Chapitre 4

Courbes paramétrées.

Jusqu'à présent, les courbes qui ont été étudiées correspondaient à des fonctions définies sur $I\!R$ ou une partie de $I\!R$ et à valeurs dans $I\!R$, et les graphes correspondant avaient la particularité de ne pas admettre de points doubles ni de revenir sur eux-mêmes: A une valeur donnée de x correspond au plus une valeur de y. Or, la plupart des courbes ou des trajectoires rencontrées dans plusieurs situations peuvent avoir un comportement quelconque. Il est par conséquent nécessaire d'introduire de nouveaux types de courbes qui répondent à ce genre de situation.

I. Introduction.

1. Fonctions vectorielles.

Définition Une fonction vectorielle à valeurs dans $I\!R^2$ est une application définie sur une partie $A \subset I\!R$ et à valeurs dans l'espace vectoriel $I\!R^2$.

$$F : A \subset I\!R \longrightarrow I\!R^2$$

$$t \longmapsto F(t) = (x(t), y(t)).$$

A est l'ensemble de définition de la fonction F.

Sur $I\!R^2$, on choisit la norme euclidienne

$$||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

et on dira que la suite $(u_n = (x_n, y_n))_n$ tend vers (α, β) si $||(x_n - \alpha, y_n - \beta)||$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Cela équivaut à dire que les deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ tendent respectivement vers α et vers β.

Etudier la courbe paramétrée définie par F signifie tracer dans le plan $I\!R^2$ l'image de A par la fonction F c'est à dire l'ensemble des points $M(t) = (x(t), y(t))$ lorsque t parcourt A. La fonction F sera supposée posséder certaines propriétés comme la continuité et la dérivabilité en tant que fonction à valeurs dans $I\!R^2$. Nous devons donc préciser ces notions.

Définitions Soit $t_0 \in A$, on suppose que t_0 appartient à un intervalle ouvert contenu dans A. On dit que F est continue en t_0 si $F(t)$ tend vers $F(t_0)$ lorsque t tend vers t_0.

On dit que F est dérivable en t_0 si le rapport

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} \text{ tend vers une limite finie notée } F'(t_0) \text{ lorsque } t \text{ tend vers } t_0.$$

Remarquons que lorsque F est dérivable en t_0, la limite $F'(t_0)$ est en fait un vecteur de $I\!R^2$.

On a les résultats suivants:

Proposition F est continue en t_0 si et seulement si les deux fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sont continues en t_0.

F est dérivable en t_0 si et seulement les deux fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sont dérivables en t_0 et on a

$$F'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

Démonstration. D'après la norme euclidienne, on a

$$||F(t)-F(t_0)|| = \sqrt{(x(t)-x(t_0))^2 + (y(t)-y(t_0))^2}.$$

Ainsi, si $F(t)$ tend vers $F(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ alors $x(t)$ tend vers $x(t_0)$ et $y(t)$ tend vers $y(t_0)$. Inversement, si $x(t)$ tend vers $x(t_0)$ et $y(t)$ tend vers $y(t_0)$ alors $F(t)$ tend vers $F(t_0)$.

De même, si F est dérivable en t_0 et si on note $F'(t_0) = (l, k)$ alors forcément les rapports

$$\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \text{ et } \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$$

tendent respectivement vers l et k.

La réciproque s'établit de la même manière.

Définitions On dit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si F est dérivable en tout point de A et si sa fonction dérivée

$$t \longmapsto F'(t) \text{ est continue sur } A.$$

F est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur A, où n est un entier supérieur ou égal à 1, si F est n fois dérivable sur A et si sa dérivée d'ordre n est continue sur A.

Nous allons donner sans démonstration la formule de Taylor-Young pour une fonction vectorielle à valeurs dans $I\!R^2$.

Formule de Taylor-Young.

Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et contenu dans A, alors, pout tout $t \in I$, on a

$$\mathbf{F(t) = F(t_0) + (t - t_0)F'(t_0) + \frac{1}{2!}(t - t_0)^2 F^{(2)}(t_0) + ... + \frac{1}{n!}(t - t_0)^n F^{(n)}(t_0) + (t - t_0)^n}\varepsilon\mathbf{(t - t_0)},$$

où ε est un fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est telle que

$$\varepsilon(t) \text{ tend vers } (0,0) \in \mathbb{R}^2 \text{ lorsque } t \text{ tend vers } t_0.$$

Signalons tout de même que cette formule résulte des deux formules de Taylor-Young pour les fonctions x et y et la fonction ε a pour fonctions composantes $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où ε_1 et ε_2 sont données par les restes des deux formules de Taylor-Young de x et de y.

