UNIVERSITE MOHAMMED V- AGDAL
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Module Analyse 2

Filières SM et SMIA

Semestre 2

Chapitre 5

Hamza BOUJEMAA

I. Introduction.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à certaines courbes paramétrées particulières. Plus précisément celles qui se présentent sous la forme

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$$

où ρ est une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}$ et supposée suffisamment différentiable.

Une courbe en coordonnées polaires est donnée par une relation de la forme

$$\rho = \rho(\theta).$$

Bien entendu, on peut faire l'étude de ce genre de courbes en utilisant les méthodes d'étude pour n'importe quelle courbe paramétrée, mais il est plus pratique d'appliquer une autre méthode à ce genre de situation. On verra par exemple que pour ce type de courbe, les points de rebroussement de deuxième espèce sont exclus.

Il est important de noter que la fonction ρ peut prendre des valeurs négatives. Dans ce cas, le point $(x(\theta), y(\theta))$ aura pour angle polaire non pas θ mais $\theta + \pi$ et la distance qui le sépare de l'origine est $-\rho(\theta)$.

Il est également pratique d'introduire les vecteurs

$$u_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \text{ et } v_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}.$$

Au lieu de dériver $x(\theta)$ et $y(\theta)$, on dérivera u_θ et v_θ et on a la formule suivante

$$\frac{d^n}{d\theta^n}(u_\theta) = \cos\left(\theta + n\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\theta + n\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}.$$

Dans la suite, on écrira

$$F(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = \rho(\theta)u_\theta.$$

Le paramètre θ remplacera le paramètre t . On notera que les vecteurs $u^{(p)}(\theta)$ et $u^{(p+1)}(\theta)$ sont orthogonaux pour tout $p \geq 0$ et que

$$F'(\theta) = \rho'(\theta)u_\theta + \rho(\theta)v_\theta.$$

La formule de Leibniz appliquée à la fonction F donne

$$F^{(n)}(\theta) = \sum_{k=0}^n C_n^k \rho^{(k)}(\theta) u^{(n-k)}(\theta).$$

II. Vecteur tangent en un point et point stationnaire.

Un point $F(\theta_0)$ est stationnaire lorsque

$$F'(\theta_0) = \rho'(\theta_0)u_{\theta_0} + \rho(\theta_0)v_{\theta_0} = (0, 0).$$

Cela signifie

$$\rho(\theta_0) = 0 \text{ et } \rho'(\theta_0) = 0.$$

Ceci entraîne la proposition suivante:

Proposition Si le point $F(\theta_0)$ n'est pas l'origine alors ce point n'est pas stationnaire et le vecteur $F'(\theta_0)$ est le vecteur tangent.

En effet, si le point considéré n'est pas l'origine alors $\rho(\theta_0) \neq 0$ et par suite le vecteur $F'(\theta_0)$ n'est pas le vecteur nul.

On a également la proposition suivante:

Proposition Si le point $F(\theta_0)$ est l'origine alors ou bien $\rho'(\theta_0) \neq 0$ et dans ce cas le point n'est pas stationnaire et $F'(\theta_0)$ est un vecteur tangent ou bien $\rho'(\theta_0) = 0$ et dans ce cas le point est stationnaire et si p est le plus petit entier supérieur à 1 tel que $\rho^{(p)}(\theta_0) \neq 0$, le vecteur

$$F^{(p)}(\theta_0) = \rho^{(p)}(\theta_0)u_{\theta_0}$$

est un vecteur tangent.

Démonstration Supposons $\rho'(\theta_0) = 0$. D'après la formule de Leibniz, on a

$$F^{(p)}(\theta_0) = \sum_{k=0}^p C_p^k \rho^{(k)}(\theta_0) u^{(p-k)}(\theta_0).$$

Si p désigne le plus petit entier supérieur à 1 tel que $\rho^{(p)}(\theta_0) \neq 0$, la somme précédente se réduit au seul terme

$$\rho^{(p)}(\theta_0)u_{\theta_0},$$

et on a

$$F^{(p)}(\theta_0) = \rho^{(p)}(\theta_0)u_{\theta_0}.$$

Remarques

1. Si la courbe passe par l'origine pour la valeur θ_0 du paramètre, la tangente à la courbe fait avec l'axe (Ox) un angle θ_0 .

