intervalle fermé, borné $[a,b]$ et à valeurs dans $I\!R$. On le munit de la norme du sup:

$$\|f\| = sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

On remarquera qu'elle est bien définie et que c'est bien une norme. On peut montrer que cet espace est complet, voir exercie 1 série 1.

- On peut généraliser en posant $E = \mathcal{C}_b(X, I\!R)$, espace des fonctions définies, bornées et continues sur X, espace vectoriel normé quelconque, à valeurs réelles et

$$\|f\| = sup_{x\in E}|f(x)|.$$

-On peut se placer dans un cadre plus général en considérant $E = \mathcal{C}_b(X, F)$ où F est un espace de Banach. (Ce qui garantira l'existence d'une limite pour toute suite $(f_n(x))_n$ lorsque que x est un élément quelconque fixé dans X et l'idée de la démonstration est analogue à la pécédente.)

On notera que les derniers exemples donnés sont des espaces de Banach de dimension infinie.

A présent, nous allons étudier la continuité des applications linéaires entre espaces de Banach.

II. Applications linéaires continues.

Théorème Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f: E \to F$ une application donnée. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes:

a. f est continue.

b. f est continue en 0.

c. Il existe une constante M strictement positive telle que

$$\|f(x)\| \leq M \text{ pour tout } \ x \in E \text{ vérifiant} \|x\| \leq 1.$$

Autrement dit, f est bornée sur la boule unité. Cette propriété est équivalente à

$$\exists M > 0, \text{telle que } \forall x \in E \ ; \ \|f(x)\| \leq M\|x\|.$$

Démonstration Il est clair que a) implique b). Montrons que b) implique c).

Pour $\epsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que pour $\|x\| < \delta$ on a $\|f(x)\| < \epsilon$.
En particulier, pour $\epsilon = 1$, si $\|x\| < r$ alors $\|f(x)\| < 1$. On aura donc $\|f(x)\| < \frac{1}{r}$ si $\|x\| < 1$. Ainsi, f est bornée sur la boule unité.

Pour l'implication de c) vers a), on remarque d'abord que si $x \in E$ est non nul, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, par suite, en utilisant c) et la linéarité de f, on aura $\|f(x)\| \leq M\|x\|$. A nouveau, via l'argument de linéarité, on aura

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| < M\|x - y\|.$$

Ce qui signifie la continuité de f en tout x.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E vers F et on le munit de la norme

$$\|f\| = sup_{\|x\|\leq 1}\|f(x)\|.$$

On a la proposition suivante dont la démonstration est facile et laissée en exercice:

Proposition 1. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\|f\|$ vérifie $\|f(x)\| \leq \|f\|\|x\|$ et c'est le plus petit des réels M vérifiant $\|f(x)\| \leq M\|x\|$.
2. Il s'agit bien d'une norme!

Théorème Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Démonstration On se place sur la boule B fermée de E de centre 0 et de rayon $r > 0$ et on considère $\mathcal{C}_b(B, F)$. Nous avons vu que c'est un espace de Banach, par conséquent, toute suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$ étant une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_b(B, F)$, elle converge donc vers une limite appartenant à $\mathcal{C}_b(B, F)$. Cette limite est linéaire et continue. Ceci étant vrai pour tout $r > 0$, on a alors l'existence d'une limite dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Isomorphismes d'espaces vectoriels normés.

Définition. Un isomorphisme d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F est une application linéaire, bijective, continue dont l'inverse est également linéaire et continue.

Remarques 1. Si une application est bijective est linéaire, alors son inverse est également linéaire.

2. Si une application est un homéomorphisme linéaire, alors c'est un isomorphisme linéaire.

Les deux points sont faciles à établir. Par contre, une autre implication résulte d'un théorème beaucoup plus difficile à démontrer que nous allons simplement énoncer:

Théorème Si $f : E \to F$ est une application entre deux espaces de Banach linéaire, bijective et continue, alors c'est un isomorphisme d'espaces de Banach.

Définition On appelle isométrie toute application bijective, linéaire f vérifiant

$$\|f(x)\| = \|x\|.$$

Conséquence Toute isométrie est continue et est un isomorphisme.

La réciproque est évidemment fausse. Il suffit de considérer les homothéties.

III. Normes équivalentes.

Définition ρ_1 et ρ_2 désignent deux normes sur un espace vectoriel normé E. Elles sont dites équivalentes si l'application

$$\text{Id} : \ (E, \rho_1) \to (E, \rho_2) \text{ est bicontinue.}$$

Comme conséquence directe de la caractérisation de la continuité d'une application linéaire, on a le résultat suivant:

Proposition Elles sont équivalentes si et seulement si il existe deux constantes m et M strictement positives telles que

$$m\rho_1(x) \leq \rho_2(x) \leq M\rho_1(x), \text{ pour tout } x \in E.$$

Il s'avère qu'en dimension finie, toute les normes sont équivalentes. Pour cela, nous allons d'abord établir ce résultat dans le cas de $\mathbb{R}^n$.