2. Points stationnaires et vecteurs tangents.

Définition On dit que $F(t_0)$ est un point stationnaire si $F'(t_0) = 0$.

Remarque. L'étude des courbes paramétrées permet en particulier de décrire les trajectoires correspondant à des solutions d'équations différentielles. Lorsqu'on a $F'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) = 0$ cela signifie que la vitesse s'annule d'où l'origine du mot stationnaire.

Proposition Soit p le plus petit entier, supérieur ou égal à 1, tel que $F^{(p)}(t_0) \neq 0$, (on suppose qu'un tel p existe) alors le vecteur $F^{(p)}(t_0) = (x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$ est un vecteur tangent à la courbe au point $F(t_0)$.

Démonstration Grâce à la formule de Taylor-Young, nous pouvons écrire

$$F(t) - F(t_0) = (t - t_0)^p (x^{(p)}(t_0) + \varepsilon_1(t - t_0), y^{(p)}(t_0) + \varepsilon_2(t - t_0)),$$

où on a posé $\varepsilon(t - t_0) = (\varepsilon_1(t - t_0), \varepsilon_2(t - t_0))$. Les deux fonctions ε_1 et ε_2 sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et tendent vers 0 lorsque t tend vers t_0.

Si $p = 1$, le vecteur $\dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \dfrac{1}{t - t_0}[(t-t_0)^p(x^{(p)}(t_0)+\varepsilon_1(t-t_0), y^{(p)}(t_0)+\varepsilon_2(t-t_0))]$

tend vers le vecteur $(x'(t_0), y'(t_0))$ qui est donc vecteur tangent à la courbe, et si $p > 1$, le même vecteur tend vers le vecteur nul avec la direction $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$ qui est donc vecteur tangent dans ce cas.

II. Etude des courbes paramétrées .

Parmi les volets qui devront être étudiés, nous avons les variations de x et de y en fonction de t. Il faut souligner que lors du tracé, il s'agit de situer les points $(x(t), y(t))$. La variable t ne figurera pas sur les axes et par suite lorsqu'on étudie le comportement de x et de y pour t croissant, il est utile de penser que t correspond au temps et ce qu'on va dessiner et par suite observer, c'est tout simplement la trajectoire d'un point au cours du temps. Nous devrons aussi étudier l'existence d'éventuelles symétries, d'éventuels points doubles ainsi que d'éventuelles branches infinies. Pour terminer nous mettrons l'accent sur l'étude de la courbe au voisinage d'un point stationnaire et nous introduirons les notions de points de concavité, d'inflexion et de rebroussement.

1. Variations.

Une fois le domaine de définition fixé et la dérivabilité des composantes x et y justifiées, on peut considérer les dérivées de ces fonctions puis étudier leurs signes et déduire la monotonie de x et de y. Nous allons traiter un exemple.

Exemple Soit la courbe paramétrée donnée par les deux équations suivantes

$$\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}.$$

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$. De plus, il est utile de remarquer que la fonction x est impaire et que la fonction y est paire. Cela entraine que les points $(x(t), y(t))$ et $(x(-t), y(-t))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Par conséquent, il suffit d'étudier la courbe sur $\mathbb{R}_+^*$, et on complétera par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

D'une part, la fonction x est une fonction polynômiale et donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'autre part y est une fonction rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Les dérivées sont

$$x'(t) = 3(1 - t^2) \qquad y'(t) = \frac{2(t^2 - 1)(t^2 + 1)}{t^3}.$$

Nous avons les variations suivantes:

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	

$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Commentaire Lorsque t croit de 0 exclu jusqu'à 1, pour le tracé, on se déplacera vers la droite car x croit et en même temps on se déplacera vers le haut car y croit. De même, lorsque t varie de 1 jusqu'à $+\infty$, on se déplacera vers la gauche car x décroit et vers le haut car y croit.

Remarques sur les symétries

- Si on a x paire et y impaire, alors on complète par une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
- Si on a x impaire et y impaire, on complète par une symétrie par rapport à l'origine.
- Si $M(t) = M(1/t)$ pour $t \neq 0$, alors il suffit de faire l'étude sur $]0, 1]$ (ou sur $[-1, 0[$) et déduire le même comportemet sur $[1, +\infty[$ (ou sur $]-\infty, -1]$).
- Si on a x paire et y paire, alors on retrouve le même point la courbe sera donc parcourue deux fois, une fois dans un sens et l'autre fois dans le sens contraire.
- Si enfin x et y sont des fonctions périodiques comme par exemple

$$\begin{cases} x(t) = sin(t) + 3cos(2t) \\ y(t) = sin^2(t) - cos(4t) \end{cases},$$

pour lequel $T = 2\pi$ est une période, la courbe sera parcourue indéfiniment toujours dans le même sens. En principe, on aura une courbe fermée.