2. En tout point autre que l'origine et pour lequel $\rho'(\theta_0) \neq 0$, la tangente à la courbe fait avec la demi droite ($OM(\theta_0)$) un angle α déterminé par

$$\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \tan(\alpha) = \frac{\rho(\theta_0)}{\rho'(\theta_0)}.$$

Si en un tel point $\rho'(\theta_0) = 0$, alors la tangente est dirigée par le vecteur v_{θ_0} .

Afin de compléter l'étude au voisinage de certains points, on va étudier la nature des points stationnaires ainsi que la nature des points autres que l'origine. On va déterminer les possibilités pour les points d'inflexion, de concavité et de rebroussement de première espèce. Les points de rebroussement de deuxième espèce sont exclus pour les courbes en coordonnées polaires.

III. Inflexion, concavité et rebroussement 1ère espèce.

1. Cas où $F(\theta_0) = 0$.

Dans ce cas, on a donc $\rho(\theta_0) = 0$. D'après le paragraphe précédent, nous savons que le vecteur tangent en un tel point est donné par le vecteur $F^{(p)}(\theta_0)$ où p est le plus petit entier supérieur ou égal à 1 tel que $F^{(p)}(\theta_0) \neq 0$. On a la proposition suivante:

Proposition Le vecteur $u_{p+1} = F^{(p+1)}(\theta_0)$ est non nul et non colinéaire au vecteur $u_p = F^{(p)}(\theta_0)$. L'ensemble $\{u_p, u_{p+1}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration Il suffit de remarquer qu'on a

$$F^{(p)}(\theta_0) = \rho^{(p)}(\theta_0)u_{\theta_0} \text{ et } F^{(p+1)}(\theta_0) = \rho^{(p+1)}(\theta_0)u_{\theta_0} + \rho^{(p)}(\theta_0)v_{\theta_0},$$

et la conclusion découle du fait que $\{u_{\theta_0}, v_{\theta_0}\}$ est une base orthogonale.

Conséquence Si p est impair, l'origine est un point de concavité et si p est pair l'origine est un point de rebroussement de 1ère espèce.

Remarques (Les espaces qui suivent sont réservés aux dessins qui seront faits en cours)

1. Si p est impair et $\rho^{(p)}(\theta_0) > 0$, alors $\rho(\theta) < 0$ pour $\theta < \theta_0$ et $\rho(\theta) > 0$ pour $\theta > \theta_0$. Nous voyons qu'alors $\rho(\theta)$ prend des valeurs négatives lorsque θ est proche de θ_0 avec

$\theta < \theta_0$. Les coordonnées polaires du point $(x(\theta), y(\theta))$ sont $(-\rho(\theta), \theta + \pi)$. Dans ce cas, au voisinage de 0, la courbe se présente comme suit:

2. Si p est impair et $\rho^{(p)}(\theta_0) < 0$, alors $\rho(\theta) > 0$ pour $\theta < \theta_0$ et $\rho(\theta) < 0$ pour $\theta > \theta_0$. Nous voyons qu'alors $\rho(\theta)$ prend des valeurs négatives lorsque θ est proche de θ_0 avec $\theta > \theta_0$. Les coordonnées polaires du point $(x(\theta), y(\theta))$ sont $(-\rho(\theta), \theta + \pi)$. Dans ce cas, au voisinage de 0, la courbe se présente comme suit:

3. Si p est pair et $\rho^{(p)}(\theta_0) > 0$, alors $\rho(\theta) > 0$ pour $\theta < \theta_0$ et $\rho(\theta) > 0$ pour $\theta > \theta_0$. Dans ce cas, au voisinage de 0, la courbe se présente comme suit:

4. Si p est pair et $\rho^{(p)}(\theta_0) < 0$, alors $\rho(\theta) < 0$ pour $\theta < \theta_0$ et $\rho(\theta) < 0$ pour $\theta > \theta_0$. Nous voyons qu'alors $\rho(\theta)$ prend des valeurs négatives lorsque θ est proche de θ_0 selon que $\theta > \theta_0$ ou que $\theta < \theta_0$. Les coordonnées polaires du point $(x(\theta), y(\theta))$ sont $(-\rho(\theta), \theta + \pi)$. Dans ce cas, au voisinage de 0, la courbe se présente comme suit:

2. Cas où $F(\theta_0) \neq 0$.

Dans ce cas, on a donc $\rho(\theta_0) \neq 0$. D'après le paragraphe précédent, nous savons que le vecteur tangent en un tel point est donné par le vecteur $F'(\theta_0) = \rho'(\theta_0)u_{\theta_0} + \rho(\theta_0)v_{\theta_0}$. Il se peut que le vecteur

$$F^{(2)}(\theta_0) = (\rho''(\theta_0) - \rho(\theta_0))u_{\theta_0} + 2\rho'(\theta_0)v_{\theta_0}$$

soit colinéaire à u_{θ_0} . Soit donc q le plus petit entier supérieur à 1 tel que $F^{(q)}(\theta_0)$ soit non colinéaire à $F'(\theta_0)$. On a la proposition suivante:

Proposition Si q est impair, le point $F(\theta_0)$ est un point d'inflexion et si q est pair le point $F(\theta_0)$ est un point de concavité.

Remarques

1. Le point $F(\theta_0)$ n'est jamais un point de rebroussement.
2. Si $\rho'(\theta_0) = 0$, le vecteur tangent $F'(\theta_0)$ est parallèle au vecteur v_{θ_0} . Dans le cas $\rho'(\theta_0) \neq 0$, le vecteur tangent $F'(\theta_0)$ n'est plus parallèle au vecteur v_{θ_0} et lorsque $\theta > \theta_0$, $\rho(\theta) > \rho(\theta_0)$ ou $\rho(\theta) < \rho(\theta_0)$ selon que $\rho'(\theta_0) > 0$ ou $\rho'(\theta_0) < 0$.
3. Dans le cas où $\rho'(\theta_0) = 0$ et pour comprendre le comportement de la courbe au voisinage du point $F(\theta_0)$, on a besoin de considérer le plus petit entier k tel que $\rho^{(k)}(\theta_0) \neq 0$. De toutes les façons, nous aurons un point d'inflexion si q est impair et un point de concavité si q est pair.

IV. Symétries et concavité.

1. Symétries

1. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout θ appartenant au domaine de définition de ρ D_ρ ,

$$(\theta + \alpha) \in D_\rho \text{ et } \rho(\theta + \alpha) = \rho(\theta)$$

ou bien

$$(\theta + \alpha + \pi) \in D_\rho \text{ et } \rho(\theta + \alpha + \pi) = -\rho(\theta)$$

alors la courbe est invariante par la rotation de centre O et d'angle α . En pratique, cela revient à étudier si la fonction ρ est périodique.

2. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\theta \in D_\rho$

$$(\alpha - \theta) \in D_\rho \text{ et } \rho(\alpha - \theta) = \rho(\theta) \quad (*)$$

ou bien

$$(\alpha + \pi - \theta) \in D_\rho \text{ et } \rho(\alpha + \pi - \theta) = -\rho(\theta) \quad (**)$$

alors la courbe est invariante par symétrie par rapport à la droite Δ passant par O et faisant avec (Ox) un angle égal à $(\alpha/2)$ modulo π .

Cas particuliers.

- Si $\alpha = 0$ dans (*), c'est à dire si ρ est paire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox) .

- Si $\alpha = \pi$ dans (*), la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Oy) .

- Si $\alpha = -\pi$ dans (**), la fonction ρ est impaire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Oy) .

2. Concavité

On cherche les points d'inflexion éventuels. D'après l'étude des vecteurs tangents, nous savons que l'origine ne peut pas être un point d'inflexion.