Proposition Dans $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration Nous allons montrer que toute norme ρ sur $\mathbb{R}^n$ est équivalente à la norme euclidienne. Si ρ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, alors elle est continue. En effet, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x - y),$$

et en posant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, on aura d'après les propriétés d'une norme

$$\rho(x - y) \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \rho(e_i).$$

Ainsi, quand x tend vers y, alors les x_i tendent vers les y_i et par suite $|\rho(x) - \rho(y)|$ tend vers 0. Ceci signifie que ρ est continue et que par suite elle est bornée sur la boule unité fermée. Il existe donc deux constantes strictement positives m et M vérifiant

$$m \leq \rho(x) \leq M.$$

On aura donc bien

$$m\|x\| \leq \rho(x) \leq M\|x\| \text{ pour tout} x \in E,$$

ρ et $\|.\|$ sont bien équivalentes.

Nous déduisons le résultat suivant

Corollaire Soit E un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R}^n \to E$ une application linéaire et bijective, alors f est un isomorphisme.

Démonstration Si ρ désigne la norme sur E, $\rho \circ f$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ (à vérifier!). Puisque toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, il existe donc deux constantes m et M strictement positives telles que

$$m\|x\| \leq \rho \circ f(x) \leq M\|x\|.$$

Une des inégalités précédentes prouve que f est continue, l'autre montre que f^{-1} l'est aussi.

Nous pouvons à présent éoncer le résultat qui règle la question de la continuité des applications linéaires quand la dimension est finie.

Théorème Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, alors E est un espace de Banach et toute application linéaire $f : E \to F$, où F est un espace vectoriel normé est continue.

Démonstration Montrons d'abord que E est complet et considérons une suite de Cauchy $(x_n)_n$ dans E. La dimension étant finie, il existe une application linéaire bijective $g : \mathbb{R}^n \to E$, et d'après ce qui précède, g est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés. Il admet donc une application réciproque linéaire et continue $h : E \to \mathbb{R}^n$. Il existe alors une constante M strictement positive telle que

$$\|h(x_n) - h(x_p)\| \leq M\|x_n - x_p\|.$$

Ceci justifie que la suite $(h(x_n))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$, elle converge donc vers une certaine limite l, et la continuité de g prouve que $x_n = g \circ h(x_n)$ converge vers $g(l)$. Par

suite, E est un espace de Banach.
Soit maintenant $f : E \to F$ une application linéaire, si on montre que $\varphi = f \circ g$ est continue, alors $f = \varphi \circ g^{-1}$ sera continue. Or, l'application φ est continue car elle est continue en 0. En effet, si $(x_1, ..., x_n)$ désigne un élément quelconque de $I\!R^n$, et $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canonique de $I\!R^n$, alors $\varphi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i)$ et ceci explique que quand $(x_1, ..., x_n)$ tend vers 0 alors $\varphi(x_1, ..., x_n)$ tend aussi vers 0.

Deux cas particuliers de $\mathcal{L}(E, F)$

- Si E est $I\!R$, alors $\mathcal{L}(I\!R, F)$ s'identifie à F par un isomorphisme naturel qui est une isométrie de la manière suivante: A tout élément $y \in F$, on associe l'application $\varphi_y \in \mathcal{L}(I\!R, F)$ définie par

$$\varphi_y : I\!R \to F$$

$$\lambda \mapsto \lambda y.$$

Il est alors facile de se convaincre qu'on a $\|\varphi_y\| = \|y\|$.
On a donc une application

$$\phi : \mathcal{L}(I\!R, F) \to F$$

$$\varphi \mapsto \varphi(1),$$

ou ce qui revient au même une application

$$\psi = \varphi^{-1} : F \to \mathcal{L}(I\!R, F)$$

$$y \mapsto \varphi_y,$$

et ϕ vérifie $\|\phi\| = 1$.(ψ aussi!)
- Si F est $I\!R$, $\mathcal{L}(E, I\!R)$ est l'espace des formes linéaires continues appelé aussi dual topologique.

IV. Le groupe $Iso(E, E)$ et l'application $u \mapsto u^{-1}$.

Dans l'optique d'étudier l'existence de certains inverses, nous avons besoin de rappeler des résultats sur les séries convergentes dans les espaces de Banach.

Définition Soit $(u_n)_n$ une suite dans un espace de Banach E. On dit que la série $\sum u_n$ est normalement convergente si la série $\sum \|u_n\|$ est convergente dans $I\!R$.

Théorème Si une série est normalement convergente, alors elle est convergente.

Démonstration Ceci se justifie par l'inégalité

$$\| \sum u_n\| \leq \sum \|u_n\|.$$

et donc le fait d'être de Cauchy pour l'une dans $I\!R$ implique que l'autre est aussi de Cauchy mais cette fois-ci dans l'espace E qui est de Banach.