Remarquons aussi que le point $(x(1), y(1))$ est un point stationnaire.

2. Points doubles.

Définition Un point de la courbe est dit double s'il est atteint en deux valeurs différentes t_0 et t_1 de t.

Exemple Reprenons l'exemple $\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$.

Nous devons donc résoudre le système $\begin{cases} 3t_1 - t_1^3 = 3t_0 - t_0^3 \\ t_1^2 + \frac{1}{t_1^2} = t_0^2 + \frac{1}{t_0^2} \end{cases}$.

Nous obtenons le système équivalent suivant $\begin{cases} (t_1^2 - t_0^2)(t_0^2 t_1^2 - 1) = 0 \\ t_1^2 + t_0 t_1 + t_0^2 = 3 \end{cases}$,

qui donne les possibilités $t_0 = t_1$, $t_0 = -t_1$, $t_0 t_1 = 1$ et $t_0 t_1 = -1$.

Après résolution, on obtient

$$t_0 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \qquad t_1 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$
$$t_0 = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \qquad t_1 = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$
$$t_0 = \sqrt{3} \qquad t_1 = -\sqrt{3}.$$

Les points doubles sont: $(-\sqrt{2}, 4)$, $(\sqrt{2}, 4)$ et $(0, \frac{10}{3})$.

3. Branches infinies.

L'étude des branches infinies se présente lorsque pour t tendant vers t_0, t_0 étant fini ou infini, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Dans ce cas, si le rapport $\frac{x(t)}{y(t)}$ tend vers 0 lorsque t tend vers t_0, alors on a une branche parabolique dans la direction (Oy) et si ce rapport tend vers ∞, on a une branche parabolique dans la direction (Ox).

Si ce rapport tend vers un nombre réel a, alors on étudie la limite de $y(t) - ax(t)$ lorsque t tend vers t_0.

Si cette limite est infinie on a une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = ax$. Si cette limite est finie et vaut b, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe.

Dans le cas où on a une asymptote à la courbe, on peut étudier les positions relatives en étudiant le signe de

$$y(t) - (ax(t) + b),$$

si ce signe est positif, la courbe se trouve au dessus de l'asymptote lorsque t tend vers t_0 et si ce signe est négatif la courbe se trouve en dessous de cette asymptote lorsque t tend vers t_0.

Exemple 1 Pour la courbe paramétréee donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t^2-4t} \\ y(t) = \frac{t^2-1}{t} \end{cases},$$

on vérifie facilement que lorsque t tend vers 0^+, $x(t)$ tend vers $-\infty$ et $y(t)$ tend vers $-\infty$ et que lorsque t tend vers 0^-, $x(t)$ tend vers $+\infty$ et $y(t)$ tend vers $+\infty$. Le rapport

$$\frac{y(t)}{x(t)} = (t^2-1)(t-4) \text{ tend vers 4 lorsque } t \text{ tend vers 0.}$$

D'autre part, $y(t) - 4x(t)$ tend vers $\frac{1}{4}$. Par conséquent, la droite d'équation $y = 4x + \frac{1}{4}$ est asymptote oblique à la courbe.

Pour la position de la courbe par rapport à cette asymptote, on étudie le signe de $y(t) - (4x(t) + \frac{1}{4})$ selon que t est plus petit ou plus grand que 0. (Exercice.)

Exemple 2 Nous reprenons un exemple précédent

$$\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}.$$

Lorsque t tend vers $+\infty$, $x(t)$ tend vers $-\infty$ et $y(t)$ tend vers $+\infty$. Le rapport

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{3t^3 - t^5}{t^4 + 1}$$

tend vers $-\infty$ lorsque t vers $+\infty$. Par conséquent, on a une branche parabolique dans la direction (Ox).

4. Etude des points singuliers.

Définition Un point $F(t_0) = M(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ est dit singulier si il existe p entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que

$$F'(t_0) = F^{(2)}(t_0) = ... = F^{(p-1)}(t_0) = 0 \text{ et } F^{(p)}(t_0) \neq 0.$$

Il faut noter qu'en un tel point, la courbe peut avoir plusieurs comportements. Pour clarifier cette situation, nous allons décomposer le vecteur $F(t)$ suivant une base convenablement choisie.

On écrit la formule de Taylor-Young pour F à un ordre suffisamment élevé, F étant supposée de classe $\mathcal{C}^n$ où n est un entier naturel assez grand.