Une condition nécessaire pour avoir un point d'inflexion en un point $F(\theta_0)$ est que les vecteurs $F'(\theta_0) = (\rho'(\theta_0), \rho(\theta_0))$ et $F''(\theta_0) = (\rho''(\theta_0) - \rho(\theta_0), 2\rho'(\theta_0))$ soient colinéaires, autrement écrit:

$$\rho^2(\theta_0) + 2\rho'^2(\theta_0) - \rho(\theta_0)\rho''(\theta_0) = 0.$$

Comme $\rho(\theta_0) \neq 0$, ceci équivaut à la formule plus facile à retenir

$$\frac{1}{\rho(\theta_0)} + \left(\frac{1}{\rho(\theta_0)}\right)'' = 0.$$

Une fois la ou les valeurs de θ_0 trouvée(s), on doit s'assurer si on a bien un point d'inflexion en vérifiant que les vecteurs $F'(\theta_0)$ et $F^{(3)}(\theta_0)$ sont indépendants.

V. Branches infinies et asymptotes.

On a des branches infinies lorsque $\|F(\theta)\|$ tend vers $+\infty$ lorsque θ tend vers θ_0 . C'est à dire $|\rho(\theta)|$ tend vers $+\infty$ lorsque θ tend vers θ_0 .

Nous allons préciser le cas où on a une asymptote oblique (Δ) parallèle à la droite (D) passant par O, faisant avec l'axe (Ox) un angle égal à $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et se trouvant à une distance b de la droite (D) .

La courbe admet la droite Δ comme asymptote oblique lorsque θ tend vers θ_0 si et seulement si

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = b.$$

Pour établir cette relation, il faut noter que si M est le point $F(\theta)$ et si H désigne son projeté orthogonal sur la droite (D) alors la distance MH est donnée par

$$MH = |\rho(\theta) \cdot \sin(\theta - \theta_0)|.$$

Dire que la courbe admet la droite Δ comme asymptote c'est dire que la distance MH tend vers la limite finie b . Il faut noter que Δ peut se trouver au dessus ou en dessous de (D) selon que θ tend vers θ_0^+ ou θ_0^- .

Autres types de branches infinies

On peut aussi avoir des branches infinies en spirale si $\rho(\theta)$ tend vers $+\infty$ ou $r \geq 0 \in \mathbb{R}$ lorsque θ tend $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $r = 0$, l'origine est un point asymptote et la courbe s'enroule autour de l'origine dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse selon que θ tend vers $-\infty$ ou $+\infty$.

Si $r > 0$, le cercle de centre O et de rayon $r > 0$ est dans ce cas un cercle asymptote et la courbe s'enroule autour de ce cercle dans le sens des aiguilles d'une montre ou le sens inverse selon que θ tend vers $-\infty$ ou θ tend vers $+\infty$.

De plus, si $\rho(\theta)$ tend vers r^- lorsque θ tend vers $+\infty$, la courbe s'enroule autour du cercle dans le sens trigonométrique tout en étant à l'intérieur du cercle, et si $\rho(\theta)$ tend vers r^- lorsque θ tend vers $-\infty$ par , la courbe s'enroule autour du cercle dans le sens inverse du sens trigonométrique tout en étant à l'intérieur du cercle.

Maintenant, si $\rho(\theta)$ tend vers r^+ lorsque θ tend vers $+\infty$, la courbe s'enroule autour du cercle dans le sens trigonométrique tout en étant à l'extérieur du cercle, et si $\rho(\theta)$ tend vers r^+ lorsque θ tend vers $-\infty$ par , la courbe s'enroule autour du cercle dans le sens inverse du sens trigonométrique tout en étant à l'extérieur du cercle.

Exemple

$$\rho(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}.$$

Nous voyons dans ce cas que lorsque θ tend vers $+\infty$, $\rho(\theta)$ tend vers 1^- , la courbe présente donc un cercle asymptote et la courbe s'enroule autour de ce cercle de l'intérieur et dans le sens trigonométrique.

Nous voyons également que lorsque θ tend vers $-\infty$, $\rho(\theta)$ tend vers 1^+ , la courbe présente donc un cercle asymptote et la courbe s'enroule autour de ce cercle de l'extérieur et dans le sens trigonométrique.

V. Exemples de courbes en coordonnées polaires.

Les exemples suivants seront traités en cours

$$\rho(\theta) = 1 - \theta^2 \quad \text{Spirale de Galilée.}$$

$$\rho(\theta) = 2\cos(\theta) + 1 \quad \text{Limaçon de Pascal.}$$

$$\rho(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}.$$