Nous avons les deux propositions suivantes

Proposition Si E est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,E)$ est de Banach et si $u \in \mathcal{L}(E,E)$ est tel que $\|u\| < 1$, alors $1-u$ est inversible.

Démonstration Le premier point a déja été établi précédemment.
Soit u tel que $\|u\| < 1$. La série $\sum u_n$ où $u_n = u^n = u \circ u \circ ... \circ u$, n fois, est convergente car elle est normalement convergente. Cela résulte de l'inégalité

$$\|u^n\| \leq \|u\|^n$$

et si on pose $v = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$ alors v vérifie

$$uv = vu = \sum_{n=1}^{\infty} u^n.$$

Par suite, $Id = v - uv = (Id-u)v = u = v - vu = v(Id-u)$ ce qui prouve que $1-u$ est inversible.

Prpoposition 1. $Iso(E,E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E,E)$. (E est supposé de Banach)
2. L'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue.

Démonstration Pour montrer qu'il s'agit d'un ouvert, il suffit de montrer que $u_0^{-1}u$ est un inversible si u est proche de $u_0 \in Iso(E,E)$. D'après le résultat précédent, il suffit de vérifier que $\|1-u_0^{-1}u\| < 1$ si u est suffisamment proche de u_0.
Or $1-u_0^{-1}u = u_0^{-1}(u_0-u)$, d'où en passant aux normes

$$\|1-u_0^{-1}u\| \leq \|u_0^{-1}\|\|u_0-u\|.$$

Ainsi si on suppose $\|u_0-u\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$, alors on aura $u_0^{-1}u$ inversible et par suite u inversible.
Pour l'autre point, on pose $u = u_0(1-v)$ avec $\|v\| < 1$. On a $u^{-1} = (1-v)^{-1}u_0^{-1}$, d'où on déduit

$$\|u_0^{-1} - u^{-1}\| \leq \frac{\|v\|}{1-\|v\|} \qquad (*)$$

et quand u tend vers u_0, v tend vers 0 ($v = 1-u_0^{-1}u$ donc $\|v\| \leq \|u_0^{-1}\|\|u_0-u\|$) et, en vertu de (*), u^{-1} tend vers u_0^{-1}. D'où la continuité.

On montre, dans un cours de calcul différentiel, que cette application est même $\mathcal{C}^{\infty}$ et on peut donner sa différentielle en tout point de $Iso(E,E)$.

Pour finir ces rappels et compléments, nous allons étendre des notions vues dans le cadre linéaire au cadre multilinéaire.

V. Applications multilinéaires continues

Dans ce qui va suivre $E_1, ..., E_n$, F sont des espaces vectoriels normés et une application $f : E_1 \text{x} ... \text{x} E_n \to F$ est dite multilinéaire si elle est linéaire par rapport à chaque variable. Nous allons caractériser les applications multilinéaires continues.

Proposition Il y a équivalence entre les trois affirmations suivantes:
a) f est continue.
b) f est continue en zéro.
c) f est bornée sur le produit des boules unités, c'est à dire, il existe une constante M strictement positive telle que $\|f(x_1, ..., x_n)\| \leq M$ pour tous $\|x_1\| \leq 1$,...,$\|x_n\| \leq 1$.

La démonstration est similaire à celle établie dans le cas linéaire en apportant les traductions qui s'imposent.

Si on pose $\|f\| = sup_{\|x_1\| \leq 1, ..., \|x_n\| \leq 1} \|f(x_1, ..., x_n)\|$, on vérifie que $\|f\|$ est le plus petit des réels positifs M vérifiant $\|f(x_1, ..., x_n)\| \leq M$ pour tous $\|x_1\| \leq 1$,...,$\|x_n\| \leq 1$ et on vérifie que ceci définit une norme sur $\mathcal{L}(E_1 \text{x} ... \text{x} E_n, F)$ (ensemble des applications multilinéaires continues)

Exemple d'applications bilinéaires: La composée..

On considère l'application

$$\phi : \mathcal{L}(F, G) \text{x} \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(E, G)$$
$$(g, f) \mapsto g \circ f.$$

Comme $\|\phi(g, f)\| = \|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$, ϕ est donc continue et sa norme est inférieure ou égale à 1.

L'isométrie naturelle $\mathcal{L}(E\text{x}F, G) \simeq \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$.

L'isométrie est donnée par

$$\psi : \mathcal{L}(E\text{x}F, G) \to \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$$
$$f \mapsto \psi(f)$$

avec $\psi(f)(x)$, pour $x \in E$, est l'élément de $\mathcal{L}(F, G))$ défini pour tout $y \in F$ par $\psi(f)(x)(y) = f(x, y)$. Il est facile de vérifier que $\|\psi(f)\| = \|f\|$ et que par suite, $\|\psi\| = 1$.