Si q désigne le plus petit entier supérieur à p pour lequel le vecteur $u_q = F^{(q)}(t_0)$ est non colinéaire au vecteur $u_p = F^{(p)}(t_0)$, on a

$$\mathbf{F(t) = F(t_0) + \frac{1}{p!}(t - t_0)^p F^{(p)}(t_0) + ... + \frac{1}{q!}(t - t_0)^q F^{(q)}(t_0) + (t - t_0)^q} \varepsilon\mathbf{(t - t_0)},$$

Dans la base $\{u_p, u_q\}$, on a

$$F(t) - F(t_0) = \alpha_p(t)(t - t_0)^p u_p + \alpha_q(t)(t - t_0)^q u_q,$$

où α_p et α_q sont deux fonctions de t qui tendent respectivement vers $1/p!$ et $1/q!$ lorsque t tend vers t_0. On a la proposition suivante:

Proposition

Si p **est impair et** q **est impair**, le point $F(t_0)$ correspond à un point d'inflexion: La courbe traverse la tangente en ce point qui est dirigée par le vecteur u_p.

Si p **est impair et** q **est pair**, le point $F(t_0)$ correspond à un point de concavité: La courbe reste d'un même côté par rapport à sa tangente.

Si p **est pair et** q **est impair**, le point $F(t_0)$ correspond à un point de rebroussement de première espèce: La courbe va traverser sa tangente tout en restant d'un même côté par rapport à la droite dirigée par la vecteur u_q. On aura un point anguleux.

Si p **est pair et** q **est pair**, le point $F(t_0)$ correspond à un point de rebroussement de deuxième espèce: La courbe s'approche de $F(t_0)$ suivant le vecteur tangent u_p et rebrousse son chemin sans traverser la tangente ni la droite passant par $F(t_0)$ et dirigée par le vecteur u_q. On a un point anguleux.

Démonstration Il suffit de considérer le signe de $(t-t_0)^p$ et celui de $(t-t_0)^q$ lorsque t tend vers t_0^+ et lorsque t tend vers t_0^-.

Si p est impair et q est impair, pour t voisin de t_0, $F(t) - F(t_0)$ est un vecteur qui admet une composante positive suivant u_p et une composante positive également suivant u_q lorsque t tend vers t_0^+. Les signes de ces deux composantes changent et deviennent tous les deux négatifs lorsque t tend vers t_0^-. Si on reprend ces informations au niveau local au voisinage de $F(t_0)$, cela correspond exactement à un point d'inflexion.

Par contre, si p est impair et q est pair, le signe de la composante suivant le vecteur u_q ne change pas et reste positif indépendamment du fait qu'on ait $t > t_0$ ou $t < t_0$. Dans cas, la courbe ne traverse pas sa tangente. Les autres situations se traitent de la même manière.

L'espace ci-dessus est réservé pour des dessins qui seront faits lors de la séance de cours.

<u>Point d'inflexion</u>

<u>Point de concavité</u>

<u>Point de rebroussement de 1ère espèce</u>

<u>Point de rebroussement de 2ème espèce</u>

Pour finir le plan d'étude, il reste à étudier la concavité de la courbe.

5. Concavité

La concavité change en des points où la pente de la tangente passe par un minimum ou un maximum. Pour cela, on considère le rapport

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

ou le rapport

$$\frac{x'(t)}{y'(t)}$$

lorsqu'au moins un des deux est défini. Il faut noter que si le vecteur tangent est vertical, cela signifie que $x'(t_0) = 0$ et dans ce cas, on étudie le second rapport. Si le vecteur tangent est horizontal, on a $y'(t_0) = 0$ et dans ce cas on étudie le premier rapport au voisinage de t_0. Notons aussi que la concavité peut changer en un point stationnaire, c'est à dire tel que

$$x'(t_0) = y'(t_0) = 0.$$

Or, si le point est singulier, les fonctions $t \longmapsto x'(t)$ et $t \longmapsto y'(t)$ sont non nulles sur un voisinage convenable de t_0 privé de t_0. Il est donc légitime de se demander si le rapport change de signe. Dans tous les cas, une condition nécessaire est que

$$x'(t)y"(t) - x"(t)y'(t) = 0.$$

Parmi les solutions obtenues, on doit s'assurer si le signe change. L'étude de la concavité nécessite parfois beaucoup de calculs. Pour cette raison, on ne fera l'étude de la concavité que si cette dernière est demandée.

Les exercices suivants seront traités en cours.

Exercices Etudier les courbes paramétrées suivantes:

$$\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x(t) = 3cos(t) + cos(3t) \\ y(t) = 3sin(t) - sin(3t) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t^2-4t} \\ y(t) = \frac{t^2-1}{t} \end{cases}.$$